

Elementare numerische Methoden II

Integration

Aufgabe 3.1: **(16 Punkte)**

Berechnen Sie mit Mittelpunktregel, Trapezmethode und Simpson-Methode die folgenden Integrale:

a)
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/4} \sinh(2x) \, dx$$

b)
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/4} e^{-100x^2} \, dx \quad (\text{approximativ verschwindend an den Grenzen})$$

c)
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/4} \Theta(x) \, dx \quad (\text{unstetige Funktion})$$

- Berechnen Sie die Integrale analytisch (bzw. hinreichend genau genähert) und geben Sie die drei Ergebnisse in einem Kommentar am Ende des Programms an.
- Stellen Sie den Betrag des relativen Fehlers (bezogen auf das analytische Ergebnis) in Abhängigkeit von der Intervallbreite h für die drei Methoden in einem Diagramm doppeltlogarithmisch dar. Verwenden Sie unterschiedliche Farben und eine Legende. Wählen Sie die Zahl N der Teilintervalle so, dass mindestens der Bereich $h \in [10^{-4}, 1]$ abgedeckt wird.
- Zeichnen Sie das jeweilige analytisch erwartete Skalierungsverhalten in das gleiche Diagramm ein.
- Diskutieren und erklären Sie Ihre Ergebnisse für jede der Integrationsmethoden für jede der drei Funktionen in einem Kommentar am Ende des Programms.
- Geben Sie nur Ihr Programm für das erste Integral ab.

Vorgaben und Hinweise:

- 1 Testen Sie Ihr Programm unbedingt an der Funktion $f(x) = 1$, bei der keine Diskretisierungsfehler sondern nur Rundungsfehler auftreten sollten.
- 1 Wählen Sie die Zahl N der Teilintervalle geeignet auf einer logarithmischen Skala, z.B. mit `np.int32(10**np.linspace(0.0, 5.0, anz))`.
- 1 Die Berechnung eines Integrals für eine gegebene Anzahl von Teilintervallen soll mittels `numpy` Operationen realisiert werden (d.h. ohne Verwendung von Schleifen).
- 1 Die Heaviside-Stufenfunktion $\Theta(x)$ kann z.B. durch `np.heaviside(x, 1.0)` berechnet werden.

