

## Elementare numerische Methoden I

### Ableitung

Die Ableitung  $A(x) \approx f'(x)$  einer Funktion  $f(x)$  kann numerisch mit unterschiedlichem Aufwand und verschiedener Präzision bestimmt werden:

- Vorwärtsdifferenz:  $A_V(x) = \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$
- Zentralsdifferenz:  $A_Z(x) = \frac{1}{h}(f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2}))$
- Extrapolierte Differenz:  $A_E(x) = \frac{1}{3h} \left[ 8 \left( f\left(x+\frac{h}{4}\right) - f\left(x-\frac{h}{4}\right) \right) - \left( f\left(x+\frac{h}{2}\right) - f\left(x-\frac{h}{2}\right) \right) \right]$

Der Parameter  $h$  muss geeignet gewählt werden und dazu muss man den relativen Fehler der Ableitung in Abhängigkeit von  $h$  kennen.

#### Aufgabe 2.1:

(16 Punkte)

Schreiben Sie ein Programm, welches nach den drei o.g. Methoden die Ableitung einer Funktion an einer Stelle in Abhängigkeit von  $h$  ermittelt.

Betrachten Sie die Funktion  $f(x) = \arctan(x^4)$  und die Stelle  $x_0 = \frac{1}{4}$ :

- Bestimmen Sie jeweils den Betrag des relativen Fehlers zum analytischen Ergebnis.
- Stellen Sie diesen für  $h \in [10^{-10}, 1]$  doppeltlogarithmisch dar. Kennzeichnen Sie die Ergebnisse zu den verschiedenen Methoden farblich und nutzen Sie eine Legende.
- Zeichnen Sie das jeweils erwartete Skalierungsverhalten  $h^\alpha$  hinzu.
- Testen Sie Ihr Programm auch für  $x_0 = -1/5$ .
- Beantworten Sie im Kommentar am Ende des Programms folgende Fragen:
  - (a) Was ist die Ursache für das  $h^{-1}$  Verhalten der Fehler bei kleinen Werten von  $h$  (Genaue Erklärung am Beispiel der Vorwärtsdifferenz)?
  - (b) Was ist die optimale Wahl für  $h$  und der jeweils entsprechende relative Fehler für die drei Methoden (Tabelle mit Begründung)?

## Hinweise:

- ❶ Nutzen Sie `fig.add_subplot(1, 1, 1, xscale="log", yscale="log")` für die doppeltlogarithmische Darstellung.
- ❷ Um eine Legende zu erzeugen müssen den entsprechenden Plotbefehlen ein zusätzlicher Parameter mit dem Schlüsselwort `label` hinzugefügt und im Anschluss `ax.legend()` aufgerufen werden.
- ❸ Sollte Ihnen das Fenster, welches von `matplotlib` geöffnet wird, zu klein sein, so experimentieren Sie etwas mit dem Schlüsselwort `figsize` herum, z.B.:  
`plt.figure(figsize=(10, 8))`
- ❹ Sie können in Python problemlos einen Funktionsnamen als Parameter übergeben:

---

```
1 def minus(funktion, x):
2     """Rueckgabe negativer Wert der Funktion 'funktion' an der Stelle 'x'."""
3     return -funktion(x)
4
5
6 print(minus(np.cos, np.pi/3))
```

---