Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Jörg Wensch
Dr. Ute Feldmann

Übungsblatt 11 zur Vorlesung Mathematik II/2: Partielle Differentialgleichungen

1. Es sei eine rechteckige Platte der Größe $\Omega = [0,2] \times [0,1]$ im Zweidimensionalen gegeben, die an den Rändern $\Gamma_1 = [0,2] \times \{0\}$ und $\Gamma_3 = [0,2] \times \{1\}$ vollständig isoliert ist und an den Rändern $\Gamma_2 = \{2\} \times [0,1]$ und $\Gamma_4 = \{0\} \times [0,1]$ auf konstanter Temperatur $u = 100$ bzw. $u = 150$ gehalten wird.
   (a) Der Wärmeaustausch finde allein durch Diffusion statt mit konstantem Diffusionskoeffizienten D. Zur Startzeit $t_0 = 0$ habe die Platte eine konstante Temperatur $u(0,x,y) = 50$. Stellen Sie die partielle Differentialgleichung mit zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen auf, die die zeitliche Änderung der Temperatur $u(t,x,y)$ der Platte beschreibt.
   (b) Auf der Platte werde der Bereich $B = [0.9, 1.0] \times [0.4, 0.5]$ mit einer räumlich und zeitlich konstanten Heizrate von 10 erwärmt. Ändern Sie das Modell in (a) derart, dass diese Wärmequelle berücksichtigt wird.

2. Geben Sie die PDGL für das Potential φ des stationären Strömungsfeldes (s. Skript VL EMF Kap. 3. S.6) der abgebildeten Anordnungen inkl. der Randbedingungen an. (**dicker** Strich: idealer Leiter, dünner Strich idealer Nichtleiter)

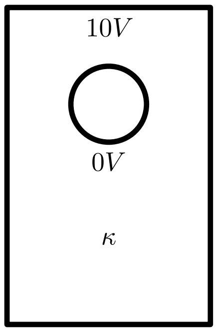

Bild 1

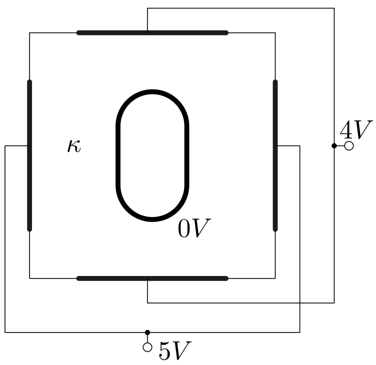

Bild 2

3. Sie kennen die Differentialoperatoren div, grad und Δ bereits in kartesischen Koordinaten. Notieren Sie diese Operatoren in Kugelkoordinaten (siehe Formelsammlung, Internet o.ä.).
   Überzeugen Sie sich, dass dafür auch gilt: div grad $U = \Delta U$.
   Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke
   (a) div $\vec{r}$, (b) grad r^2, (c) div $r^2\vec{r}$, (d) grad $(\frac{1}{r})$, (e) div (grad $(\frac{1}{r})$), (f) div $\frac{\vec{r}}{r^3}$
   Hinweis: $\vec{r} = r \cdot \vec{e_r}$ mit $\vec{e_r}$ Einheitsvektor in radialer Richtung.

4. Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_{nm} = \sin(n\pi x) \cdot \cos(m\pi y)$ orthogonal bzgl. des Skalarprodukts auf dem Einheitsquadrat $\langle f, g\rangle = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)g(x,y)dxdy$ sind. Bestimmen Sie die Norm $\|f_{nm}\| = \langle f_{nm}, f_{nm}\rangle^{1/2}$.