Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Jörg Wensch
Dr. Ute Feldmann

Übungsblatt 10 zur Vorlesung Mathematik II/2: Partielle Differentialgleichungen

1. Elektrostatisches Feld: Betrachtet wird ein sogenanntes 1-dimensionales Problem, d.h. alle elektrischen Größen hängen nur von einer Koordinate x und nicht von y, z ab. Gegeben sei ein Dielektrikum der Länge $L = 0.1\text{m}$ mit Metallelektroden an beiden Enden, an die eine Spannung $U = 10V$ angelegt wird.

   (a) Es gilt die Laplace'sche Differentialgleichung (s. Skript VL EMF Kap. 3. S.4). Geben Sie diese für den hier vorliegenden eindimensionalen Fall inkl. der zugehörigen Randbedingungen an. Berechnen Sie das Potential $\varphi(x)$.

   (b) Es liege nun eine fixe Ladungsverteilung mit $\rho(x) = \hat{\rho}\sin(\pi x/L)$ vor und es gilt die Poisson-Gleichung. Berechnen Sie für diesen Fall $\varphi(x)$.

2. Auf einer Platine werden durch einen geraden Draht (Kupfer, Länge $L = 0.1\text{m}$, idealisiert sehr dünn) zwei Lötstellen miteinander verbunden. Die Menge Lötzinn an den Lötstellen sei so groß, dass der Draht dort sofort die Temperatur der Lötstelle annimmt. Der Wärmeaustausch mit der Luft sei vernachlässigbar klein. Die Temperatur an der ersten, bereits erstellten Lötstelle sei immer gleich der Umgebungstemperatur von $300K$. An der anderen bewirkt der Lötkolben instantan eine Temperatur von $600K$. Zu Beginn des Lötvorgangs an der zweiten Lötstelle sei der Draht komplett auf Umgebungstemperatur abgekühlt. Der Wärmediffusionskoeffizient von Kupfer sei $D = 117 \cdot 10^{-6} m^2/s$. Gesucht ist die Temperaturverteilung im Draht während des Lötvorgangs, der eine Dauer von $5s$ habe.

   Aufgabe: Stellen Sie ein mathematisches Modell für dieses Problem mit Hilfe einer partiellen Differentialgleichung auf. Wie heißt diese Differentialgleichung? Welches ist das Lösungsgebiet? Wie lauten die Anfangs- und Randbedingungen?

3. Auf einer Autobahn bewegen sich Fahrzeuge mit einer der Verkehrsdichte q angepassten Geschwindigkeit v. Die Dichte q sei dabei ein relativer Wert der Form 'Fahrzeuganzahl mal Fahrzeuglänge pro Teilstück', d.h., q hat den Maximalwert 1. Der Zusammenhang sei durch $v(q) = (1 - q) * 200km/h$ gegeben.

   Geben Sie eine partielle Differentialgleichung als Modell für die Fahrzeugdichte $q(t, x)$ an!

   Welcher Verkehrssituation entspricht folgender Anfangswert:

$$q(0, x) = \begin{cases} 0.5 & \text{für } x < 100km \\ 0.95 & \text{für } x \geq 100km \end{cases}$$

4. Wir betrachten einen (idealisierten) Fluss, der über eine Länge von 1000 km mit einer konstanten Geschwindigkeit $v = 2m/s$ von der Quelle zur Mündung strömt. Er hat keine Zu- oder Abflüsse. Im Kilometer 100 wird der Fluss durch einen Unfall mit Benzol auf der Strecke von $100km \pm 50\text{m}$ verseucht. In der verseuchten Zone möge direkt nach dem Unglück (über der gesamten Breite des Flusses) ein Film mit der konstanten Höhe $h_0 = 10\mu m$ liegen. Diffusion (d.h. das Breitlaufen des Teppichs) soll vernachlässigbar klein sein. Allerdings verdampft permanent eine Menge an Benzol, die **proportional** zur Höhe des Films ist. Die Verdampfungsrate ist $k = 4 \cdot 10^{-6} s^{-1}$.

   Stellen Sie ein mathematisches Modell für diesen Prozess mit Hilfe einer partiellen Differentialgleichung auf. Wie heißt diese Differentialgleichung? Welches ist das Lösungsgebiet? Wie lauten die Anfangsbedingungen? An welchem Rand können sie sinnvollerweise eine Randbedingung stellen und wie lautet diese?

   Zusatz 1: Wenn Diffusion in horizontaler Richtung (also Ausbreitung in Flussrichtung) nicht vernachlässigbar ist, wie ist dann die Gleichung zu modifizieren? Welchen zusätzlichen Materialparameter benötigen Sie? Welche Einheit hat dieser?
   Zusatz 2: Können Sie (wieder für den Fall ohne Diffusion) die Höhe des Films an der Mündung zum Zeitpunkt des Eintreffens des Giftteppichs vorhersagen?