Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Jörg Wensch
Dr. Ute Feldmann

Übungsblatt 8 zur Vorlesung Mathematik II/2

1. Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsgröße, d.h. $X \sim N(0,1)$. Geben Sie die Dichtefunktion der Zufallsgröße $Y = g(X) = X^2$ an.
   Hinweis: Nutzen Sie die Formel zur Dichtetransformation $f_y(y) = \sum_{x:g(x)=y} \frac{1}{|g'(x)|} f_x(x)$ mit $x = g^{-1}(y)$.

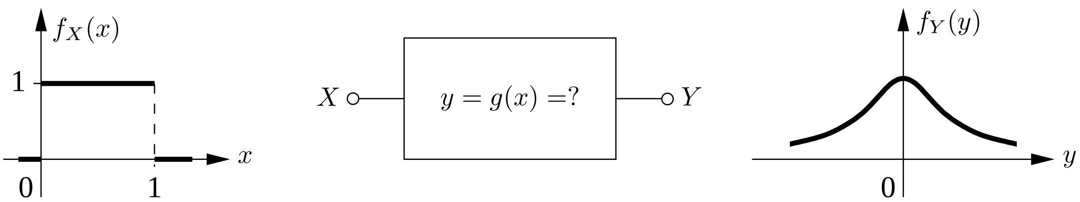
2. Bei der automatischen Abfüllung von 1/2-l-Milchflaschen wird das abgefüllte Flüssigkeitsvolumen V als normalverteilt mit den Parametern $\mu = 500$ (in cm^3) und $\sigma = 5$ (in cm^3) angenommen.
   (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine 1/2-l-Milchflasche weniger als 490 cm^3 enthält?
   (b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Abfüllung die eingefüllte Milch überläuft, wenn das Volumen einer 1/2-l-Milchflasche 510 cm^3 beträgt?
   (c) Wie groß muß die tolerierte Abweichung α (in cm^3) von $\mu = 500$ sein, damit die Wahrscheinlichkeit einer zu leeren oder zu vollen Flasche kleiner als 10% ist.

3. Es nehmen 100 Personen an einer Busreise teil, die mit zwei Bussen mit 60 bzw. 50 Plätzen durchgeführt werden soll. Die beiden Busse starten von zwei verschiedenen Orten aus, und die 100 Reisenden sollen sich zur Abfahrt rein zufällig an einem dieser Orte einfinden. Bestimmen Sie **näherungsweise** die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Plätze in einem der Busse nicht ausreichen. (Tipp: Grenzwertsatz anwenden!)

4. Mit X_n wird die Anzahl der in einer Serie von n unabhängigen Würfen mit einem Würfel auftretenden Würfe mit der Augenzahl „Sechs“ bezeichnet.
   (a) Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung unterliegt X_n?
   (b) Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ermittle man
   $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \geq \varepsilon\right).$$
   (c) Für $\varepsilon = 0.01$ bestimme man eine Mindestanzahl n_0 von unabhängigen Würfen, so dass $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < 0.01\right) \geq 0.5$ gilt, sowohl mit Hilfe der Tschebyscheffschen Ungleichung als auch mittels des zentralen Grenzwertsatzes.

Zusatz: (aus der Aufgabensammlung Systemtheorie III, TU Dresden, Fak. ETIT)
Die von einem Computer über die RANDOM-Funktion ausgegebenen Pseudozufallszahlen können näherungsweise durch eine Zufallsgröße X mit Gleichverteilung im Intervall $(0,1)$ beschrieben werden.

Welche Abbildung g muss man auf diese Zahlen anwenden, um Zufallszahlen Y mit Cauchy-Verteilung mit der Dichte f_Y:
$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{y^2+1}$$
zu erhalten (siehe Bild)?



Überlegen Sie sich, dass die Funktion g zur Realisierung einer solchen Wunschdichte auch durch die Formel $y = g(x) = F_y^{-1}(F_x(x))$ gefunden wird.