Institut für Wissenschaftliches Rechnen

Übungsblatt 5 zur Vorlesung Mathematik II/2

1. Es seien A und B zufällige Ereignisse und $p = P(A)$, $q = P(B)$ und $r = P(A \cup B)$.

   (a) Zeigen Sie, dass für voneinander unabhängige Ereignisse A und B auch A und $\overline{B}$, $\overline{A}$ und B bzw. $\overline{A}$ und $\overline{B}$ Paare unabhängiger Ereignisse sind.

   (b) Welche Beziehung muss für die Wahrscheinlichkeiten p,q,r gelten, damit die Ereignisse A und B unabhängig voneinander sind?

2. Bei einem zufälligen Versuch, als dessen Ergebnis stets genau eines der zufälligen Ereignisse $A_1, \ldots, A_5$ eintritt, wird durch „$X = i$, falls A_i eintritt“ $(i = 1, \ldots, 5)$ eine Zufallsgröße definiert.

   (a) Mit Hilfe der Werte $p_1 = P(A_1), p_2 = P(A_2), p_3 = P(A_3)$ und $p_5 = P(A_5)$ bestimme man die Verteilungsfunktion F_X von X.

   (b) Für $p_1 = \frac{1}{3},\ p_2 = \frac{1}{12},\ p_3 = p_5 = \frac{1}{6}$ stelle man F_X graphisch dar.

3. Zwei Schützen geben unabhängig voneinander jeweils auf ein eigenes Ziel einen Schuß ab. Die Trefferwahrscheinlichkeit des ersten Schützen sei p_1, die des zweiten p_2. Es sei X_1 die Zufallsgröße, die den Wert 1 annimmt, falls der erste Schütze getroffen hat und den Wert 0, falls er nicht traf. Analog sei die Zufallsgröße X_2 für den zweiten Schützen definiert. Geben Sie für die Zufallsgröße $Z = X_1 - X_2$ in einer Tabelle zu allen Werten, die Z annehmen kann, die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an.

4. Es werden wiederholt, unter konstanten Bedingungen und (total) unabhängig voneinander, Schüsse auf ein Ziel abgegeben, wobei die Treffwahrscheinlichkeit $p = 0.8$ betrage. Das Schießen werde so oft durchgeführt, bis der erste Treffer erzielt wird, jedoch höchstens bis zum 4. Schuss.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Ziel getroffen?

   (b) Man bestimme die Verteilungsfunktion F_X der Anzahl X der abgegebenen Schüsse.

   (c) Man berechne $E(X)$ und $\mathrm{var}(X)$.

5. Es sei F_X die Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße X mit $F_X(x) = a + b \arctan x \quad (-\infty < x < \infty)$.

   (a) Welche Werte können die Konstanten a und b annehmen?

   (b) Wie lautet die Dichtefunktion von X?

Zusatz: Bei einem Markov-Automaten sind die Übergänge zwischen Zuständen nicht determiniert wie bei sequentiellen Automaten (siehe VL Systemtheorie I, Kapitel 3) sondern werden durch gewisse **Übergangswahrscheinlichkeiten** beschrieben. Sei p_{ij} die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand j in den Zustand i also die bedingte Wahrscheinlichkeit $p_{ij} = p(z(n+1) = i|z(n) = j)$. Angenommen es gibt 3 Zustände (z.B. Student ist 'Spitze', 'mittel' oder 'hat noch keinen Plan').

Gegeben seien die Startwahrscheinlichkeiten für jeden dieser Zustände zu Beginn des Studiums

$$p(0) = [p_1(0), p_2(0), p_3(0)]' = [1/3, 1/3, 1/3]'$$

und die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten (zum Zustand ein Semester später)

$$P = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/6 & 0 \\ 1/5 & 4/6 & 3/8 \\ 0 & 1/6 & 5/8 \end{pmatrix}$$

(a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß ein Student nach einem Semester im Zustand 'Spitze' ist, $p_1(1)$!

(b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für alle 3 Zustände nach einem Semester $p(1) = [p_1(1), p_2(1), p_3(1)]$ an.

(c) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für alle 3 Zustände nach 10 Semestern?

(d) Die Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten, P, hat immer einen Eigenwert gleich 1. Berechnen Sie den zugehörigen Eigenvektor. Normieren Sie den Eigenvektor so, daß die Summe seiner Komponenten gleich 1 ist. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von (c)!