Fachrichtung Mathematik, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Jörg Wensch
Dr. Ute Feldmann

Wintersemester 2013/14
Woche vom 20.- 24. Januar

13. Übung zur Vorlesung Mathematik für Elektrotechniker etc.

Aufgabe 1

Geben Sie alle Singularitätsstellen und die zugehörigen Residuen der folgenden Funktionen an!

(a) $w = \frac{z+1}{\sin z}$,
(b) $w = \frac{z}{e^z - 1}$ (Achtung: Nenner ist periodisch!)

Aufgabe 2

1. Man berechne mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$I = (C) \int f(z) dz$$

(C sei der positiv durchlaufene Einheitskreis) über folgende Funktionen:

$(a)\ \ f(z) = \dfrac{1}{1+4z^2}$, $\qquad (c)\ \ f(z) = e^z(\cos(\pi z))^{-1}$,

$(b)\ \ f(z) = \tan(\pi z)$, $\qquad (d)\ \ f(z) = \dfrac{z^2+2}{z^4 - \frac{1}{3}z^3}$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Integrale

$$a) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+1}\, dx \qquad b) \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\, dx$$

mit Mitteln der Funktionentheorie.

Aufgabe 4

Man berechne

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itz}}{z - i\,\alpha}\, dz \qquad (\alpha > 0)\ .$$

Der Integrationsweg ist die reelle Achse.

Aufgabe 5

Man berechne $$I = \int_0^\infty \frac{\cos a\,x}{x^2+1}dx \qquad (a > 0)\ .$$

Aufgabe Zusatz

Den Cauchyschen Integralsatz kann man wie folgt schreiben (die Funktion $f(z)$ sei in G holomorph, $z_0 \in G$):

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{\partial G} \underbrace{\frac{f(z)}{z-z_0}dz}_{(*)}$$

Klassifizieren Sie die Singularität von (*) an der Stelle z_0 und geben Sie das Residuum dort an!
Leiten Sie unter Verwendung des Residuensatzes die Cauchysche Integralformel her!

Lösungsvorschlag zur Aufgabe Zusatz

Funktion $f(z)$ in G holomorph, $z_0 \in G \Rightarrow$ $f(z)$ in G regulär und (*) hat dort nur eine Singularität, nämlich z_0: hebbare Singularität für $f(z_0) = 0$ und eine einfache Polstelle sonst. $\mathrm{Res}((*), z_0) = f(z_0)$

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{\partial G} \underbrace{\frac{f(z)}{z-z_0}dz}_{(*)} \overset{\text{Res.satz}}{=} \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} 2\pi\,\mathrm{i}\ \mathrm{Res}((*), z_0) = f(z_0)$$

was zu zeigen war.
Alternativ: Man betrachte die Potenzreihe für $f(z)$ an der Entwicklungsstelle z_0: $f(z) = \sum_0^\infty a_k(z-z_0)^k$.
Die Laurentreihe für (*) ist dann

$$(*) = \frac{1}{z-z_0}\sum_0^\infty a_k(z-z_0)^k = \sum_0^\infty a_k(z-z_0)^{k-1} \overset{k_{neu}=k-1}{=} \sum_{-1}^\infty a_{k+1}(z-z_0)^k \sum_{-1}^\infty c_k(z-z_0)^k$$

mit $c_k = a_{k+1}$, speziell $c_{-1} = a_0 = f(z_0)$. Anwendung des Residuensatzes liefert nun ebenfalls

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} \oint_{\partial G} \underbrace{\frac{f(z)}{z-z_0}dz}_{(*)} \overset{\text{Res.satz}}{=} \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}} 2\pi\,\mathrm{i}\ c_{-1} = a_0 = f(z_0)$$

Ergo: Der Cauchysche Hauptsatz ist ein Spezialfall des Residuensatzes.