

## Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2 (inkl. einiger Lösungen)

### 5. Woche – div, grad, rot in EMF

#### div, grad, rot in elektrischen und magnetischen Feldern

1. Machen Sie sich die Rechenregel  $\text{rot grad } f = \underline{0}$  mit Hilfe des Satzes von Schwarz klar.

**Lösung:**

$$\text{rot grad } f = \text{rot} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{zy} - f_{yz} \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \underline{0}$$

2. Da für jedes Feld  $\underline{F}$  die Regel  $\text{div rot } \underline{F} = 0$  gilt, ist z.B.  $\text{div } \underline{B} = 0$  garantiert, wenn  $\underline{B} = \text{rot } \underline{F}$ .

Formulieren Sie den analogen Satz für  $\text{rot grad } f = \underline{0}$ .

**Lösung:** Da für jedes Feld  $f$  die Regel  $\text{rot grad } f = \underline{0}$  gilt, ist z.B.  $\text{rot } \underline{E} = \underline{0}$  garantiert, wenn  $\underline{E} = \text{grad } f$  bzw. wie in EMF  $\underline{E} = -\text{grad } \varphi$ .

3. **quellenfrei: Divergenz=0 und wirbelfrei: Rotation=0**

Sie lernen in der Lehrveranstaltung *Elektrische und magnetische Felder* das stationäre elektrische Strömungsfeld (Kap. 2), das elektrostatische Feld (Kap. 3) und das allgemeine elektromagnetische Feld (Kap. 4) kennen. Sie finden die Gleichungen des allgemeinen elektromagnetischen Feldes, die Maxwellschen Gleichungen, hier: [Zusammenfassung EMF](#).

- (a) Machen Sie sich zunächst für das allgemeine elektromagnetische Feld klar, für welche der Felder,  $\underline{H}$ ,  $\underline{B}$ ,  $\underline{E}$ ,  $\underline{D}$  immer gilt: Divergenz=0 bzw. Rotation=0.
- (b) Wie ändert sich das Ergebnis von (a) für das stationäre Strömungsfeld, also für  $I = \frac{dQ}{dt} = \text{konstant}$ .
- (c) Wie ändert sich das Ergebnis von (a) für das elektrostatische Feld, also für  $I = \frac{dQ}{dt} = 0$ .

**Lösung:** s. unten in [Blau](#)

Allg. elektromagn. Feld Maxwellsche Gln.	Stationäres Strömungsfeld $I = \frac{dQ}{dt} = \text{konstant}$	Elektrostatisches Feld $I = \frac{dQ}{dt} = 0$
$\text{rot } \underline{H} = \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} + \underline{J}_K$	$\text{rot } \underline{H} = \underline{J}_K$	$\text{rot } \underline{H} = \underline{0}$
$\text{rot } \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$	$\text{rot } \underline{E} = \underline{0}$	$\text{rot } \underline{E} = \underline{0}$
$\text{div } \underline{D} = \rho$	$\text{div } \underline{D} = \rho$	$\text{div } \underline{D} = \rho$
$\text{div } \underline{B} = 0$	$\text{div } \underline{B} = 0$	$\text{div } \underline{B} = 0$

Nutzen Sie 2., um sich klar zumachen, in welchen Fällen (a-c)  $\underline{E} = -\text{grad } \varphi$  gilt und in welchen nicht.

**Lösung:** In den Fällen mit  $\text{rot } \underline{E} = \underline{0}$ , also (b) und (c) kann  $\underline{E}$  ein Potential  $\varphi$  zugeordnet werden. Sobald der Strom nicht konstant ist, also auch das Magnetfeld zeitabhängig ist, ist  $\text{rot } \underline{E} \neq \underline{0}$  und somit  $\underline{E}$  kein Gradientenfeld, Fall (a).

4. Skizzieren Sie die Verschiebungsflussdichte  $\underline{D}$  um eine geladene Kugel. In welchem Gebiet gilt  $\operatorname{div}\underline{D} = 0$  und wo gilt  $\operatorname{div}\underline{D} \neq 0$ .

**Lösung:** Wo keine Ladung  $\rho = 0$ , da  $\operatorname{div}\underline{D} = 0$ , also außerhalb der Kugel.