Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Jörg Wensch
Dr. Ute Feldmann

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2
9. Woche

1. **Schwerpunkt und geometrischer Schwerpunkt**

   (a) Machen Sie sich den Unterschied zwischen dem (Massen-)Schwerpunkt und dem geometrischen Schwerpunkt klar? Für welchen Fall sind beide Schwerpunkte identisch?

   (b) Schreiben Sie die Formeln zur Berechnung beider Schwerpunkte eines 1D, eines 2D und eines 3D-Gebildes auf!

   (c) Wie sieht die Schwerpunktformel für ein Gebilde diskreter (konzentrierter Punkt-)Massen aus?

2. **Kurvenintegral in Polarkoordinaten**
   Beim Kurvenintegral werden die Kurvenpunkte $\mathbf{x}(t)$ als Funktion eines 'Laufparameters' z.B. t beschrieben und nachfolgend $\mathrm{d}\,\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\,\mathrm{d}\,t$ ermittelt sowie für das Kurvenintegral 1. Art $\mathrm{d}\,s = |\,\mathrm{d}\,\mathbf{x}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,\mathrm{d}\,t$. Ermitteln Sie $\mathrm{d}\,s$ (mit Hilfe der Kettenregel) für den Fall, dass die Kurve in Polarkoordinaten beschrieben wird und der 'Laufparameter' $t = \varphi$ ist:

$$\varphi \overset{g}{\mapsto} \begin{pmatrix} r(\varphi) \\ \varphi \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} x(r,\varphi) \\ y(r,\varphi) \end{pmatrix}$$

   (a) Geben Sie die Jacobimatrix der Polarkoordinaten $\frac{\partial f}{\partial(r,\varphi)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}$ an.

   (b) Geben Sie die Jacobimatrix $\frac{\partial g}{\partial \varphi} = \frac{\partial(r(\varphi),\varphi)}{\partial \varphi}$ an.

   (c) Wenden Sie nun die Kettenregel zur Berechnung von $\frac{\partial(x,y)}{\partial \varphi}$ an.

   (d) Ermitteln Sie den Betrag von (c) und $\mathrm{d}\,s = |\,\mathrm{d}\,\mathbf{x}|$ und vergleichen mit Merziger 9.2 bzw. 11.1 (S. 129 bzw. 148, 6. Auflage).

3. **Flache Fläche in krummlinigen Koordinaten**
   Betrachtet wird eine Fläche in der (x,y)-Ebene, die durch krummlinige Koordinaten (u,v) parametrisiert wird:

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Ermitteln Sie entsprechend VL 8/1/5 zunächst allgemein $\mathrm{d}\,\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}\,\mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,v$ bzw. dessen Betrag $\mathrm{d}\,A = |\,\mathrm{d}\,\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} x_u & \dots \\ y_u & \dots \end{vmatrix}$.

   (b) Ermitteln Sie nun $\mathrm{d}\,A$ konkret für Polarkoordinaten $(u,v) = (r,\varphi)$.