Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Jörg Wensch
Dr. Ute Feldmann

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/2

1. Woche

1. **LGS - EW/EV**

   Schreiben Sie die Gleichung $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ als lineares Gleichungssystem in der Form $\mathbf{M} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$.

   Sie wissen (wann ist das Kreuzprodukt = 0 ?), dass das die Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (*)$ hat.

   Denken Sie jetzt einmal 'in linearen Gleichungssystemen': Was wissen Sie durch (*) über den Rang der Koeffizientenmatrix $\mathbf{M}$ (Sie können es auch per Gauß-Algorithmus überprüfen)?
   Und denken Sie jetzt 'in Eigen-werten/-vektoren': Was wissen Sie durch (*) über mindestens einen Eigenwert von $\mathbf{M}$? Bringen Sie 'beides Denken' auf einen Nenner!
   (Man kann über die weiteren Eigenwerte nachdenken z.B. mit VL Ma1 14/2/3.)

2. **kompl. EW - Drehung**

   Betrachtet wird die Abbildung $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Geben Sie das Bild des Einheitsvektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ an und zeichnen Sie beide Vektoren (Einheitsvektor und sein Bild) in ein Koordinatensystem. Wiederholen Sie das Gleiche für den Einheitsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Beschreiben Sie die Wirkung der Matrix/Abbildung (Drehung, Streckung).

   (c) Berechnen Sie nun die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$.

   (d) Geben Sie Betrag und Winkel der Eigenwerte an und vergleichen mit (b).

   (e) Geben Sie Real-/und Imaginärteil der Eigenvektoren an und vergleichen mit VL Ma1 15/2/2+3.

3. **orthogonale Matrix**

   Geben Sie für die Matrix $\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ die Inverse $\mathbf{Q}^{-1}$ (z.B. per VL Ma1 12/3/5), ihre Transponierte $\mathbf{Q}^T$ sowie $\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}$ an. Ist $\mathbf{Q}$ eine orthogonale Matrix (VL Ma1 12/1/6)?

4. **Kegelschnitt Hyperpel**

   Der Graph der Funktion $y = \frac{1}{x} \quad (1)$ wird Hyperbel genannt.
   Bei Kegelschnitten wird jedoch bei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$ von einer Hyperbel gesprochen.
   Überzeugen Sie sich, dass (1) in geeigneten neuen Koordinaten in (2) übergeht.

   (a) Zeichnen Sie den Graphen von (1) in ein kartesisches Koordinatensystem!

   (b) Drehen Sie das Blatt solange, bis der Graph wie eine 'übliche' nach rechts/links geöffnete Hyperbel aussieht, und zeichnen Sie die 'neuen' Achsen für x' und y' ein.

   (c) Blatt zurückdrehen und 'neue' Einheitsvektoren in 'alten' Koordinaten ablesen. Diese werden in die Transformationsmatrix $\mathbf{T}$ als Spalten eingetragen: $\mathbf{x}_{\text{alt}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}_{\text{neu}} \quad (3)$ (VL Ma1 14/2/5).

   (d) Es gilt $\mathbf{x}_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $\mathbf{x}_{\text{neu}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Geben Sie mit Hilfe von (3) x und y als Funktion von x' und y' an.

   (e) Setzen Sie dies in (1) ein und bringen es in die Form $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$. Geben Sie a und b an und vergleichen Sie mit Scheitel und Asymptote der Hyperbel im 'neuen' Koordinatensystem (Blatt wieder drehen).

5. **Wiederholung Kegelschnitte**

   Zeichnen Sie die folgenden Kegelschnitte in ein Koordinatensystem:
   (a) $y = x^2,\ y = -x^2,\ y - 2 = (x-3)^2,$ (b) $x = y^2,\ x = -2y^2,\ x - a = (y-b)^2$
   (c) $x^2 - y^2 = 1,\ y^2 - x^2 = 1,\ (x-1)^2 - (y-2)^2 = 1,\ \frac{x^2}{2^2} - y^2 = 1,\ x^2 - \frac{y^2}{a^2} = 1$ (Asymptote mit zeichnen)
   (d) $x^2 + y^2 = 9,\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 1,\ \frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$