

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1 2. Woche – Logik, Quantoren, Beweise

Logik

- A1** Überprüfen Sie die Regel $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, [F 1.2](#), mit der Wahrheitstafel.
- A2** Beweisen Sie durch elementare Umformungen die sogenannte Kontraposition (bzw. den Umkehrschluss), s. auch Beweisprinzipien [VL 1.3 S. 2](#).

$$p \Rightarrow q = \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$$

- A3** Welche der stets wahren Implikationen aus Aufgabe 1.5 a,b,c ist ein Paradebeispiel für 'aus Falschem folgt Beliebiges', s. [VL 1.2 S. 2](#)?
- A4** Wie viele verschiedene zweistellige Aussageformen $F(p, q)$ gibt es (d.h. wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, die Wahrheitstabelle zu füllen)?
- A5** Stellen Sie (mit gesundem Menschenverstand) je eine Wahrheitstafel für die Aussagen 'p ist hinreichend für q' und für 'q ist notwendig für p' auf!
Hinweis: Aussageform-'Denke': 'p ist hinreichend für q' = $F(p, q)$ kann für verschiedene Belegungen von p und q verschiedene Werte annehmen. Sie sollen diese Werte in der Wahrheitstafel zusammentragen.
Vergleichen Sie anschließend mit der Wahrheitstafel von $p \Rightarrow q$.

Gedanken zur Lösung: Bedeutung 'hinreichend' und 'notwendig':

$$'a \text{ ist hinreichend für } b' = (a \Rightarrow b)$$

$$'b \text{ ist notwendig für } a' = (\bar{b} \Rightarrow \bar{a}) = (a \Rightarrow b) \quad \text{Kontraposition}$$

- A6** [Zusatz] In digitalen Schaltungen sind sogenannte **NAND-Gatter** ($\overline{p \wedge q}$ - Schaltungen) Basisbausteine. Denken Sie sich je eine Schaltung aus (Kopplung von) NAND-Gattern zur Realisierung einer Negation, \bar{p} , und einer Disjunktion, $p \vee q$, aus.

Beweise

- A7** Beweisen Sie die Ungleichung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel (zweier Zahlen)

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

einmal direkt und einmal indirekt.