Institut für Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Jörg Wensch
Dr. Ute Feldmann

Übungen zur Vorlesung Mathematik I/1
4. Woche

1. Welche Eigenschaften {reflexiv, irreflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv } haben folgende Relationen. Falls es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, sind die Äquivalenzklassen zu bestimmen.

   (a) $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$, R_1 sei eine binäre Relation über M, R_2 sei eine binäre Relation über der Potenzmenge von M:
   $R_1 = \{(1, 1), (1, 8), (3, 3), (3, 7), (4, 4), (5, 5), (7, 3), (7, 7), (8, 1), (8, 8), (8, 2), (2, 2), (2, 8), (1, 2), (2, 1)\}$,
   $R_2 = \{(X, Y) : X \subset M \wedge Y = M \setminus X\}$.

   (b) Z sei die Menge der ganzen Zahlen, R_3 und R_4 seien binäre Relationen über Z, R_5 sei eine binäre Relation über $Z \times Z$:
   $R_3 = \{(x, y) : x + y \text{ gerade}\}$, $R_4 = \{(x, y) : x + y \text{ ungerade}\}$, $R_5 = \{((a, b), (c, d)) : a \cdot d = b \cdot c\}$.
   Ändert sich etwas, wenn aus Z die Zahl 0 ausgeschlossen wird ?

   (c) Es seien u und v Felder eines Schachbretts. Es gelte $(u, v) \in R_6$ genau dann, wenn ein Läufer von Feld u auf das Feld v gelangen kann, wobei mehrere Züge zugelassen sind. Was ändert sich, wenn nur genau ein Zug zugelassen ist?

2. Geben Sie die Restklassen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (= mögliche Reste bei Division durch n) für $n = 4$ und $n = 5$ an.

   (a) Geben Sie die Additions- und die Multiplikationstabelle für die beiden Operationen $'+'$ und $'\circ'$ innerhalb dieser Restklassen an. Z.B. $2 + 3 \ \equiv 1 \pmod 4$ und $2 \circ 2 \ \equiv 0 \pmod 4$.

+	0	1	2	3
0				
1				
2				1
3				

∘	0	1	2	3
0				
1				
2			0	
3				

   (b) Überzeugen Sie sich anhand der Tabellen in (a), dass $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

   (c) Überzeugen Sie sich, dass $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ein Körper ist.
   Hinweis: Eine spezielle Eigenschaft der Multiplikationstabelle für n=Primzahl ist, dass jeder Rest in jeder Spalte/Zeile genau einmal auftritt.

3. Veranschaulichen Sie sich in der komplexen Zahlenebene den Begriff des sogenannten rotierenden Zeigers (wird im Fach Dynamische Netzwerke, 3. Semester verwendet):

$$z(t) = e^{i\omega t}$$

   mit $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ für $t = 0, \frac{T}{8}, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$.
   (T ist die Periodendauer, $f = \frac{1}{T}$ die Frequenz und ω die sogenannte Kreisfrequenz).
   Stellen Sie Real- und Imaginärteil $\mathrm{Re}(z(t)), \mathrm{Im}(z(t))$ für $t \in [0, 2T]$ dar.