Einführung in die Grundlagen der Physik Freier Elektronen Laser

Klaus Steiniger
E-Mail: Klaus.Steiniger@mailbox.tu-dresden.de

Erstellt am 31. Juli 2009

Zusammenfassung

Im Text werden zunächst kurz die Grundlagen der relativistischen Mechanik im Elektro-Magnetischen Potential wiederholt um dann damit die Elektronbewegungsgleichung in einem kombinierten Feld des Freie Elektronen Lasers und Strahlung zu gewinnen.
Danach werden diese für das Small Signal Gain Regime störungstheoretisch gelöst und der Gain als Funktion des Detunings ermittelt.

1 Elektronbewegungsgleichung

- Lagrangefunktion eines relativistischen Teilchens mit Ruhemasse m_0, Geschwindigkeit $\boldsymbol{\beta}$ und Ladung q im Elektromagnetischen Potential $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{\beta},t) = -m_0c^2\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2} + q\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$$

- Kanonischer Impuls $\boldsymbol{\wp}$

$$\boldsymbol{\wp} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{\beta}} = \gamma m_0 c\boldsymbol{\beta} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}$$

- Hamiltonfunktion $H(\boldsymbol{p}) = E = [\boldsymbol{p}^2c^2 + {m_0}^2c^4]^{1/2} = \gamma m_0 c^2$

$$H(\boldsymbol{\wp},\boldsymbol{r},t) = [(\boldsymbol{\wp} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A})^2c^2 + {m_0}^2c^4]^{1/2}$$

- Elektromagnetisches Potential beinhaltet Undulatorpotential ($\nabla\times\boldsymbol{A}_\mathrm{u}(z) = \boldsymbol{B}_\mathrm{u}(z)$) und Pot. der Strahlung ($\boldsymbol{E}_\mathrm{r}(z,t) = -c^{-1}\partial\boldsymbol{A}_\mathrm{r}(z,t)/\partial t$)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(z,t) &= \boldsymbol{A}_\mathrm{u}(z) + \boldsymbol{A}_\mathrm{r}(z,t)\\ \text{wobei}\qquad \boldsymbol{A}_\mathrm{u}(z) &= \frac{B_\mathrm{u}}{k_\mathrm{u}}\left(\cos[k_\mathrm{u}z]\mathbf{e}_\mathrm{x} + \sin[k_\mathrm{u}z]\mathbf{e}_\mathrm{y}\right)\\ \boldsymbol{A}_\mathrm{r}(z,t) &= -\frac{E_\mathrm{r}(z,t)}{k_\mathrm{r}}\left(-\cos[k_\mathrm{r}(z-ct)]\mathbf{e}_\mathrm{x} + \sin[k_\mathrm{r}(z-ct)]\mathbf{e}_\mathrm{y}\right)\end{aligned}$$

Es soll gelten das sich $E_\mathrm{r}(z,t)$ nur langsam mit der Zeit ändert. Das heißt, Zeitableitungen $\dot{E}_\mathrm{r}(z,t)$ sind vernachlässigbar.

- Als Maß für den Energiegewinn des Strahlungsfeldes dient die Energieänderung der Elektronen

$$\dot{\gamma} = \frac{q\boldsymbol{E}_\mathrm{r}\boldsymbol{\beta}}{m_0c}$$

mit

$$\begin{aligned}\beta_\mathrm{x} &= -\frac{q}{m\gamma c^2}\left(A_\mathrm{u,x} + A_\mathrm{r,x}\right)\\ \beta_\mathrm{y} &= -\frac{q}{m\gamma c^2}\left(A_\mathrm{u,y} + A_\mathrm{r,y}\right)\end{aligned}$$

aus den Hamiltonschen Gleichungen ($\dot{\wp}_i = -\partial H/\partial q_i$) und der Anfangsbedingung das es keine Transversalimpulse vor dem Einflug gibt ($\wp_{i,0} = 0$). Es folgt

$$\dot{\gamma} = -\frac{qE_\mathrm{r}}{\gamma m_0 c}\,(K \sin\theta) \qquad \text{mit} \quad \theta = (k_\mathrm{u} + k_\mathrm{r})z - k_\mathrm{r} ct$$

$$K = \frac{qB_\mathrm{u}}{mc^2 k_\mathrm{u}}$$

K ist der Undulator-Parameter und repräsentiert die Geometrie des Undulators.

- Die Phase θ gibt den Ort des Elektrons, relativ zur ponderomotorischen Welle, an. Diese ponderomotorische Welle ist dadurch ausgezeichnet, dass Elekronen die sich mit ihr bewegen im Mittel weder Energie ans Feld abgeben, noch daraus gewinnen. Zur Veranschaulichung:

  1. mitbewegen bedeutet:

  $$0 \overset{!}{=} \dot{\theta} = c(k_\mathrm{u} + k_\mathrm{r}) \left[\beta_\mathrm{z} - \frac{k_\mathrm{r}}{k_\mathrm{u} + k_\mathrm{r}}\right]$$

  $$\Rightarrow \qquad \beta_\mathrm{z} = \frac{k_\mathrm{r}}{k_\mathrm{u} + k_\mathrm{r}} \tag{$*$}$$

  2. $z = c\beta_\mathrm{z} t$ in θ einsetzen

  $$\theta = (k_\mathrm{u} + k_\mathrm{r}) \frac{k_\mathrm{r}}{k_\mathrm{u} + k_\mathrm{r}} ct - k_\mathrm{r} ct = 0$$

  3. und damit

  $$\dot{\gamma} = 0$$

  Das β_z aus ($*$) erfüllt also eine „Resonanzbedingung"

- Allgemein erhält man β_z einfach aus

  $$\beta_\mathrm{z} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{{\beta_\mathrm{x}}^2 + {\beta_\mathrm{y}}^2}{2}$$

  $$= 1 - \frac{1 + K^2 + {K_\mathrm{r}}^2 - K K_\mathrm{r} \cos\theta}{2\gamma^2}$$

  $$\text{mit} \qquad K_\mathrm{r} = \frac{qE_\mathrm{r}}{mc^2 k_\mathrm{r}}$$

- Es ist nützlich ein γ_R einzuführen für das $\beta_\mathrm{z}(\gamma_\mathrm{R})$ die Resonanzbedingung ($*$) erfüllt und die Gleichung für $\dot{\gamma}$ auf $\eta = 1 - \gamma/\gamma_\mathrm{R}$ umzuschreiben. η entspricht der Energie des Elektrons in Einheiten der Resonanzenergie.

  $$\gamma_\mathrm{R} = \frac{k_\mathrm{r}(1 + K^2)}{2k_\mathrm{u}}$$

  Dies ist erfüllt für $K_\mathrm{r} \ll K$. Diese Bedingung bedeutet

  $$\frac{K_\mathrm{r}}{K} = \frac{E_\mathrm{r}\lambda}{B_\mathrm{u}\lambda_\mathrm{u}} \sim \frac{1}{\gamma^2} \ll 1$$

  Dies ist üblicherweise erfüllt. Die letzte Relation ist aus der Bedingung für kohärente Verstärkung entnommen.

  $$\lambda = \frac{\lambda_\mathrm{u}}{2\gamma^2}(1 + K^2)$$

- Dann wird $\dot{\eta} = \dot{\gamma}/\gamma_\mathrm{R}$. Unter den Annahmen, dass die Elektronen mit $\gamma \approx \gamma_\mathrm{R}$ eingeschossen werden, die Energieänderung klein ist sowie das Strahlungsfeld schwächer als das Undulatorfeld, vereinfachen sich die FEL-DGL zu

  $$\dot{\eta} = -\Omega^2 \sin\theta \qquad \text{wobei} \quad \Omega^2 = \frac{qKE_\mathrm{r}}{mc{\gamma_\mathrm{R}}^2}$$

  $$\dot{\theta} = 2ck_\mathrm{u}\eta$$

- Für kleine θ lassen sich die zwei FEL-DGL umschreiben zu einer Pendelgleichung

$$\ddot{\theta} + 2ck_{\mathrm{u}}\Omega^2\theta = 0$$

Das Elektron gleitet also ständig in der Phase. Die Ruhelage stellt die ponderomotive Welle dar.

2 Small Signal Gain

- Für eine Gleichung die den Energieübertrag genauer beschreibt, löst man das DGL-System mit Störungsrechnung. Δ beschreibt dabei die Abweichung der Einschussenergie von der Resonanzenergie in Einheiten der Resonanzenergie und ist dabei soetwas wie die Nullte Ordnung der Störungstheorie.

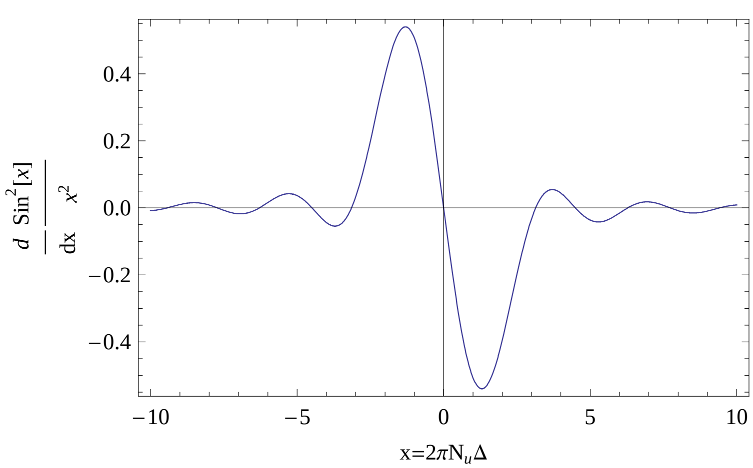
$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 \\ \eta &= \Delta + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 \\ \Omega^2 &= \varepsilon\Omega^2 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse für θ sind abhängig von einer Integrationskonstante (Phase) θ_{in} die eine Abweichung von der pond.-Welle bereits vor dem Eintritt in den Undulator beschreibt. Man nimmt an, dass alle Elektronen in einem Paket gleichmäßig über diese Ausgangsphase verteilt sind. Darum mittelt man die Ergebnisse über θ_{in} und beschreibt die gesamte relative Energieänderungen des Pakets als $\delta\eta_{\mathrm{Gesamt}} = N_{\mathrm{e}} \langle\eta_2\rangle_{\theta_{\mathrm{in}}}$. N_{e} ist die Zahl der Elektronen in einem Bunch und $\langle\cdot\rangle_{\theta_{\mathrm{in}}}$ stellt die Mittelung, also $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta_{\mathrm{in}}$, dar.

- Die erste Korrektur zu Δ ist $\langle\eta_2\rangle_{\theta_{\mathrm{in}}}$ mit

$$\langle\eta_2\rangle_{\theta_{\mathrm{in}}} \propto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)$$
$$\text{mit} \qquad x = 2\pi N_{\mathrm{u}}\Delta$$

Der Energieverlust der Elektronen ist demnach eine antisymmetrische Funktion von Δ mit einem Maximum bei $x = 1.30$.



Literatur

[1] J.B. Murphy, C. Pellegrini; *Handbook of Free Electron Lasers*, North Holland