

# Vortrag im Hauptseminar

## Entwicklung des Teilcheninhalts des Universums

Klaus Steiniger

22. April 2009

# Gliederung

## Einführung

- Motivation

- Mathematischer Werkzeugkasten

## Abhängigkeit der Teilchendichte in verschiedenen Epochen

- Frühes Universum

- Danach

  - Liouville'scher Satz

  - Boltzmann Gleichung

  - Anwendung

## Zusammenfassung

# Gliederung

## Einführung

Motivation

Mathematischer Werkzeugkasten

## Abhängigkeit der Teilchendichte in verschiedenen Epochen

Frühes Universum

Danach

Liouville'scher Satz

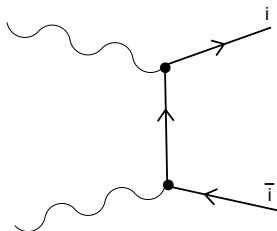
Boltzmann Gleichung

Anwendung

## Zusammenfassung

# Rahmenbedingungen

- ▶ Alle möglichen Teilchen entstehen durch Prozesse  $\gamma\gamma \rightarrow i + \bar{i}$



- ▶ Grundannahme:
  - Frühes Universum ist im thermodynamischen Gleichgewicht
  - $\Rightarrow$  Paarerzeugung genau so häufig wie Paarvernichtung, d.h.  
 $\langle N \rangle \equiv N = \text{const.}$
- ▶ Gleichgewichtsthermodynamik (Quantenstatistik) ist ideale Beschreibung
- ▶ Teilchensorten sind ideales Quantengas

Ziel: Abhängigkeit der einzelnen Häufigkeiten in verschiedenen Epochen

# Gliederung

## Einführung

Motivation

Mathematischer Werkzeugkasten

## Abhängigkeit der Teilchendichte in verschiedenen Epochen

Frühes Universum

Danach

Liouville'scher Satz

Boltzmann Gleichung

Anwendung

## Zusammenfassung

# Erinnerung an Quantenstatistik

Teilchenzahl  $N = \sum_k \bar{n}_k$   $\bar{n}_k$  - Mittlere Bestetzungszahl des Zustandes  $k$

Energie  $E = \sum_k \bar{n}_k \cdot \varepsilon_k$   $\varepsilon_k$  - Einteilchenenergie des Zustandes  $k$

Mittlere Besetzungszahlen:

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{(\varepsilon_k - \mu)/T} - \eta} \text{ wobei } \eta = \begin{cases} +1 & \text{Bose - Einstein} \\ 0 & \text{Maxwell - Boltzmann} \\ -1 & \text{Fermi - Dirac} \end{cases}$$

# Erinnerung an Quantenstatistik

Teilchenzahl  $N = \sum_k \bar{n}_k$   $\bar{n}_k$  - Mittlere Bestetzungszahl des Zustandes  $k$

Energie  $E = \sum_k \bar{n}_k \cdot \varepsilon_k$   $\varepsilon_k$  - Einteilchenenergie des Zustandes  $k$

Kontinuumslimit:

$$\sum_k \dots \longrightarrow \frac{gV}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3p \dots \xrightarrow{\varepsilon = \varepsilon(|\vec{p}|^2)} \frac{gV}{2\pi^2} \int_m^{\infty} d\varepsilon \varepsilon (\varepsilon^2 - m^2)^{1/2} \dots$$

mit:

$$\varepsilon^2 = p^2 + m^2$$

$g$  - Anzahl der inneren Freiheitsgrade

# Erinnerung an Quantenstatistik

$$n = \frac{N}{V} = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty d\varepsilon \, \varepsilon (\varepsilon^2 - m^2)^{1/2} f(\varepsilon, t)$$
$$\rho = \frac{E}{V} = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty d\varepsilon \, \varepsilon^2 (\varepsilon^2 - m^2)^{1/2} f(\varepsilon, t)$$

wobei  $\bar{n}_k(\varepsilon_k, T) \rightarrow f(\varepsilon, T(t))$

# Gliederung

## Einführung

Motivation

Mathematischer Werkzeugkasten

## Abhängigkeit der Teilchendichte in verschiedenen Epochen

**Frühes Universum**

Danach

Liouville'scher Satz

Boltzmann Gleichung

Anwendung

## Zusammenfassung

# Abhängigkeiten für relativistische und nicht relativistische Teilchenarten

$$n = \frac{N}{V} = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty d\varepsilon \varepsilon (\varepsilon^2 - m^2)^{1/2} f(\varepsilon, t)$$

$$\rho = \frac{E}{V} = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty d\varepsilon \varepsilon^2 (\varepsilon^2 - m^2)^{1/2} f(\varepsilon, t)$$

Für relativistische Teilchenarten ( $m \ll T$  und  $\mu \ll T$ ) ergibt sich:

$$n_{\text{EQ}}(T) = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & \text{(Bose)} \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & \text{(Fermi)} \end{cases} \quad \zeta(3) = 1.20206...$$

Und nicht-relativistische Arten ( $m - \mu \gg T$ ):

$$n_{\text{EQ}}(T) = g \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-(m-\mu)/T} \text{ (Bose und Fermi)}$$

# Abhängigkeiten für relativistische und nicht relativistische Teilchenarten

$$n = \frac{N}{V} = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty d\varepsilon \varepsilon (\varepsilon^2 - m^2)^{1/2} f(\varepsilon, t)$$

$$\rho = \frac{E}{V} = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty d\varepsilon \varepsilon^2 (\varepsilon^2 - m^2)^{1/2} f(\varepsilon, t)$$

Für relativistische Teilchenarten ( $m \ll T$  und  $\mu \ll T$ ) ergibt sich:

$$n_{\text{EQ}}(T) = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & \text{(Bose)} \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & \text{(Fermi)} \end{cases} \quad \zeta(3) = 1.20206...$$

Und nicht-relativistische Arten ( $m - \mu \gg T$ ):

$$n_{\text{EQ}}(T) = g \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-(m-\mu)/T} \text{ (Bose und Fermi)}$$

# Abhängigkeiten für relativistische und nicht relativistische Teilchenarten

$$n = \frac{N}{V} = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty d\varepsilon \varepsilon (\varepsilon^2 - m^2)^{1/2} f(\varepsilon, t)$$

$$\rho = \frac{E}{V} = \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty d\varepsilon \varepsilon^2 (\varepsilon^2 - m^2)^{1/2} f(\varepsilon, t)$$

Für relativistische Teilchenarten ( $m \ll T$  und  $\mu \ll T$ ) ergibt sich:

$$n_{\text{EQ}}(T) = \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & \text{(Bose)} \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & \text{(Fermi)} \end{cases} \quad \zeta(3) = 1.20206...$$

Und nicht-relativistische Arten ( $m - \mu \gg T$ ):

$$n_{\text{EQ}}(T) = g \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-(m-\mu)/T} \text{(Bose und Fermi)}$$

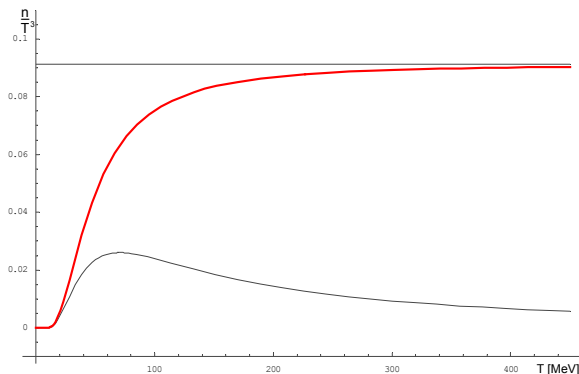
# Nocheinmal

relativistisch

$$n_{\text{EQ}} \propto T^3$$

nicht-relativistisch

$$n_{\text{EQ}} \propto (mT)^{3/2} e^{-m/T}$$



für Muon mit  $m = 105.6$  MeV

Interpretation:

Anzahl der schweren Teilchen nimmt exponential ab mit fallender Temperatur

# Gliederung

## Einführung

Motivation

Mathematischer Werkzeugkasten

## Abhängigkeit der Teilchendichte in verschiedenen Epochen

Frühes Universum

Danach

Liouville'scher Satz

Boltzmann Gleichung

Anwendung

## Zusammenfassung

# Problemstellung

Wir haben:

Gleichung die  $n(T)$  für thermisches Gleichgewicht beschreibt, aber

- ▶ thermisches Gleichgewicht  $\Leftrightarrow$  Reaktionsrate  $\Gamma = \sigma \cdot L$  ist groß (typischer Gleichgewichtserhaltender Prozess:  $\bar{\nu}\nu \rightarrow e^+e^-$ )
- ▶  $\Gamma \propto L \propto n(t) \propto a(t)^{-3}$  ist abhängig von der Expansion
- ▶ thermisches Gleichgewicht wenn  $\Gamma \geq H(t)$   
( $H(t) = \dot{a}/a$  - Hubbleparameter)

Der Fall  $\Gamma \ll H$  (keine Reaktionen) einfach:

- ▶  $N$  ist erhalten
- ▶  $n(t)$  fällt mit  $a(t)^{-3}$  (werden wir als Zwischenergebnis erhalten)

Preisfrage: Was passiert im Übergang?

# Problemstellung

Wir haben:

Gleichung die  $n(T)$  für thermisches Gleichgewicht beschreibt, aber

- ▶ thermisches Gleichgewicht  $\Leftrightarrow$  Reaktionsrate  $\Gamma = \sigma \cdot L$  ist groß (typischer Gleichgewichtserhaltender Prozess:  $\bar{\nu}\nu \rightarrow e^+e^-$ )
- ▶  $\Gamma \propto L \propto n(t) \propto a(t)^{-3}$  ist abhängig von der Expansion
- ▶ thermisches Gleichgewicht wenn  $\Gamma \geq H(t)$   
( $H(t) = \dot{a}/a$  - Hubbleparameter)

Der Fall  $\Gamma \ll H$  (keine Reaktionen) einfach:

- ▶  $N$  ist erhalten
- ▶  $n(t)$  fällt mit  $a(t)^{-3}$  (werden wir als Zwischenergebnis erhalten)

Preisfrage: Was passiert im Übergang?

# Problemstellung

Wir haben:

Gleichung die  $n(T)$  für thermisches Gleichgewicht beschreibt, aber

- ▶ thermisches Gleichgewicht  $\Leftrightarrow$  Reaktionsrate  $\Gamma = \sigma \cdot L$  ist groß (typischer Gleichgewichtserhaltender Prozess:  $\bar{\nu}\nu \rightarrow e^+e^-$ )
- ▶  $\Gamma \propto L \propto n(t) \propto a(t)^{-3}$  ist abhängig von der Expansion
- ▶ thermisches Gleichgewicht wenn  $\Gamma \geq H(t)$  ( $H(t) = \dot{a}/a$  - Hubbleparameter)

Der Fall  $\Gamma \ll H$  (keine Reaktionen) einfach:

- ▶  $N$  ist erhalten
- ▶  $n(t)$  fällt mit  $a(t)^{-3}$  (werden wir als Zwischenergebnis erhalten)

Preisfrage: Was passiert im Übergang?

# Problemstellung

Wir haben:

Gleichung die  $n(T)$  für thermisches Gleichgewicht beschreibt, aber

- ▶ thermisches Gleichgewicht  $\Leftrightarrow$  Reaktionsrate  $\Gamma = \sigma \cdot L$  ist groß (typischer Gleichgewichtserhaltender Prozess:  $\bar{\nu}\nu \rightarrow e^+e^-$ )
- ▶  $\Gamma \propto L \propto n(t) \propto a(t)^{-3}$  ist abhängig von der Expansion
- ▶ thermisches Gleichgewicht wenn  $\Gamma \geq H(t)$  ( $H(t) = \dot{a}/a$  - Hubbleparameter)

Der Fall  $\Gamma \ll H$  (keine Reaktionen) einfach:

- ▶  $N$  ist erhalten
- ▶  $n(t)$  fällt mit  $a(t)^{-3}$  (werden wir als Zwischenergebnis erhalten)

Preisfrage: Was passiert im Übergang?

# Problemstellung

Wir haben:

Gleichung die  $n(T)$  für thermisches Gleichgewicht beschreibt, aber

- ▶ thermisches Gleichgewicht  $\Leftrightarrow$  Reaktionsrate  $\Gamma = \sigma \cdot L$  ist groß (typischer Gleichgewichtserhaltender Prozess:  $\bar{\nu}\nu \rightarrow e^+e^-$ )
- ▶  $\Gamma \propto L \propto n(t) \propto a(t)^{-3}$  ist abhängig von der Expansion
- ▶ thermisches Gleichgewicht wenn  $\Gamma \geq H(t)$   
( $H(t) = \dot{a}/a$  - Hubbleparameter)

Der Fall  $\Gamma \ll H$  (keine Reaktionen) einfach:

- ▶  $N$  ist erhalten
- ▶  $n(t)$  fällt mit  $a(t)^{-3}$  (werden wir als Zwischenergebnis erhalten)

Preisfrage: Was passiert im Übergang?

# Fahrplan

- ▶ Liouville'scher Satz für Bewegungsgleichung von  $f(\varepsilon, t)$  ohne Erzeugung und Vernichtung von Teilchen (durch inelastische Streuung)
- ▶ Erzeugung und Vernichtung einbauen
- ▶ Diskussion

# Liouville'scher Satz

'Phasenraumdicke ist inkompressibel!'

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt}f = \frac{\partial}{\partial t}f + \{f, H\} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f = \hat{\mathbf{L}}_{\text{NR}}[f]$$

Die relativistische Verallgemeinerung

$$\hat{\mathbf{L}} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha}$$

Mit Robertson-Walker Metrik und  $f = f(\varepsilon, t)$  vereinfacht sich das zu:

$$\hat{\mathbf{L}}[f(\varepsilon, t)] = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} f(\varepsilon, t) - \frac{\dot{a}}{a} |\mathbf{p}|^2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\varepsilon, t) \stackrel{!}{=} 0$$

# Liouville'scher Satz

'Phasenraumdicke ist inkompressibel!'

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt} f = \frac{\partial}{\partial t} f + \{f, H\} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f = \hat{\mathbf{L}}_{\text{NR}}[f]$$

Die relativistische Verallgemeinerung

$$\hat{\mathbf{L}} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha}$$

Mit Robertson-Walker Metrik und  $f = f(\varepsilon, t)$  vereinfacht sich das zu:

$$\hat{\mathbf{L}}[f(\varepsilon, t)] = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} f(\varepsilon, t) - \frac{\dot{a}}{a} |\mathbf{p}|^2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\varepsilon, t) \stackrel{!}{=} 0$$

# Liouville'scher Satz

'Phasenraumdicke ist inkompressibel!'

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{dt}f = \frac{\partial}{\partial t}f + \{f, H\} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \right) f = \hat{\mathbf{L}}_{\text{NR}}[f]$$

Die relativistische Verallgemeinerung

$$\hat{\mathbf{L}} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha}$$

Mit Robertson-Walker Metrik und  $f = f(\varepsilon, t)$  vereinfacht sich das zu:

$$\hat{\mathbf{L}}[f(\varepsilon, t)] = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} f(\varepsilon, t) - \frac{\dot{a}}{a} |\mathbf{p}|^2 \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\varepsilon, t) \stackrel{!}{=} 0$$

# Boltzmann Gleichung ohne Erzeugung und Vernichtung

Integrieren

$$\begin{aligned} & \frac{g}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3p \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(\varepsilon, t) - \frac{\dot{a}}{a} \frac{p^2(\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\varepsilon, t) \right] \\ &= \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty d\varepsilon \cdot \varepsilon (\varepsilon^2 - m^2)^{1/2} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(\varepsilon, t) - \frac{\dot{a}}{a} \frac{(\varepsilon^2 - m^2)}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\varepsilon, t) \right] \end{aligned}$$

liefert

$$\frac{d}{dt} n(t) + 3 \frac{\dot{a}}{a} n(t) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (n(t) \cdot a^3(t)) \stackrel{!}{=} 0$$

Beschreibt die Entwicklung der Teilchendichte nur aufgrund der Ausdehnung des Universums.

# Boltzmann Gleichung ohne Erzeugung und Vernichtung

Integrieren

$$\begin{aligned} & \frac{g}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3p \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(\varepsilon, t) - \frac{\dot{a}}{a} \frac{p^2(\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\varepsilon, t) \right] \\ &= \frac{g}{2\pi^2} \int_m^\infty d\varepsilon \cdot \varepsilon (\varepsilon^2 - m^2)^{1/2} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(\varepsilon, t) - \frac{\dot{a}}{a} \frac{(\varepsilon^2 - m^2)}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(\varepsilon, t) \right] \end{aligned}$$

liefert

$$\frac{d}{dt} n(t) + 3 \frac{\dot{a}}{a} n(t) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (n(t) \cdot a^3(t)) \stackrel{!}{=} 0$$

Beschreibt die Entwicklung der Teilchendichte nur aufgrund der Ausdehnung des Universums.

# Entwicklung der Teilchendichte ohne Streuung

$$\frac{d}{dt}(n(t) \cdot a^3(t)) \Rightarrow n(t) = n(a_0) \cdot \left(\frac{a_0}{a}\right)^3$$

- ▶ Die Teilchendichte fällt mit  $1/a^3$
- ▶ Entspricht dem Verhalten der Teilchendichten heute
- ▶ ohne Erzeugung in Sternen...

# Berücksichtigung inelastischer Streuung

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) - c(ij \rightarrow kl) + c(kl \rightarrow ij)$$

Annahmen:

- ▶  $c(ij \rightarrow kl) \equiv n_i \cdot n_j \langle \sigma_{ij \rightarrow kl} v_{ij} \rangle$
- ▶ Nur stabile Teilchen  $\rightarrow i\bar{i} \rightleftharpoons k\bar{k}$
- ▶ im thermischen GG ist Paarzeugung genauso häufig wie Paarvernichtung  
 $c_{\text{EQ}}(i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}) = c_{\text{EQ}}(k\bar{k} \rightarrow i\bar{i})$   
 $n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle_{\text{EQ}} \stackrel{!}{=} n_{k,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{k},\text{EQ}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle_{\text{EQ}}$
- ▶  $\langle \sigma v \rangle_{\text{EQ}} \cong \langle \sigma v \rangle$  und Spezies  $k$  ist im GG mit restlichem Gas  
 $\Rightarrow n_k n_{\bar{k}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle = n_{k,\text{EQ}} n_{\bar{k},\text{EQ}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle_{\text{EQ}}$

Es wird:

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) + (n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} - n_i n_{\bar{i}}) \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle$$

# Berücksichtigung inelastischer Streuung

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) - c(ij \rightarrow kl) + c(kl \rightarrow ij)$$

Annahmen:

- ▶  $c(ij \rightarrow kl) \equiv n_i \cdot n_j \langle \sigma_{ij \rightarrow kl} v_{ij} \rangle$
- ▶ Nur stabile Teilchen  $\rightarrow i\bar{i} \rightleftharpoons k\bar{k}$
- ▶ im thermischen GG ist Paarzeugung genauso häufig wie Paarvernichtung  
 $c_{\text{EQ}}(i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}) = c_{\text{EQ}}(k\bar{k} \rightarrow i\bar{i})$   
 $n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle_{\text{EQ}} \stackrel{!}{=} n_{k,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{k},\text{EQ}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle_{\text{EQ}}$
- ▶  $\langle \sigma v \rangle_{\text{EQ}} \cong \langle \sigma v \rangle$  und Spezies  $k$  ist im GG mit restlichem Gas  
 $\Rightarrow n_k n_{\bar{k}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle = n_{k,\text{EQ}} n_{\bar{k},\text{EQ}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle_{\text{EQ}}$

Es wird:

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) + (n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} - n_i n_{\bar{i}}) \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle$$

# Berücksichtigung inelastischer Streuung

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) - c(ij \rightarrow kl) + c(kl \rightarrow ij)$$

Annahmen:

- ▶  $c(ij \rightarrow kl) \equiv n_i \cdot n_j \langle \sigma_{ij \rightarrow kl} v_{ij} \rangle$
- ▶ Nur stabile Teilchen  $\rightarrow i\bar{i} \rightleftharpoons k\bar{k}$
- ▶ im thermischen GG ist Paarzeugung genauso häufig wie Paarvernichtung  
 $c_{\text{EQ}}(i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}) = c_{\text{EQ}}(k\bar{k} \rightarrow i\bar{i})$   
 $n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle_{\text{EQ}} \stackrel{!}{=} n_{k,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{k},\text{EQ}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle_{\text{EQ}}$
- ▶  $\langle \sigma v \rangle_{\text{EQ}} \cong \langle \sigma v \rangle$  und Spezies  $k$  ist im GG mit restlichem Gas  
 $\Rightarrow n_k n_{\bar{k}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle = n_{k,\text{EQ}} n_{\bar{k},\text{EQ}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle_{\text{EQ}}$

Es wird:

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) + (n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} - n_i n_{\bar{i}}) \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle$$

# Berücksichtigung inelastischer Streuung

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) - c(ij \rightarrow kl) + c(kl \rightarrow ij)$$

Annahmen:

- ▶  $c(ij \rightarrow kl) \equiv n_i \cdot n_j \langle \sigma_{ij \rightarrow kl} v_{ij} \rangle$
- ▶ Nur stabile Teilchen  $\rightarrow i\bar{i} \rightleftharpoons k\bar{k}$
- ▶ im thermischen GG ist Paarzeugung genauso häufig wie Paarvernichtung

$$c_{\text{EQ}}(i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}) = c_{\text{EQ}}(k\bar{k} \rightarrow i\bar{i})$$

$$n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle_{\text{EQ}} \stackrel{!}{=} n_{k,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{k},\text{EQ}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle_{\text{EQ}}$$

- ▶  $\langle \sigma v \rangle_{\text{EQ}} \cong \langle \sigma v \rangle$  und Spezies  $k$  ist im GG mit restlichem Gas

$$\Rightarrow n_k n_{\bar{k}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle = n_{k,\text{EQ}} n_{\bar{k},\text{EQ}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle_{\text{EQ}}$$

Es wird:

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) + (n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} - n_i n_{\bar{i}}) \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle$$

# Berücksichtigung inelastischer Streuung

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) - c(ij \rightarrow kl) + c(kl \rightarrow ij)$$

Annahmen:

- ▶  $c(ij \rightarrow kl) \equiv n_i \cdot n_j \langle \sigma_{ij \rightarrow kl} v_{ij} \rangle$
  - ▶ Nur stabile Teilchen  $\rightarrow i\bar{i} \rightleftharpoons k\bar{k}$
  - ▶ im thermischen GG ist Paarzeugung genauso häufig wie Paarvernichtung  
 $c_{\text{EQ}}(i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}) = c_{\text{EQ}}(k\bar{k} \rightarrow i\bar{i})$   
 $n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle_{\text{EQ}} \stackrel{!}{=} n_{k,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{k},\text{EQ}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle_{\text{EQ}}$
  - ▶  $\langle \sigma v \rangle_{\text{EQ}} \cong \langle \sigma v \rangle$  und Spezies  $k$  ist im GG mit restlichem Gas
- $$\Rightarrow n_k n_{\bar{k}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle = n_{k,\text{EQ}} n_{\bar{k},\text{EQ}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle_{\text{EQ}}$$

Es wird:

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) + (n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} - n_i n_{\bar{i}}) \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle$$

# Berücksichtigung inelastischer Streuung

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) - c(ij \rightarrow kl) + c(kl \rightarrow ij)$$

Annahmen:

- ▶  $c(ij \rightarrow kl) \equiv n_i \cdot n_j \langle \sigma_{ij \rightarrow kl} v_{ij} \rangle$
  - ▶ Nur stabile Teilchen  $\rightarrow i\bar{i} \rightleftharpoons k\bar{k}$
  - ▶ im thermischen GG ist Paarzeugung genauso häufig wie Paarvernichtung  
 $c_{\text{EQ}}(i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}) = c_{\text{EQ}}(k\bar{k} \rightarrow i\bar{i})$   
 $n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle_{\text{EQ}} \stackrel{!}{=} n_{k,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{k},\text{EQ}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle_{\text{EQ}}$
  - ▶  $\langle \sigma v \rangle_{\text{EQ}} \cong \langle \sigma v \rangle$  und Spezies  $k$  ist im GG mit restlichem Gas
- $$\Rightarrow n_k n_{\bar{k}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle = n_{k,\text{EQ}} n_{\bar{k},\text{EQ}} \langle \sigma_{k\bar{k} \rightarrow i\bar{i}} v \rangle_{\text{EQ}}$$

Es wird:

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) + (n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} - n_i n_{\bar{i}}) \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle$$

# Diskussion

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) + (n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} - n_i n_{\bar{i}}) \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle$$

Vereinfachen mit  $n_i = n_{\bar{i}}$  und umschreiben zu Ableitung nach  $a$

$$\frac{d}{da}(n_i a^3) = \frac{1}{3} \frac{n_{i,\text{EQ}}^2 - n_i^2}{n_i} \frac{\Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}}}{\dot{a}/a} \quad \text{mit } \Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} - \text{Übergangsrate}$$

Man erkennt

- ▶  $\Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} \ll H \Rightarrow d(n_i a^3)/da \cong 0 \Rightarrow n \propto a^{-3}$
- ▶ wenn  $\Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}}$  nicht vernachlässigbar:  
 $n_i \rightarrow n_{i,\text{EQ}}$

# Diskussion

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) + (n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} - n_i n_{\bar{i}}) \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle$$

Vereinfachen mit  $n_i = n_{\bar{i}}$  und umschreiben zu Ableitung nach  $a$

$$\frac{d}{da}(n_i a^3) = \frac{1}{3} \frac{n_{i,\text{EQ}}^2 - n_i^2}{n_i} \frac{\Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}}}{\dot{a}/a} \quad \text{mit } \Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} - \text{Übergangsrate}$$

Man erkennt

- ▶  $\Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} \ll H \Rightarrow d(n_i a^3)/da \cong 0 \Rightarrow n \propto a^{-3}$
- ▶ wenn  $\Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}}$  nicht vernachlässigbar:  
 $n_i \rightarrow n_{i,\text{EQ}}$

# Diskussion

$$\frac{d}{dt}n_i(t) = -3\frac{\dot{a}}{a}n_i(t) + (n_{i,\text{EQ}} \cdot n_{\bar{i},\text{EQ}} - n_i n_{\bar{i}}) \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v \rangle$$

Vereinfachen mit  $n_i = n_{\bar{i}}$  und umschreiben zu Ableitung nach  $a$

$$\frac{d}{da}(n_i a^3) = \frac{1}{3} \frac{n_{i,\text{EQ}}^2 - n_i^2}{n_i} \frac{\Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}}}{\dot{a}/a} \quad \text{mit } \Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} - \text{Übergangsrate}$$

Man erkennt

- ▶  $\Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} \ll H \Rightarrow d(n_i a^3)/da \cong 0 \Rightarrow n \propto a^{-3}$
- ▶ wenn  $\Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}}$  nicht vernachlässigbar:  
 $n_i \rightarrow n_{i,\text{EQ}}$

# Elektronen und Positronen

$$\frac{d}{da}(n_i a^3) = \frac{1}{3} \frac{n_{i,\text{EQ}}^2 - n_i^2}{n_i} \frac{\Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}}}{\dot{a}/a}$$

- ▶ Prüfen ob heute im therm. GG
- ▶ errechnen der Temperatur des Ausfrierens  $T_f$

# Elektronen und Positronen

für  $T \gg m_e$

$$\frac{d}{da}(n_i a^3) = \frac{1}{3} \frac{n_{i,\text{EQ}}^2 - n_i^2}{n_i} \frac{\Gamma_{\bar{i}i \rightarrow k\bar{k}}}{\dot{a}/a}$$

- ▶ Aus Friedmann-Gleichung:

$$\dot{a}/a \sim T^2/m_{\text{PL}} \quad (m_{\text{PL}} - \text{Planckmasse})$$

- ▶ Aus Quantenmechanischen Betrachtungen:

$$\Gamma_{\bar{i}i \rightarrow k\bar{k}} \sim n_e(T) \alpha^2 / T^2 \sim \alpha^2 T \text{ für } T \gg m_e$$

$(\alpha - \text{Feinstrukturkonstante})(n \propto T^3)$

- ▶  $\Gamma > \dot{a}/a$  für  $T < \alpha^2 m_{\text{PL}} \sim 10^{14} \text{ GeV}$  - Obergrenze
- ▶ für  $T = m_e$  ist  $\Gamma \sim (\alpha^2 m_{\text{PL}}/m_e) \dot{a}/a \sim 10^{18}/H^{-1}$  entspricht also  $10^{18}$  Reaktionen pro Hubble-Zeit
- ▶ Thermisches Gleichgewicht sicher für  $m_e < T < 10^{14} \text{ GeV}$

# Elektronen und Positronen

für  $T \gg m_e$

$$\frac{d}{da}(n_i a^3) = \frac{1}{3} \frac{n_{i,\text{EQ}}^2 - n_i^2}{n_i} \frac{\Gamma_{\bar{i}i \rightarrow k\bar{k}}}{\dot{a}/a}$$

- ▶ Aus Friedmann-Gleichung:

$$\dot{a}/a \sim T^2/m_{\text{PL}} \quad (m_{\text{PL}} - \text{Planckmasse})$$

- ▶ Aus Quantenmechanischen Betrachtungen:

$$\Gamma_{\bar{i}i \rightarrow k\bar{k}} \sim n_e(T) \alpha^2 / T^2 \sim \alpha^2 T \text{ für } T \gg m_e$$

$(\alpha - \text{Feinstrukturkonstante})(n \propto T^3)$

- ▶  $\Gamma > \dot{a}/a$  für  $T < \alpha^2 m_{\text{PL}} \sim 10^{14} \text{ GeV}$  - Obergrenze

- ▶ für  $T = m_e$  ist  $\Gamma \sim (\alpha^2 m_{\text{PL}}/m_e) \dot{a}/a \sim 10^{18}/H^{-1}$  entspricht also  $10^{18}$  Reaktionen pro Hubble-Zeit

- ▶ Thermisches Gleichgewicht sicher für  $m_e < T < 10^{14} \text{ GeV}$

# Elektronen und Positronen

für  $T \gg m_e$

$$\frac{d}{da}(n_i a^3) = \frac{1}{3} \frac{n_{i,\text{EQ}}^2 - n_i^2}{n_i} \frac{\Gamma_{\bar{i}i \rightarrow k\bar{k}}}{\dot{a}/a}$$

- ▶ Aus Friedmann-Gleichung:  
 $\dot{a}/a \sim T^2/m_{\text{PL}}$  ( $m_{\text{PL}}$  - Planckmasse)
- ▶ Aus Quantenmechanischen Betrachtungen:  
 $\Gamma_{\bar{i}i \rightarrow k\bar{k}} \sim n_e(T) \alpha^2 / T^2 \sim \alpha^2 T$  für  $T \gg m_e$   
 $(\alpha - \text{Feinstrukturkonstante})(n \propto T^3)$
- ▶  $\Gamma > \dot{a}/a$  für  $T < \alpha^2 m_{\text{PL}} \sim 10^{14} \text{ GeV}$  - Obergrenze
- ▶ für  $T = m_e$  ist  $\Gamma \sim (\alpha^2 m_{\text{PL}}/m_e) \dot{a}/a \sim 10^{18}/H^{-1}$  entspricht also  $10^{18}$  Reaktionen pro Hubble-Zeit
- ▶ Thermisches Gleichgewicht sicher für  $m_e < T < 10^{14} \text{ GeV}$

# Elektronen und Positronen

für  $T \gg m_e$

$$\frac{d}{da}(n_i a^3) = \frac{1}{3} \frac{n_{i,\text{EQ}}^2 - n_i^2}{n_i} \frac{\Gamma_{\bar{i}i \rightarrow k\bar{k}}}{\dot{a}/a}$$

- ▶ Aus Friedmann-Gleichung:  
 $\dot{a}/a \sim T^2/m_{\text{PL}}$  ( $m_{\text{PL}}$  - Planckmasse)
- ▶ Aus Quantenmechanischen Betrachtungen:  
 $\Gamma_{\bar{i}i \rightarrow k\bar{k}} \sim n_e(T) \alpha^2 / T^2 \sim \alpha^2 T$  für  $T \gg m_e$   
 $(\alpha - \text{Feinstrukturkonstante})(n \propto T^3)$
- ▶  $\Gamma > \dot{a}/a$  für  $T < \alpha^2 m_{\text{PL}} \sim 10^{14} \text{ GeV}$  - Obergrenze
- ▶ für  $T = m_e$  ist  $\Gamma \sim (\alpha^2 m_{\text{PL}}/m_e) \dot{a}/a \sim 10^{18}/H^{-1}$  entspricht also  $10^{18}$  Reaktionen pro Hubble-Zeit
- ▶ Thermisches Gleichgewicht sicher für  $m_e < T < 10^{14} \text{ GeV}$

# Elektronen und Positronen

für  $T \ll m_e$

$$\frac{d}{da}(n_i a^3) = \frac{1}{3} \frac{n_{i,\text{EQ}}^2 - n_i^2}{n_i} \frac{\Gamma_{\bar{i}i \rightarrow k\bar{k}}}{\dot{a}/a}$$

- ▶  $\Gamma_{\bar{i}i \rightarrow k\bar{k}} \sim n_e(T) \alpha^2 / T^2 \sim \alpha^2 (T^3/m)^{1/2} \exp[-m/t]$   
 $(n \propto (mT)^{3/2} \exp[-m/t])$
- ▶ Vergleich mit  $\dot{a}/a \sim T^2/m_{\text{PL}}$  liefert (numerische Berechnung):
- ▶  $\Gamma < \dot{a}/a$  für  $T < T_f \sim m_e/40$

$$\Rightarrow n_e(a) = n_e(T_f) \left(\frac{a_f}{a}\right)^3$$

# Elektronen und Positronen

für  $T \ll m_e$

$$\frac{d}{da}(n_i a^3) = \frac{1}{3} \frac{n_{i,\text{EQ}}^2 - n_i^2}{n_i} \frac{\Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}}}{\dot{a}/a}$$

- ▶  $\Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} \sim n_e(T) \alpha^2 / T^2 \sim \alpha^2 (T^3/m)^{1/2} \exp[-m/t]$   
 $(n \propto (mT)^{3/2} \exp[-m/t])$
- ▶ Vergleich mit  $\dot{a}/a \sim T^2/m_{\text{PL}}$  liefert (numerische Berechnung):
- ▶  $\Gamma < \dot{a}/a$  für  $T < T_f \sim m_e/40$

$$\Rightarrow n_e(a) = n_e(T_f) \left(\frac{a_f}{a}\right)^3$$

# Elektronen und Positronen

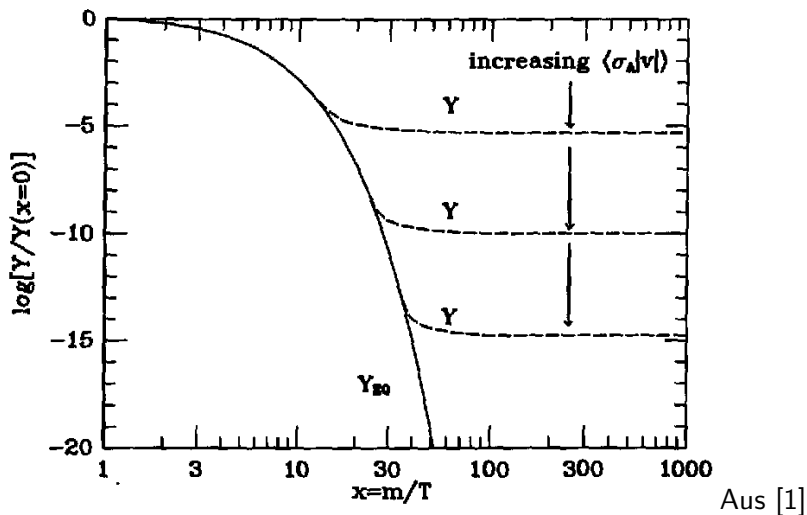
für  $T \ll m_e$

$$\frac{d}{da}(n_i a^3) = \frac{1}{3} \frac{n_{i,\text{EQ}}^2 - n_i^2}{n_i} \frac{\Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}}}{\dot{a}/a}$$

- ▶  $\Gamma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} \sim n_e(T) \alpha^2 / T^2 \sim \alpha^2 (T^3/m)^{1/2} \exp[-m/t]$   
 $(n \propto (mT)^{3/2} \exp[-m/t])$
- ▶ Vergleich mit  $\dot{a}/a \sim T^2/m_{\text{PL}}$  liefert (numerische Berechnung):
- ▶  $\Gamma < \dot{a}/a$  für  $T < T_f \sim m_e/40$

$$\Rightarrow \boxed{n_e(a) = n_e(T_f) \left(\frac{a_f}{a}\right)^3}$$

# Nochmal ein Bild als Zusammenfassung



# Zusammenfassung

- ▶ rel. und n.-rel. Teilchendichten für thermisches Gleichgewicht
- ▶ Boltzmann Gleichung zur Beschreibung des Übergangs vom Gleichgewicht zum Ausfrieren
- ▶ Ausdünnung der Teilchen durch Ausdehnung des Universums, keine Neuentstehung

Was fehlt (und wir noch hören):

- ▶ Quark-Hadron Übergang
- ▶ Bildung von Kernen und später Atomen
- ▶ Teilchenasymmetrie über Leptogenese und Baryogenese

# Literatur

-  Kolb E.W., Turner M., *The Early Universe*, Westview Press, 1994
-  James Rich, *Fundamentals of Cosmology*, Springer, 2001
-  Gerhard Börner, *The Early Universe - Facts and Fiction*, Springer, 2004
-  Peter Coles, Francesco Lucchin, *Cosmology*, John Wiley & Sons, 1995

# Thermisch gemittelter Wirkungsquerschnitt

## quantenmechanisch

$$\begin{aligned}
 -c(ij \rightarrow kl) + c(kl \rightarrow ij) = & - \int d\Pi_i d\Pi_j d\Pi_k d\Pi_l \\
 & \times (2\pi)^4 \delta(p_k + p_l - p_i - p_j) \\
 & \times |\mathcal{M}|^2 [f_i f_j - f_k f_l]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma_{i\bar{i} \rightarrow k\bar{k}} v_{i\bar{i}} \rangle = & (n_{i,\text{EQ}})^{-2} \int d\Pi_i d\Pi_{\bar{i}} d\Pi_k d\Pi_{\bar{k}} \\
 & \times (2\pi)^4 \delta(p_k + p_{\bar{k}} - p_i - p_{\bar{i}}) \\
 & \times |\mathcal{M}|^2 \exp[(\varepsilon_i - \varepsilon_{\bar{i}})/T]
 \end{aligned}$$

$$d\Pi = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{2\varepsilon}$$