Einführung in die Grundlagen der Physik Freier Elektronen Laser

Klaus Steiniger

23. Juni 2009

Gliederung

Bestimmung des Energieübertrags

FEL-Bewegungsgleichungen

Ausgangspunkt

- Elektrisches Feld im Undulator, dessen Amplitude sich nur langsam ändert
$$\mathbf{A}(z,t) = \mathbf{A}_\mathrm{u}(z) + \mathbf{A}_\mathrm{r}(z,t)$$
- Einzelne Felder durch
$$\nabla \times \mathbf{A}_\mathrm{u}(z) = \mathbf{B}_\mathrm{u}(z) \qquad \mathbf{E}_\mathrm{r}(z,t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_\mathrm{r}(z,t)}{\partial t}$$
- im helischen Undulator sind $\mathbf{B}_\mathrm{u}(z)$ und $\mathbf{E}_\mathrm{r}(z,t)$ zirkular polarisiert

Beschreibung des Energieübertrags

- Energieverlust der Elektronen = Energiegewinn des Feldes ⇒

  $$\dot{\gamma} = \frac{q\mathbf{E}_{\mathrm{r}}\boldsymbol{\beta}}{m_0 c}$$

  ist geeignete Variable
- $\boldsymbol{\beta}$ aus den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen zu

  $$H(\wp, \mathbf{r}, t) = [(\wp - \frac{q}{c}\mathbf{A})^2 c^2 + {m_0}^2 c^4]^{1/2}$$

  mit kombiniertem Strahlungsfeld $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathrm{u}} + \mathbf{A}_{\mathrm{r}}$

Beschreibung des Energieübertrags

- nach länglicher Rechnung

$$\dot{\gamma} = -\frac{qE_\mathrm{r}}{\gamma m_0 c} (K \sin\theta) \qquad \text{mit} \qquad \theta = (k_\mathrm{u} + k_\mathrm{r})z - k_\mathrm{r} ct$$

$$K = \frac{qB_\mathrm{u}}{mc^2 k_\mathrm{u}}$$

$$\dot{\theta} = c(k_\mathrm{u} + k_\mathrm{r}) \left[\beta_\mathrm{z} - \frac{k_\mathrm{r}}{k_\mathrm{u} + k_\mathrm{r}}\right]$$

- θ Ort des Elektrons relativ zu ponderomotorischer Welle ($\theta = 0$)
- ponderomotorische Welle:
  - Elektronen mit $\theta = 0$ hätten keinen Energieübeitrag,
  - bleiben für immer in dieser Lage ($\dot{\theta} = 0$) ($\beta_\mathrm{z} = z/ct$)
  - $\Rightarrow$ werden nicht beschleunigt
  - $\Rightarrow$ würden $\mathbf{E}_\mathrm{r}$ kohärent verstärken (s. Vortrag Gesine)
  - Solche Elektronen existieren nicht, wegen Strahlungsbremsung
- Aber: Elektronen Pendeln um diese Lage (s.später)

FEL-DGL

- Allgemein erhält man β_z aus

$$\beta_\mathrm{z} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} - \frac{{\beta_\mathrm{x}}^2 + {\beta_\mathrm{y}}^2}{2}$$

- Definition eines γ_R so, dass

$$\beta_\mathrm{z}(\gamma_\mathrm{R}) = \frac{k_\mathrm{r}}{k_\mathrm{u} + k_\mathrm{r}}$$

$\theta(\beta_\mathrm{z}(\gamma_\mathrm{R})) = 0 = \dot{\theta}$

- Umschreiben von $\dot{\gamma}$ auf $\dot{\eta} = \dot{\gamma}/\gamma_\mathrm{R}$ mit $\eta = 1 - \gamma/\gamma_\mathrm{R}$

FEL-DGL

- liefert die FEL-DGL für small signal gain regime

$$\dot{\eta} = -\Omega^2 \sin\theta \qquad \text{wobei} \quad \Omega^2 = \frac{qKE_\mathrm{r}}{mc{\gamma_\mathrm{R}}^2}$$
$$\dot{\theta} = 2ck_\mathrm{u}\eta$$

- Für kleine θ ergibt sich sofort die Pendelgleichung

$$\ddot{\theta} + 2ck_\mathrm{u}\Omega^2\theta = 0$$

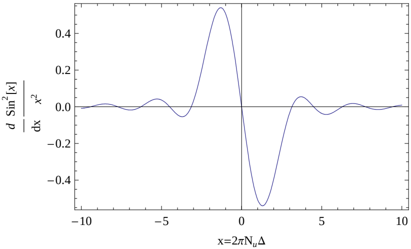
für die Phase der Elektronen

Lösung mit Störungsrechnung

- Folgender Ansatz für die Variablen

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2$$
$$\eta = \Delta + \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2$$

  $\Delta \equiv (\gamma_0 - \gamma_\mathrm{R})/\gamma_\mathrm{R}$ - Detuning: Energieüberschuss der Elektronen zur Resonanzenergie vor Durchflug
- Lösung (2. Ordnung): Energiegewinn des Feldes ist antisymmetrische Funktion des Detuning



$$\langle\eta_2\rangle_{\theta_\mathrm{i}} \propto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)$$

mit $\quad x = 2\pi N_\mathrm{u}\Delta$

$$\delta\eta_\mathrm{Gesamt} = N_\mathrm{e}\,\langle\eta_2\rangle_{\theta_\mathrm{i}}$$