12. Dezember, 2008

Protokoll zum Versuch Millikanversuch (MV) im Fortgeschrittenenpraktikum

Klaus Steiniger, Alexander Wagner, Gruppe 850
klaus.steiniger@physik.tu-dresden.de, alexander.wagner2@mailbox.tu-dresden.de

Betreuer: Dr. B. Kluge

Protokoll vom 18. Dezember 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Bestimmung der Elementarladung findet im sogenannten Öltröpfchenversuch statt. Dazu wird Öl zerstäubt und zwischen einen Plattenkondensator gebracht. Durch Zerreißen des Öls werden die Tröpfchen elektrisch geladen (Reibungselektrizität). Beim Anlegen einer Spannung werden die Tröpfchen im Feld des Kondensators beschleunigt. Diese wird so eingestellt, dass sich ein ausgewähltes Tröpfchen mit konstanter Geschwindigkeit zur positiv geladenen Platte bewegt. Aus der eingestellten Spannung lässt sich die Ladung des Tröpfchens ermitteln.
Um eine Bestimmungsgleichung für die Ladung Q des Öltröpfchens zu erhalten, untersucht man ein beschleunigungsfreies Teilchen bei angelegter Spannung U. Wir nehmen dazu an, dass wir ein Teilchen mit negativer Ladung untersuchen. Beschleunigungsfreiheit gilt, wenn COULOMBkraft F_C, Auftriebskraft F_A, Reibungskraft F_R und Gravitationskraft F_G im Gleichgewicht sind. Siehe dazu Abbildung 1.

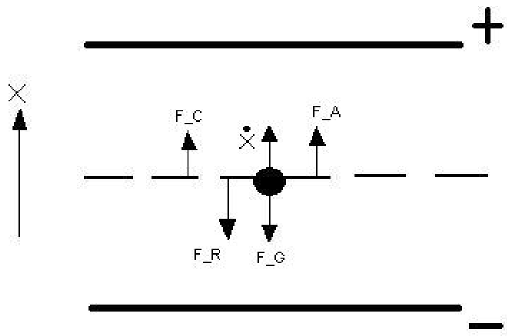

Abbildung 1: schematische Darstellung der Kräfte

$$\begin{aligned} F_R + F_C + F_A - F_G &= 0 \\ -6\pi r\eta\vec{v} + Q\vec{E} - \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{Öl} - \rho_{Luft})g &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Betrachtet man (1.1) für $\vec{E} = 0$, lässt sich der Durchmesser der Kugeln aus der konstanten Fallgeschwindigkeit (ein passendes Tröpfchen aussuchen!) $\vec{v} = -v \cdot \vec{e}_x$ bestimmen. Wobei gilt: $v = \frac{s_F}{t_F}$ mit der Fallzeit t_F und -strecke s_F.

$$\begin{aligned} 6\pi r\eta v &= \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_{Öl} - \rho_{Luft})g \\ r &= 3 \cdot \sqrt{\frac{\eta s_F}{2g(\rho_{Öl} - \rho_{Luft})t_F}} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Für den Plattenkondensator gilt $\vec{E} = -E\,\vec{e}_x = -U/d \cdot \vec{e}_x$. Zur Vereinfachung wird für den Fall- und Steigweg die selbe Strecke $s = s_S = s_F$ gewählt. Da Ladungen nur gequantelt als ein vielfaches der Elementarladung e auftreten, wollen wir annehmen $Q = -e'_n$. Damit kann man (1.1) nach Q umstellen.

$$\begin{aligned} e'_n &= \frac{6\pi\eta sd}{U} \cdot \left(\frac{1}{t_F} + \frac{1}{t_S}\right) \cdot r && \text{mit (1.2)} \\ &= \frac{18\pi\eta sd}{U}\left(\frac{1}{t_F} + \frac{1}{t_S}\right)\sqrt{\frac{\eta s}{2g(\rho_{Öl} - \rho_{Luft})t_F}} \end{aligned}$$

Nach CUNNINGHAM muss noch eine Korrektur erfolgen. Sie berücksichtigt, dass die Reibungskraft geringer ist als angenommen, da der Radius der Öltröpfchen nicht groß gegenüber der mittleren freien Weglänge der Luftmoleküle ist. Es ergibt sich:

$$e_n = \frac{18\pi\eta sd}{U}\left(\frac{1}{t_F}+\frac{1}{t_S}\right)\sqrt{\frac{\eta s}{2g(\rho_{Öl}-\rho_{Luft})t_F}}\left(1+\frac{B}{pr'}\right)^{-3/2} \tag{1.3}$$

Dabei ist B eine empirisch ermittelte Konstante und für r' gilt:

$$r^2 = \frac{9\eta s}{2g(\rho_{Öl}-\rho_{Luft})t_F} = r'^2\left(1+\frac{B}{pr'}\right) \tag{1.4}$$

Er ist der wahre Radius der Tröpfchen, während r nur eine Näherung ist.

2 Durchführung

Nach dem Einschalten aller Geräte haben wir die Kamera so ausgerichtet, dass die Balken für die Messung der Zeiten vertikal auf dem Bildschirm ausgerichtet waren. Danach haben wir einen ersten Versuch unternommen und Öltröpfchen zwischen die Kondensatorplatten gebracht. Teilchen mit großen Fallzeiten (t≥20 s) waren solche, die zunächste ersteinmal interessant waren. Mit einer Spannung von 8 kV wurden nun solche Tröpfchen aussortiert, die eine große bzw. positive Ladung hatten. Von denen, die übrig blieben, haben wir nun im Regelfall das mit der größten Steigzeit ausgewählt. Ausnahmen bildeten solche, die sich ohne Feld nur sehr langsam oder garnicht bewegten. Das Optimum bilden kleine Fall- und große Steigzeiten.
Haben wir ein Tröpfchen ausgesucht, so haben wir dafür jeweils 10× die Steig- und Fallzeit gemessen. Unvollständige Messreihen sind durch Umladungen bedingt.
Außerdem haben wir die Schwebespannung für einige Teilchen ermittelt, um die daraus berechnete Ladung mit der aus Steig- und Fallzeiten vergleichen zu können.
Zusätzlich mussten während des Versuchs noch die Werte für Temperatur T, Druck p, Zähigkeit der Luft η, Plattenabstand d, Messstrecke s, Dichte der feuchten Luft ρ_{Luft} und Dichte des Öls $\rho_{Öl}$ ermittelt werden. Dies zum Teil aus Tabellen und Näherungsformeln und zum anderen von Messgeräten abgelesen. Siehe dazu Tabelle 1.

3 Messwerte

Messgröße	Einheit	Messwert	zuf. Fehler	Begründung	syst. Fehler	ges. Fehler
T	$^{\circ}C$	20.2	2.5	Änderung im Versuch	-	2.5
p	$10^3\,Pa$	100.213	0.013	Ablesegenau.	-	0.013
η	$10^{-6}\,Pa \cdot s$	18.19	0.03	Temp.-F.	0.009	0.04
d	$10^{-3}\,m$	16.01	-	-	0.01	0.01
s	$10^{-3}\,m$	9.76	-	-	0.04	0.04
$\rho_{Öl}$	$kg \cdot m^{-3}$	879	2	Temp.-F.	0.36	2.4
ρ_{Luft}	$kg \cdot m^{-3}$	1.18189	0.00006	Luftfeuchte Ablesegen.	-	0.00006
B	$10^{-6}\,Pa \cdot m$	8230	90	Temp.-F.	-	90
U	V	s.u.	6	Einstellgen.	-	6
t_F	s	s.u.	stat. Ausw.	-	vern.-bar	s.u.
t_S	s	s.u.	stat. Ausw.	-	vern.-bar	s.u.
g	ms^{-1}	9.80665	-	-	-	-

Tabelle 1: Messwerte aus dem Versuch

Teilchen1	U=5002 V
Fall/s	Steig/s
104.2	37.8
101.9	37.6
102.4	37.5
103.5	37.4
103.9	37.2
102.5	37.6
102.9	37.4
102.8	36.9
103.3	36.9
104.3	36.9

Teilchen2	U=5000V
Fall/s	Steig/s
88.3	25.9
86.4	26.0
87.0	26.0
86.6	26.0
87.4	26.0
86.2	26.0
86.4	25.8
86.6	25.8
86.2	25.9
86.6	25.9
Schwbsp/kV	1.16

Teilchen3	U=5000 V
Fall/s	Steig/s
106.4	20.5
106.4	21.0
108.0	21.0
109.7	20.9
111.6	21.1
108.7	20.9
108.8	21.0
110.4	21.0
109.3	20.8
110.7	20.8
Schwbsp/kV	0.78

Teilchen4	U=2500 V
Fall/s	Steig/s
67.6	25.0
67.6	24.8
67.5	24.7
68.0	24.8
68.5	24.8
68.6	24.7
69.0	24.7
68.8	
	umgeladen

Teilchen5	U=3000 V
Fall/s	Steig/s
69.5	22.7
69.8	23.0
70.3	22.7
70.0	22.7
69.7	22.8
70.5	22.7
70.4	22.7
70.1	22.6
70.6	22.7
70.7	22.4
Schwbsp/kV	0.74

Teilchen6	U=3000V
Fall/s	Steig/s
87.8	27.2
89.3	27.0
90.3	26.9
89.2	26.9
89.6	26.6
90.6	26.8
90.9	27.0
90.2	
	umgeladen

Teilchen7	U=8000V
Fall/s	Steig/s
76.8	29.8
76.8	29.7
77.1	29.5
77.7	29.9
77.8	29.6
77.1	29.5
77.7	29.3
78.1	29.4
77.7	29.2
Schwbsp/kV	2.19

Teilchen8	U=6000 V
Fall/s	Steig/s
56.8	37.4
57.4	37.2
57.6	37.1
56.9	36.9
57.4	36.7
57.8	36.5
57.7	36.6
57.8	36.5
58.1	36.9
Schwbsp/kV	2.30

Teilchen9	U=7000 V
Fall/s	Steig/s
52.9	33.2
52.3	33.0
53.0	33.2
52.4	32.8
52.7	33.2
53.0	33.2
53.2	33.1
52.9	33.0
53.0	32.9
Schwbsp/kV	2.66

Abbildung 2: Öltröpfchen Messwerte

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des Radius und der Ladung

Mit den Formeln (1.3) und (1.4) wird nun für jedes Teilchen ein Radius r' und eine Ladung Q_{t}, sowie deren Fehler berechnet. Dazu werden für die Steig- und Fallzeiten die Mittelwerte eingesetzt und die restlichen Größen aus Tabelle 1 verwendet.
Aus der Schwebspannung wird die Ladung Q_{U} berechnet.

$$Q_{\mathrm{U}} = \frac{4d}{3U}\pi r^3(\rho_{\ddot{O}l} - \rho_{Luft})g$$

4.2 Fehlerbetrachtung

Die Angenommenen Fehler der Messgrößen entstehen durch Ableseungenauigkeiten (Luftdruck, Luftfeuchte) und Änderung während des Versuchs (Temperatur) sowie durch Fehlerfortpflanzung von Temperatur, Luftdruck und Luftfeuchte. Bei der Zeitmessung haben wir einen systematischen Fehler der Stoppuhr vernachlässigt und stattdessen auf eine Stelle nach dem Komma gerundet. Dies ist möglich, da der zufällige Fehler groß gegen den systematischen ist. Der zuf. Fehler entsteht durch zum Teil sehr langsames Überqueren der ausgedehnten Balken.
Die Ermittlung des zufälligen Fehlers der Zeitmessung findet mittels statistischer Auswertung statt. Also Bestimmung des Mittelwerts und der Standartabweichung s für jedes Teilchen.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Als Gesamtfehler für die Zeitmessung haben wir den dreifachen statistischen Fehler des Mittelwerts (also $\Delta t = 3 \cdot \text{Standartabweichung}/\sqrt{\text{n}}$) gewählt.
Für die Bestimmung des Fehlers für den Radius und die Ladung wurde eine Größtfehlerabschätzung durchgeführt. Das heißt in den Formeln (1.3) und (1.4) wurden nach allen Variablen Ableitungen gebildet und diese mit den Fehlern multipliziert. Der Gesamtfehler ist die Summe über alle diese Terme.
Den größten Anteil dabei haben der Fehler für die Wegstrecke ($8.20795 \cdot 10^{-22}\,C$) und die Fallzeit ($9.9071 \cdot 10^{-22}\,C$).

4.3 Bemerkung zu Rechnungen

Alle Ableitungen der Formeln (1.3) und (1.4) für die Größtfehlerabschätzung wurden mit dem Programm Mathematica berechnet. Dies ist für Teilchen 1 im Anhang exemplarisch gezeigt.

4.4 Erste Zusammenfassung

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse bietet folgende Tabelle:

	Radius r' in $10^{-7} \cdot m$	$\Delta r'$	Ladung Q_{t} in $10^{-19} \cdot C$	ΔQ_{t}	Q_{U}
Teilchen 1	2.78	0.04	2.51	0.04	
Teilchen 2	3.06	0.04	3.89	0.05	0.14
Teilchen 3	2.69	0.03	3.78	0.05	0.14
Teilchen 4	3.50	0.04	10.03	0.17	
Teilchen 5	3.44	0.03	8.69	0.11	0.31
Teilchen 6	3.00	0.04	6.11	0.10	
Teilchen 7	3.26	0.04	2.45	0.04	0.09
Teilchen 8	3.84	0.03	3.78	0.08	0.14
Teilchen 9	4.03	0.03	3.78	0.07	0.14

Zunächst fallen die sehr kleinen Ladungen für die Schwebspannung auf. Ein ermittelter Größtfehler ΔQ_{U}, bei einem Spannungsfehler von 100V liegt bei $5.5 \cdot 10^{-21} C$. Das ist natürlich viel zu klein. Der Vergleich mit anderen Gruppen zeigt, das wir generell sehr kleine Fehler haben und die Ursache scheinen die von uns ausgewählten Teilchen mit ihren sehr großen Fallzeiten und kleinen Radien zu sein.
Um nun trotzdem einen größten gemeinsamen Teiler der Q_{t_i} zu bestimmen, haben wir folgende Variante gewählt. Die Q_{t_i} werden durch einen Erwartungswert für den ggT $e_{\text{schätz}}$ geteilt. Diese Zahl n_i wird auf eine ganze Zahl gerundet und dann die Abweichung $\delta_i = n_i \cdot e_{\text{schätz}} - Q_{\mathrm{t}_i}$ für jedes Teilchen ermittelt. Im nächsten Schritt wird $\sum \delta_i$ (die δ_i werden dazu quadriert um nur positive Werte zu haben) gebildet und über $e_{\text{schätz}}$ aufgetragen. Der Punkt an dem dieser Graf ein Minimum hat, sollte unserem Erwartungswert für die Elementarladung am nächsten kommen.

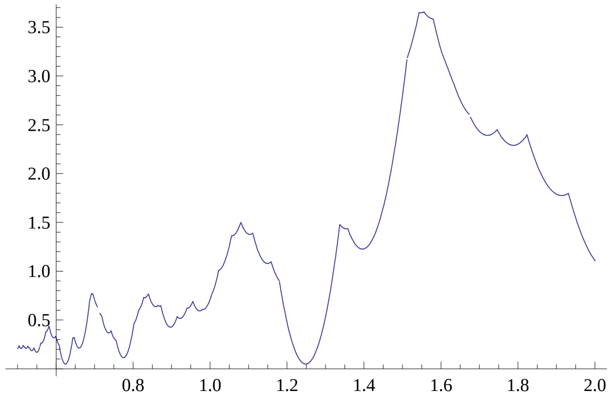

Abbildung 3: Grafik zur Ermittlung des Minimums

Wie in Grafik 3 zu sehen ist, liegt das beste Minimum bei $1.25 \cdot 10^{-19} C$ mit einer gesamten quadratischen Abweichung von $0.05 \cdot 10^{-19} C$. Das liegt innerhalb der Fehlergrenzen von allein einem Wert. Um daraus den Fehler unserer Methode zu bestimmen, muss noch die Wurzel gezogen und durch die Anzahl der Teilchen minus Éins geteilt werden.

5 Abschließende Auswertung

Die von uns ermittelte Elementarladung beträgt

$$e = (\ 1.25 \pm 0.8\ ) \cdot 10^{-19}\, C$$

Dieser Wert ist ungefähr $0.4 \cdot 10^{-19}\, C$ vom erwarteten Wert $1.605 \cdot 10^{-19}\, C$ entfernt. Dies liegt unteranderem daran, dass man schon bei der Auswahl der zu beobachtenden Teilchen Einschränkungen machen muss. Ein andere Fehlerquelle stellen die nicht konstanten Bedingungen während des Versuchs dar.

6 Anhang

Die exemplarische Rechnung für Teilchen 1 befindet sich auf den nächsten Seiten.

Setzen der Variablen

```
e = 18.19*^-6
s = 9.76*^-3
d = 16.01*^-3
g = 9.80665
r1 = 879.605
r2 = 1.18189
b = 8231.71*^-6
p = 100.213*10^3
```

Messwerte

```
u = 5002
tf = {104.2,
101.9,
102.4,
103.5,
103.9,
102.5,
102.9,
102.8,
103.3,
104.3}
ts = {37.8,
37.6,
37.5,
37.4,
37.2,
37.6,
37.4,
36.9,
36.9,
36.9}
```

```
tfm = Mean[tf]
tsm = Mean[ts]
um = u
```

$$dtf = 3 * \frac{\text{StandardDeviation}[tf]}{\sqrt{\text{Length}[tf]}}$$

$$dts = 3 * \frac{\text{StandardDeviation}[ts]}{\sqrt{\text{Length}[ts]}}$$

```
103.17

37.32

5002

0.765572

0.31241
```

Bestimmung des Radius

In[329]:= FindRoot$\left[\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*\text{Mean}[tf]} == x\hat{}2 + \frac{b*x}{p}, \{x, 0\}\right]$

Out[329]= $\{x \to 2.77701 \times 10^{-7}\}$

Bestimmung der Ladung

In[330]:= y = x /. %

$$q = \frac{18*\pi*e*s*d}{u}\sqrt{\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*\text{Mean}[tf]}}\left(\frac{1}{\text{Mean}[tf]}+\frac{1}{\text{Mean}[ts]}\right)\left(1+\frac{b}{p*y}\right)^{\frac{-3}{2}}$$

Out[330]= 2.77701×10^{-7}

Out[331]= 2.5121×10^{-19}

Fehler des Radius

In[333]:= dzdb =

$$D\left[-\frac{b}{2*p}+\sqrt{\frac{b\hat{}2}{4*p\hat{}2}+\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}, b\right]*90*\hat{}-6 \text{ /. } tf \to tfm \text{ /. } e \text{ -> } 18.19*\hat{}-6 \text{ /. }$$

s -> 9.76 * 10^(-3) /. g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /.
r2 -> 1.18189 /. b -> 8231.71*^-6 /. p -> 100.213 * 10^3

$$dzdp = D\left[-\frac{b}{2*p}+\sqrt{\frac{b\hat{}2}{4*p\hat{}2}+\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}, p\right]*0.013332*\hat{}3 \text{ /. } tf \to tfm \text{ /. } e \text{ -> } 18.19*\hat{}-6 \text{ /. }$$

s -> 9.76 * 10^(-3) /. g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /.
r2 -> 1.18189 /. b -> 8231.71*^-6 /. p -> 100.213 * 10^3

$$dzde = D\left[-\frac{b}{2*p}+\sqrt{\frac{b\hat{}2}{4*p\hat{}2}+\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}, e\right]*0.04*\hat{}-6 \text{ /. } tf \to tfm \text{ /. } e \text{ -> } 18.19*\hat{}-6 \text{ /. }$$

s -> 9.76 * 10^(-3) /. g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /.
r2 -> 1.18189 /. b -> 8231.71*^-6 /. p -> 100.213 * 10^3

$$dzds = D\left[-\frac{b}{2*p}+\sqrt{\frac{b\hat{}2}{4*p\hat{}2}+\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}, s\right]*0.04*\hat{}-3 \text{ /. } tf \to tfm \text{ /. } e \text{ -> } 18.19*\hat{}-6 \text{ /. }$$

s -> 9.76 * 10^(-3) /. g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /.
r2 -> 1.18189 /. b -> 8231.71*^-6 /. p -> 100.213 * 10^3

$$dzdr1 = D\left[-\frac{b}{2*p}+\sqrt{\frac{b\hat{}2}{4*p\hat{}2}+\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}, r1\right]*2.4 \text{ /. } tf \to tfm \text{ /. } e \text{ -> } 18.19*\hat{}-6 \text{ /. }$$

s -> 9.76 * 10^(-3) /. g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /.
r2 -> 1.18189 /. b -> 8231.71*^-6 /. p -> 100.213 * 10^3

$$dzdr2 = D\left[-\frac{b}{2*p}+\sqrt{\frac{b\hat{}2}{4*p\hat{}2}+\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}, r2\right]*0.00006 \text{ /. } tf \to tfm \text{ /. } e \text{ -> } 18.19*\hat{}-6 \text{ /. }$$

s -> 9.76 * 10^(-3) /. g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /.
r2 -> 1.18189 /. b -> 8231.71*^-6 /. p -> 100.213 * 10^3

$$dzdtf = D\left[-\frac{b}{2*p}+\sqrt{\frac{b\hat{}2}{4*p\hat{}2}+\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}, tf\right]*dtf \text{ /. } tf \to tfm \text{ /. } e \text{ -> } 18.19*\hat{}-6 \text{ /. }$$

s -> 9.76 * 10^(-3) /. g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /.
r2 -> 1.18189 /. b -> 8231.71*^-6 /. p -> 100.213 * 10^3

dz = Abs[dzdb] + Abs[dzdp] + Abs[dzde] + Abs[dzds] + Abs[dzdr1] + Abs[dzdr2] + Abs[dzdtf]

Out[340]= 2.97367×10^{-9}

Fehler der Ladung

In[341]:=

$$dqdtf = D\left[\frac{18*\pi*e*s*d}{u}\sqrt{\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}\left(\frac{1}{tf}+\frac{1}{ts}\right)\left(1+\frac{b}{p*x}\right)^{\frac{-3}{2}},\ tf\right]*dtf\ /.\ tf\to tfm\ /.$$

```
e -> 0.000018194226 /. s -> 9.76*10^(-3) /. d -> 16.01*10^(-3) /.
g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /. r2 -> 1.18189 /. b -> 0.00823171 /.
p -> 100.213*10^3 /. u → um /. ts → tfm /. x → y
```

$$dqde = D\left[\frac{18*\pi*e*s*d}{u}\sqrt{\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}\left(\frac{1}{tf}+\frac{1}{ts}\right)\left(1+\frac{b}{p*x}\right)^{\frac{-3}{2}},\ e\right]*0.04*\wedge-6\ /.\ tf\to tfm\ /.$$

```
e -> 0.000018194226 /. s -> 9.76*10^(-3) /. d -> 16.01*10^(-3) /.
g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /. r2 -> 1.18189 /. b -> 0.00823171 /.
p -> 100.213*10^3 /. u → um /. ts → tfm /. x → y
```

$$dqds = D\left[\frac{18*\pi*e*s*d}{u}\sqrt{\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}\left(\frac{1}{tf}+\frac{1}{ts}\right)\left(1+\frac{b}{p*x}\right)^{\frac{-3}{2}},\ s\right]*0.04*\wedge-3\ /.\ tf\to tfm\ /.$$

```
e -> 0.000018194226 /. s -> 9.76*10^(-3) /. d -> 16.01*10^(-3) /.
g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /. r2 -> 1.18189 /. b -> 0.00823171 /.
p -> 100.213*10^3 /. u → um /. ts → tfm /. x → y
```

$$dqdd = D\left[\frac{18*\pi*e*s*d}{u}\sqrt{\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}\left(\frac{1}{tf}+\frac{1}{ts}\right)\left(1+\frac{b}{p*x}\right)^{\frac{-3}{2}},\ d\right]*0.01*\wedge-3\ /.\ tf\to tfm\ /.$$

```
e -> 0.000018194226 /. s -> 9.76*10^(-3) /. d -> 16.01*10^(-3) /.
g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /. r2 -> 1.18189 /. b -> 0.00823171 /.
p -> 100.213*10^3 /. u → um /. ts → tfm /. x → y
```

$$dqdu = D\left[\frac{18*\pi*e*s*d}{u}\sqrt{\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}\left(\frac{1}{tf}+\frac{1}{ts}\right)\left(1+\frac{b}{p*x}\right)^{\frac{-3}{2}},\ u\right]*6\ /.\ tf\to tfm\ /.$$

```
e -> 0.000018194226 /. s -> 9.76*10^(-3) /. d -> 16.01*10^(-3) /.
g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /. r2 -> 1.18189 /. b -> 0.00823171 /.
p -> 100.213*10^3 /. u → um /. ts → tfm /. x → y
```

$$dqdr1 = D\left[\frac{18*\pi*e*s*d}{u}\sqrt{\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}\left(\frac{1}{tf}+\frac{1}{ts}\right)\left(1+\frac{b}{p*x}\right)^{\frac{-3}{2}},\ r1\right]*2.4\ /.\ tf\to tfm\ /.$$

```
e -> 0.000018194226 /. s -> 9.76*10^(-3) /. d -> 16.01*10^(-3) /.
g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /. r2 -> 1.18189 /. b -> 0.00823171 /.
p -> 100.213*10^3 /. u → um /. ts → tfm /. x → y
```

$$dqdr2 = D\left[\frac{18*\pi*e*s*d}{u}\sqrt{\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}\left(\frac{1}{tf}+\frac{1}{ts}\right)\left(1+\frac{b}{p*x}\right)^{\frac{-3}{2}},\ r2\right]*0.00006\ /.\ tf\to tfm\ /.$$

```
e -> 0.000018194226 /. s -> 9.76*10^(-3) /. d -> 16.01*10^(-3) /.
g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /. r2 -> 1.18189 /. b -> 0.00823171 /.
p -> 100.213*10^3 /. u → um /. ts → tfm /. x → y
```

$$dqdts = D\left[\frac{18*\pi*e*s*d}{u}\sqrt{\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}\left(\frac{1}{tf}+\frac{1}{ts}\right)\left(1+\frac{b}{p*x}\right)^{\frac{-3}{2}},\ ts\right]*dts\ /.\ tf\to tfm\ /.$$

```
e -> 0.000018194226 /. s -> 9.76*10^(-3) /. d -> 16.01*10^(-3) /.
g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /. r2 -> 1.18189 /. b -> 0.00823171 /.
p -> 100.213*10^3 /. u → um /. ts → tfm /. x → y
```

$$dqdb = D\left[\frac{18*\pi*e*s*d}{u}\sqrt{\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}\left(\frac{1}{tf}+\frac{1}{ts}\right)\left(1+\frac{b}{p*x}\right)^{\frac{-3}{2}},\ b\right]*90*\wedge-6\ /.\ tf\to tfm\ /.$$

```
e -> 0.000018194226 /. s -> 9.76*10^(-3) /. d -> 16.01*10^(-3) /.
g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /. r2 -> 1.18189 /. b -> 0.00823171 /.
p -> 100.213*10^3 /. u → um /. ts → tfm /. x → y
```

$$dqdp = D\left[\frac{18*\pi*e*s*d}{u}\sqrt{\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}\left(\frac{1}{tf}+\frac{1}{ts}\right)\left(1+\frac{b}{p*x}\right)^{\frac{-3}{2}},\ p\right]*0.013332*\wedge3\ /.$$

```
tf → tfm /. e -> 0.000018194226 /. s -> 9.76*10^(-3) /.
d -> 16.01*10^(-3) /. g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /. r2 -> 1.18189 /.
b -> 0.00823171 /. p -> 100.213*10^3 /. u → um /. ts → tfm /. x → y
```

$$dqdx = D\left[\frac{18*\pi*e*s*d}{u}\sqrt{\frac{e*s}{2*g*(r1-r2)*tf}}\left(\frac{1}{tf}+\frac{1}{ts}\right)\left(1+\frac{b}{p*x}\right)^{\frac{-3}{2}},\ x\right]*dz\ /.\ tf\to tfm\ /.$$

```
e -> 0.000018194226 /. s -> 9.76*10^(-3) /. d -> 16.01*10^(-3) /.
g -> 9.80665 /. r1 -> 879.605 /. r2 -> 1.18189 /. b -> 0.00823171 /.
p -> 100.213*10^3 /. u → um /. ts → tfm /. x → y
dq = Abs[dqdtf] + Abs[dqde] + Abs[dqds] + Abs[dqdd] + Abs[dqdu] + Abs[dqdr1] +
  Abs[dqdr2] + Abs[dqdts] + Abs[dqdb] + Abs[dqdp] + Abs[dqdx]
```

Out[352]= 3.87525×10^{-21}