5. Dezember 2008

# Protokoll zum Versuch Brownsche Bewegung (BB) im Fortgeschrittenenpraktikum

Klaus Steiniger, Alexander Wagner, Gruppe 850
klaus.steiniger@physik.tu-dresden.de, alexander.wagner2@mailbox.tu-dresden.de

Betreuer: Herr Dr. Kluge

# Inhaltsverzeichnis

**1 Einleitung** **3**
1.1 Aufgabenstellung . . . . . 3
1.2 Einleitung . . . . . 3

**2 Durchführung** **4**
2.1 Vergrößerung . . . . . 4
2.2 Herstellung der Probe . . . . . 4
2.3 Aufnahme der Messwerte . . . . . 4

**3 Messwerte** **4**

**4 Auswertung** **6**
4.1 Fehlerbetrachtung . . . . . 6

**5 Ergebnis** **7**

# 1 Einleitung

## 1.1 Aufgabenstellung

In diesem Versuch ist es unsere Aufgabe, die Brownsche Bewegung zu beobachten und analysieren. Dazu sollen wir die Konstanz des Diffusionskoeffizienten nachweisen und der Radius der Latexkügelchen berechnen.

## 1.2 Einleitung

Die Brownsche Bewegung bezeichnet die unregelmäßige Teilchenbewegung im thermodynamischen Gleichgewicht die dadurch zustande kommt, dass sich die Stöße der Umgebungsmoleküle am Teilchen nicht zu jedem Zeitpunkt aufheben. Allerdings unterliegt auch diese scheinbar regellose Bewegung bestimmten Gesetzmäßigkeiten. So ist z.B. der Diffusionskoeffizient D nicht von der Beobachtungszeit $\tau$ abhängig und es gilt:

$$D = \frac{1}{\left(V_M'\right)^2} \frac{\overline{x^2}}{2\tau} \tag{1}$$

Dabei ist $V_M'$ die Vergrößerung der Apparatur und $\overline{x^2}$ die statistische Schwankung, die sich als Mittelwert aus den in $\tau$ zurückgelegten Strecken nach $\frac{1}{2}\left(x_\tau^2 + y_\tau^2\right)$ ergibt. Wie bereits erwähnt, hängt diese Konstante nicht von der Beobachtungszeit ab, d.h. es muss gelten

$$\frac{\overline{x_\tau^2}}{\tau} = \frac{\overline{x_{2\tau}^2}}{2\tau} = \frac{\overline{x_{3\tau}^2}}{3\tau} = \cdots = \frac{\overline{x_{n\tau}^2}}{n\tau} \tag{2}$$

Außerdem ergibt sich D über die Stokes-Einstein-Gleichung zu

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r}$$

mit der Zähigkeit $\eta$ und der Boltzmann-Konstanten k, woraus man schließlich den Radius der aufgeschwemmten Teilchen zu

$$r = \frac{kT}{6D\pi\eta} \tag{3}$$

bestimmen kann.

Im Versuch benutzten wir ein Mikroskop mit vorangeschaltenen Dunkelfeldkondensor, welcher alle ungebeugten (direkten) Strahlen abblendet. Dadurch kann man durchsichtige und kontrastarme Objekte sehr gut darstellen und auswerten.

# 2 Durchführung

## 2.1 Vergrößerung

Im ersten Schritt haben wir die Vergrößerung des Mikroskops bestimmt, indem wir den Abstand einer uns bekannten Skala auf dem Bildschirm vermessen haben. Die Vergrößerung errechnet sich dann aus dem Verhältnis zwischen Bildgröße und Objektgröße. Zum genauen Einstellen haben wir bei kleinster Vergrößerung das Objekt zentriert und durch schrittweise Auswechseln des Objektives die größtmögliche Vergrößerung ermittelt.

## 2.2 Herstellung der Probe

Nach Reinigung des Objekträgers und des Abdeckplättchens brachten wir einen Fettrand auf den Objektträger, und in diesen unvollständigen Kreis einen Tropfen Suspension. Dann legten wir vorsichtig das Deckplättchen auf und achteten darauf, dass sich keine Luftbläschen bildeten. Den Fettrand haben wir dabei etwas unter dem Plättchen vorschauen lassen, und schlossen ihn nun vollständig mit Fett, um eine Verdunstung der Flüssigkeit und eine damit verbundene Vorzugsbewegung der Teilchen zu verhindern. Entscheidend bei der Herstellung war u.A. die richtige Menge an Flüssigkeit und die optimale Konsistenz. So mussten wir mehrere Präparate anfertigen, um vernünftige Messwerte aufnehmen zu können.

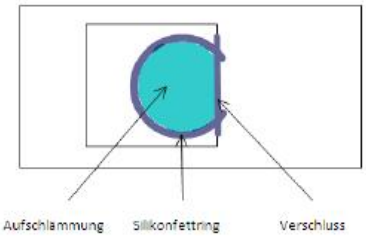

Abbildung 1: Versuchsaufbau[1]

## 2.3 Aufnahme der Messwerte

Am Anfang leuchteten wir das Okular optimal aus, indem wir den Lichteinfallspiegel entsprechend einstellten. Anschließend brachten wir den Kondensor unter den Objekttisch und tropften etwas Immersionsöl auf den Lichtaustritt. Das Objekt haben wir nun auf dem Objekttisch befestigt und den Kondensor von unten an den Objektträger herangeführt. In der kleinsten Vergrößerung richteten wir den Kondensor aus, und erhöhten schrittweise die Vergrößerung bis auf das Maximum. Dabei benutzten wir zwischen Objekt und Objektiv ebenfalls etwas Immersionsöl. Mit Hilfe einer Kamera brachten wir das Bild auf einen Bildschirm und zeichneten die Bahn (diskrete Messpunkte) eines ausgewählten Teilchens auf einer Folie ein. Die ausgewählten Teilchen befanden sich meistens etwas über der Sedimentationsebene und sollten eine typische Brownsche Bewegung ohne Vorzugsrichtung durchführen.

# 3 Messwerte

Temperatur, als konstant angenommen: $T = 297,4\,K \quad \Rightarrow \quad \eta = 0,91\,mPa \cdot s$
Zum Ausmessen der Vergrößerung haben wir den Abstand von 5 Streifen auf dem Bildschirm mit Hilfe der Millimeter-Folie gemessen.

$$4b = (187 \pm 5)\,mm \quad \Rightarrow \quad b = (46,8 \pm 1,3)mm$$

Die Abstände des Gegenstands: $g = 10\,\mu m$. Daraus ergibt sich eine Vergrößerung von

$$V'_M = \frac{b}{g} = 4680 \pm 130\ .$$

[1]Graphik aus Protokoll von Maria Strempel und Philipp Grohs vom 24.10.2008

| | t/t | x/cm | $Dx_{1t}$/cm | $Dx_{2t}$/cm | $Dx_{3t}$/cm | y/cm | $Dy_{1t}$/cm | $Dy_{2t}$/cm | $Dy_{3t}$/cm | $x^2_{1t}$/cm² | $x^2_{2t}$/cm² | $x^2_{3t}$/cm² |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Teilchen1** | **0** | 2 | | | | 0,9 | | | | | | |
| | **1** | 3,3 | 1,3 | | | -0,5 | -1,4 | | | 1,83 | | |
| | **2** | 2,5 | -0,8 | 0,5 | | -1,5 | -1 | -2,4 | | 0,82 | 3,00 | |
| | **3** | 0,2 | -2,3 | -3,1 | -1,8 | -1 | 0,5 | -0,5 | -1,9 | 2,77 | 4,93 | 3,42 |
| | **4** | -1,4 | -1,6 | -3,9 | -4,7 | -0,9 | 0,1 | 0,6 | -0,4 | 1,28 | 7,79 | 11,13 |
| | **5** | 0 | 1,4 | -0,2 | -2,5 | 0 | 0,9 | 1 | 1,5 | 1,39 | 0,52 | 4,25 |
| | **6** | 1,4 | 1,4 | 2,8 | 1,2 | 1,2 | 1,2 | 2,1 | 2,2 | 1,70 | 6,13 | 3,14 |
| | **7** | 2,1 | 0,7 | 2,1 | 3,5 | 2,4 | 1,2 | 2,4 | 3,3 | 0,96 | 5,09 | 11,57 |
| | **8** | -0,3 | -2,4 | -1,7 | -0,3 | 0,7 | -1,7 | -0,5 | 0,7 | 4,33 | 1,57 | 0,29 |
| | **9** | 0,8 | 1,1 | -1,3 | -0,6 | 0,3 | -0,4 | -2,1 | -0,9 | 0,69 | 3,05 | 0,58 |
| | **10** | -1,6 | -2,4 | -1,3 | -3,7 | 0,3 | 0 | -0,4 | -2,1 | 2,88 | 0,93 | 9,05 |
| | | | | | | | | | $x^2_{Mittel}$ | 1,86 | 3,67 | 5,43 |
| | | | | | | | | | $x^2_{Mittel}/n$ | 1,86 | 1,84 | 1,81 |
| **Teilchen2** | **0** | -4 | | | | 1,9 | | | | | | |
| | **1** | -0,8 | 3,2 | | | 1 | -0,9 | | | 5,53 | | |
| | **2** | 0 | 0,8 | 4 | | -0,9 | -1,9 | -2,8 | | 2,13 | 11,92 | |
| | **3** | 1,3 | 1,3 | 2,1 | 5,3 | -0,8 | 0,1 | -1,8 | -2,7 | 0,85 | 3,83 | 17,69 |
| | **4** | 0,7 | -0,6 | 0,7 | 1,5 | -0,3 | 0,5 | 0,6 | -1,3 | 0,30 | 0,42 | 1,97 |
| | **5** | 1,3 | 0,6 | 0 | 1,3 | 0 | 0,3 | 0,8 | 0,9 | 0,23 | 0,32 | 1,25 |
| | **6** | 0 | -1,3 | -0,7 | -1,3 | 2,1 | 2,1 | 2,4 | 2,9 | 3,05 | 3,13 | 5,05 |
| | **7** | -1,6 | -1,6 | -2,9 | -2,3 | 1,7 | -0,4 | 1,7 | 2 | 1,36 | 5,65 | 4,64 |
| | **8** | -0,6 | 1 | -0,6 | -1,9 | 0,9 | -0,8 | -1,2 | 0,9 | 0,82 | 0,90 | 2,21 |
| | **9** | 1,2 | 1,8 | 2,8 | 1,2 | 0,2 | -0,7 | -1,5 | -1,9 | 1,87 | 5,04 | 2,52 |
| | **10** | 0 | -1,2 | 0,6 | 1,6 | 0 | -0,2 | -0,9 | -1,7 | 0,74 | 0,58 | 2,73 |
| | | | | | | | | | $x^2_{Mittel}$ | 1,69 | 3,53 | 4,76 |
| | | | | | | | | | $x^2_{Mittel}/n$ | 1,69 | 1,77 | 1,59 |
| **Teilchen3** | **0** | -0,2 | | | | -1 | | | | | | |
| | **1** | 2,3 | 2,5 | | | 0,5 | 1,5 | | | 4,25 | | |
| | **2** | 1 | -1,3 | 1,2 | | 0 | -0,5 | 1 | | 0,97 | 1,22 | |
| | **3** | -0,7 | -1,7 | -3 | -0,5 | 1,4 | 1,4 | 0,9 | 2,4 | 2,42 | 4,91 | 3,00 |
| | **4** | -1,9 | -1,2 | -2,9 | -4,2 | 2 | 0,6 | 2 | 1,5 | 0,90 | 6,21 | 9,95 |
| | **5** | -0,4 | 1,5 | 0,3 | -1,4 | 1,5 | -0,5 | 0,1 | 1,5 | 1,25 | 0,05 | 2,11 |
| | **6** | 1,5 | 1,9 | 3,4 | 2,2 | -0,4 | -1,9 | -2,4 | -1,8 | 3,61 | 8,66 | 4,04 |
| | **7** | 0,4 | -1,1 | 0,8 | 2,3 | -1,2 | -0,8 | -2,7 | -3,2 | 0,93 | 3,96 | 7,76 |
| | **8** | 0 | -0,4 | -1,5 | 0,4 | 0 | 1,2 | 0,4 | -1,5 | 0,80 | 1,21 | 1,21 |
| | **9** | -1 | -1 | -1,4 | -2,5 | 0,9 | 0,9 | 2,1 | 1,3 | 0,91 | 3,19 | 3,97 |
| | **10** | -1,8 | -0,8 | -1,8 | -2,2 | 1,3 | 0,4 | 1,3 | 2,5 | 0,40 | 2,46 | 5,54 |
| | | | | | | | | | $x^2_{Mittel}$ | 1,64 | 3,54 | 4,70 |
| | | | | | | | | | $x^2_{Mittel}/n$ | 1,64 | 1,77 | 1,57 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Teilchen4** | **0** | -4 | | | | 0,1 | | | | | | |
| | **1** | -2,3 | 1,7 | | | -2 | -2,1 | | | 3,65 | | |
| | **2** | -1,5 | 0,8 | 2,5 | | -2,3 | -0,3 | -2,4 | | 0,36 | 6,00 | |
| | **3** | -2 | -0,5 | 0,3 | 2 | 0,1 | 2,4 | 2,1 | 0 | 3,00 | 2,25 | 2,00 |
| | **4** | -0,2 | 1,8 | 1,3 | 2,1 | 1,8 | 1,7 | 4,1 | 3,8 | 3,06 | 9,25 | 9,43 |
| | **5** | 0,8 | 1 | 2,8 | 2,3 | 1 | -0,8 | 0,9 | 3,3 | 0,82 | 4,33 | 8,09 |
| | **6** | 1,9 | 1,1 | 2,1 | 3,9 | -0,1 | -1,1 | -1,9 | -0,2 | 1,21 | 4,01 | 7,63 |
| | **7** | 0,7 | -1,2 | -0,1 | 0,9 | -1,1 | -1 | -2,1 | -2,9 | 1,22 | 2,21 | 4,61 |
| | **8** | -0,4 | -1,1 | -2,3 | -1,2 | -0,1 | 1 | 0 | -1,1 | 1,11 | 2,65 | 1,33 |
| | **9** | -1,6 | -1,2 | -2,3 | -3,5 | 1,1 | 1,2 | 2,2 | 1,2 | 1,44 | 5,07 | 6,84 |
| | **10** | -1,5 | 0,1 | -1,1 | -2,2 | -0,8 | -1,9 | -0,7 | 0,3 | 1,81 | 0,85 | 2,46 |
| | | | | | | | | | $x^2_{Mittel}$ | 1,77 | 4,07 | 5,30 |
| | | | | | | | | | $x^2_{Mittel}/n$ | 1,77 | 2,04 | 1,77 |
| **Teilchen5** | **0** | 0,2 | | | | -0,8 | | | | | | |
| | **1** | 1,7 | 1,5 | | | 0 | 0,8 | | | 1,45 | | |
| | **2** | 2,2 | 0,5 | 2 | | 1 | 1 | 1,8 | | 0,63 | 3,62 | |
| | **3** | 0,4 | -1,8 | -1,3 | 0,2 | 1,7 | 0,7 | 1,7 | 2,5 | 1,87 | 2,29 | 3,15 |
| | **4** | -1,7 | -2,1 | -3,9 | -3,4 | 3 | 1,3 | 2 | 3 | 3,05 | 9,61 | 10,28 |
| | **5** | -0,6 | 1,1 | -1 | -2,8 | 1 | -2 | -0,7 | 0 | 2,61 | 0,75 | 3,92 |
| | **6** | 0 | 0,6 | 1,7 | -0,4 | 0 | -1 | -3 | -1,7 | 0,68 | 5,95 | 1,52 |
| | **7** | 1,6 | 1,6 | 2,2 | 3,3 | -0,6 | -0,6 | -1,6 | -3,6 | 1,46 | 3,70 | 11,93 |
| | **8** | 2,5 | 0,9 | 2,5 | 3,1 | 0,5 | 1,1 | 0,5 | -0,5 | 1,01 | 3,25 | 4,93 |
| | **9** | 1,4 | -1,1 | -0,2 | 1,4 | -0,6 | -1,1 | 0 | -0,6 | 1,21 | 0,02 | 1,16 |
| | **10** | -0,9 | -2,3 | -3,4 | -2,5 | 1 | 1,6 | 0,5 | 1,6 | 3,92 | 5,91 | 4,41 |
| | | | | | | | | | $x^2_{Mittel}$ | 1,79 | 3,90 | 5,16 |
| | | | | | | | | | $x^2_{Mittel}/n$ | 1,79 | 1,95 | 1,72 |
| **Teilchen6** | **0** | 3,8 | | | | -1,4 | | | | | | |
| | **1** | 3 | -0,8 | | | 2 | 3,4 | | | 6,10 | | |
| | **2** | 1,5 | -1,5 | -2,3 | | 2,7 | 0,7 | 4,1 | | 1,37 | 11,05 | |
| | **3** | -1 | -2,5 | -4 | -4,8 | 3,4 | 0,7 | 1,4 | 4,8 | 3,37 | 8,98 | 23,04 |
| | **4** | -0,4 | 0,6 | -1,9 | -3,4 | 3,6 | 0,2 | 0,9 | 1,6 | 0,20 | 2,21 | 7,06 |
| | **5** | -0,3 | 0,1 | 0,7 | -1,8 | 2,2 | -1,4 | -1,2 | -0,5 | 0,98 | 0,96 | 1,75 |
| | **6** | -1,3 | -1 | -0,9 | -0,3 | 3,2 | 1 | -0,4 | -0,2 | 1,00 | 0,48 | 0,07 |
| | **7** | -0,3 | 1 | 0 | 0,1 | 2,2 | -1 | 0 | -1,4 | 1,00 | 0 | 0,98 |
| | **8** | -0,9 | -0,6 | 0,4 | -0,6 | -0,1 | -2,3 | -3,3 | -2,3 | 2,83 | 5,53 | 2,83 |
| | **9** | 0,6 | 1,5 | 0,9 | 1,9 | -0,6 | -0,5 | -2,8 | -3,8 | 1,25 | 4,33 | 9,03 |
| | **10** | 0 | -0,6 | 0,9 | 0,3 | -0,8 | -0,2 | -0,7 | -3 | 0,20 | 0,65 | 4,54 |
| | | | | | | | | | $x^2_{Mittel}$ | 1,83 | 3,80 | 6,16 |
| | | | | | | | | | $x^2_{Mittel}/n$ | 1,83 | 1,90 | 2,05 |

# 4 Auswertung

Nach (1) und (3) lässt sich jetzt also aus unseren Messwerten berechnen:

| n | $\overline{x^2}_{n\tau}/cm^2$ | $\frac{1}{n}\overline{x^2}_{n\tau}/cm^2s^{-1}$ | $D \cdot \frac{10^{13}}{m^2s^{-1}}$ | $r/\mu m$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,76 | 1,76 | 4,025 | 0,60 |
| 2 | 3,75 | 1,88 | 4,282 | 0,56 |
| 3 | 5,25 | 1,75 | 3,996 | 0,60 |

Es ergibt sich also eine mittlere Diffusionskonstante zu $\overline{D} = 4,10 \cdot 10^{-13}\,\frac{m^2}{s}$ und ein mittlerer Kugelradius von $\overline{r} = 0,59\,\mu m$. Die Boltzmann-Konstante k haben wir hierbei als bekannt vorausgesetzt und sie beträgt $k = 1,38 \cdot 10^{-23}\,\frac{J}{K}$.

## 4.1 Fehlerbetrachtung

Fehler der einzelnen Messgrößen:

- Strichstärke der Skala: $5\,mm \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta V_N'}{V_N'} = 2,78\,\%$
- Temperatur: $\Delta T = \pm 2\,K$ (geschätzt) $\quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\eta}{\eta} \approx 5\,\%$ (abgelesen aus Diagramm)
- Standardabweichung der Diffusionskonstante: Aus unseren 3 gemessenen Werten ergibt sich: $\frac{\Delta D}{D}\big|_{zuf} = \pm 3,13\,\%$
- Standardabweichung des Weges x : $(\Delta x)^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$
  Die Standardabweichung beläuft sich hier auf (70 - 80)% und übertrifft damit bei weitem die der Diffusionskonstante, weshalb wir sie in der weiteren Fehleranalyse nicht berücksichtigen werden.
- Zeitmessung: $\Delta\tau = \pm 1\,s$ (geschätzt, als Zeit zwischen Ansage und Ablesen)

Für die Diffusionskonstante (siehe (1)) ergibt sich also:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta D}{D}\bigg|_{sys} + \frac{\Delta D}{D}\bigg|_{zuf} = 2\frac{\Delta V_N'}{V_N'} + \frac{\Delta\tau}{\tau} + \frac{\Delta D}{D}\bigg|_{zuf}$$

$$\frac{\Delta D}{D} = \pm(5,6 + 10 + 3,1)\,\% = \pm 18,7\,\%$$

Das ist der Fehler für die D-Messung bei einfachem $\tau$. Für $2\tau$ und $3\tau$ haben wir bei der Messung nichts verändert, es bleibt also beim selben Fehler, da der Zeitfehler nun $\pm 2\,s$ auf 20 s bzw. $\pm 3\,s$ auf 30 s beträgt.

Der Fehler für den Radius (siehe (3)) erhält man aus:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta\eta}{\eta} + \frac{\Delta D}{D}$$

$$\frac{\Delta r}{r} = \pm(0,7 + 5,0 + 18,7)\,\% = \pm 24,4\,\%$$

# 5 Ergebnis

Wir erhalten also folgenden Größen:

| | | |
|---|---|---|
| Vergrößerung des Mikroskops: | $V'_N = 4680 \pm 130$ | $\frac{\Delta V'_N}{V'_N} = \pm 2,8\,\%$ |
| mittlere Diffusionskonstante: | $D = (4,10 \pm 0,77) \cdot 10^{-13}\,\frac{m^2}{s}$ | $\frac{\Delta D}{D} = \pm 18,7\,\%$ |
| mittlerer Teilchenradius: | $r = (0,59 \pm 0,14)\,\mu m$ | $\frac{\Delta r}{r} = \pm 24,4\,\%$ |

Zusätzlich konnten wir den Nachweis erbringen, dass sich $\overline{x^2}$ direkt proportional zur Intervalllänge $\tau$ verhält, da das Verhältnis $\frac{\overline{x^2}}{\tau}$ nahezu konstant bleibt. Das verlangt die Theorie (siehe (2)), wenn die Verschiebung x (in unseren Messwerten $\Delta x$) in jede Richtung gleichwahrscheinlich ist. Das Bestätigen dieses Zusammenhanges berechtigt uns dazu, die Werte für die Diffusionskonstante und den Teilchenradius nach (1) und (3) auszurechnen.

Erwähnt werden muss aber, dass wir den statistischen Fehler $\Delta x$ nicht mit eingerechnet haben, da uns dieser verhältnismäßig zu groß vorkam und in unserem Fall sicherlich nicht so anwendbar ist.

Wegen Zeitmangel konnten wir leider nur 6 Teilchen beobachten, jedoch haben wir einen statistischen Fehler, der kleiner ist als erwartet. Daraus schließen wir, dass wir auch mit unseren wenigen Messwerten ein sinnvolles Ergebnis erhalten haben, jedoch sind zur weiteren Sicherheit eigentlich mehr Messwerte nötig.

Aus der Fehleranalyse erkennt man, dass die Temperaturschwankung im Versuchsraum vernachlässigt werden kann, keinesfalls jedoch die zeitliche Unsicherheit. Verbessern könnte man den Zeitfaktor, indem man z.B. ein Computer-gestütztes Messverfahren entwickelt. Allerdings wird das sehr schwierig, weil man als Mensch manchmal nur erahnen kann, wo sich das Teilchen momentan befindet, da sich dieses ab und zu auch aus der Fokus-Ebene bewegt. Vielleicht könnte man sich auch ein neues Präparationsverfahren einfallen lassen, so dass nicht so viel Zeit beim wiederholten Anfertigen der Probe verloren geht.