Vorlesung Kategorientheorie

2. Übung am 25.1.2022

Die **Aufgaben 6** und **10** sind **schriftlich** (bis spätestens zu Beginn der Übung) zu lösen.

Bemerkung: Die Aufgaben können sicher nicht alle in der Übung besprochen werden. Vorrangig sollen solche Aufgaben behandelt werden, zu denen Sie Fragen haben (also bitte schon mal anschauen).

Aufgabe 1 Es sei $\Sigma = (V, E, \alpha, \beta)$ ein Diagrammschema und seien $A, B \in V$. Ein *Weg* $p : A \to B$ der Länge n ist eine Folge $e_1 e_2 \dots e_n$ von Kanten aus E, wobei $\alpha(e_1) = A$, $\beta(e_n) = B$ und $\beta(e_i) = \alpha(e_{i+1})$ für $1 \leq i < n$. Es wird auch noch ein „leerer“ Weg 1_A von A nach A (Länge $n = 0$) definiert.

1. Zeigen Sie, dass durch
$$\mathrm{Ob}(\mathcal{S}) := V, \quad \mathcal{S}(A, B) := \{p : A \to B \mid p \text{ Weg}\}$$
eine Kategorie $\mathcal{S}$ definiert ist, wobei die Komposition von Morphismen die Verkettung von Wegen sei.
2. Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\varphi : \Sigma \to \mathcal{C}$ ein Diagramm. Zeigen Sie, dass sich φ eindeutig zu einem Funktor $\hat{\varphi} : \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ fortsetzen lässt.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass eine natürliche Transformation $\eta = (\eta_A)$ (als Morphismus der entsprechenden Funktorkategorie, vgl. Vorl. 3.7) genau dann ein Isomorphismus ist, wenn alle ihre Komponenten η_A Isomorphismen sind. Gilt eine entsprechende Aussage auch für natürliche Transformationen, die Monomorphismen sind?

Aufgabe 3 Beschreiben Sie initiale und terminale Objekte (falls sie existieren) der folgenden Kategorien

a) $\underline{P}_{\mathrm{cat}}$ (wobei $\underline{P} = (P, \leq)$, vgl. Vorl. 1.8),

b) $\underline{\mathrm{Set}}$,

c) $\underline{\mathrm{RelSet}}$ (vgl. Vorl. 1.6),

d) $\underline{\mathrm{Mat}}_R$ (vgl. Vorl. 1.7).

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass Differenzkerne (Equalizer) stets Monomorphismen sind. Folgern Sie, dass Differenzkokerne stets Epimorphismen sind.

Aufgabe 5 Charakterisieren Sie die binären Relationen, die Monomorphismen bzw. Epimorphismen in der Kategorie RelSet sind.

Aufgabe 6 Gegeben sei folgendes Pullback-Diagramm in einer beliebigen Kategorie:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "b"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Beweisen Sie:
f Monomorphismus (bzw. Isomorphismus) $\Longrightarrow$ a Monomorphismus (bzw. Isomorphismus)

und formulieren Sie die dazu duale Aussage.

Aufgabe 7 Beweisen Sie, dass ein Morphismus $m : X \to Y$ genau dann Monomorphismus ist, wenn folgendes Diagramm ein Pullback-Diagramm ist:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "1_X"'] & X \arrow[d, "m"] \\ X \arrow[r, "m"] & Y \end{tikzcd}$$

Beweisen Sie mit Hilfe dieser Tatsache, dass ein Funktor, der Pullbacks respektiert, auch Monomorphismen bewahrt.

Aufgabe 8 Gegeben sei folgendes Pushout-Diagramm in Set:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "a"] \\ X \arrow[r, "b"] & Y \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass b Monomorphismus ist, falls f Monomorphismus ist.
(Bemerkung: Diese Aussage gilt nicht in allen Kategorien!)

Aufgabe 9 Finden Sie ein Beispiel eines treuen und vollen Funktors, der kein Isomorphismus ist. Geben Sie Konstruktion und Beweis an. (Hinweis: Funktoren aus Aufgabe 3 der 1. Übung)

Aufgabe 10 Für eine Menge A bezeichne A^* die Menge aller endlichen Tupel (Wörter) über A, d.h.

$$A^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n.$$

Dabei sei $A^0 = \{()\}$ die Menge, die nur aus dem Tupel der Länge 0 besteht (leeres Tupel $()$). Es sei $F : \underline{\mathrm{Set}} \to \underline{\mathrm{Set}} : A \mapsto A^*$ und $G = F; F$. Zeigen Sie, dass die wie folgt definierten Abbildungen natürliche Transformationen rev, inits, concat bestimmen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rev} &: F \Rightarrow F\\
\mathrm{rev}_A &: A^* \to A^* : (a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_n, \dots, a_1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{inits} &: F \Rightarrow G\\
\mathrm{inits}_A &: A^* \to A^{**} : (a_1, \dots, a_n) \mapsto ((), (a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_1, \dots, a_n)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{concat} &: G \Rightarrow F\\
\mathrm{concat}_A &: (w_1, \dots, w_n) \mapsto w_1 \cdots w_n \text{ (Aneinanderhängen (Konkatenation) der Wörter).}
\end{aligned}$$

Aufgabe 11 Es sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie und $F : \mathcal{C} \to \underline{\mathrm{Set}}$ ein Funktor. Beschreiben Sie den[1] Kolimes und den[1] Limes von F (durch konkrete Angabe geeigneter Mengen und Abbildungen (Koprojektionen bzw. Projektionen)).

Aufgabe 12 Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Beschreiben Sie Koprodukte in $\mathcal{C}$ als initiale Objekte einer geeigneten Kategorie.

Aufgabe 13 Es sei <u>Mon</u> die Kategorie der Monoide mit Monoidhomomorphismen als Morphismen. Weiter sei U der Vergissfunktor, der jedem Monoid $\underline{M} = (M, \cdot, 1)$ seine Trägermenge M zuordnet (auf Morphismen wirkt U als Identität). Sei nun A eine Menge und A^* (vgl. Aufg. 10) das Monoid aller Wörter über

[1]genauer: einen

dem Alphabet A (die Multiplikation ist die Konkatenation von Wörtern und das neutrale Element ist das leere Wort). Schließlich sei $u_A : A \to U(A^*) : a \mapsto (a)$ (jeder Buchstabe wird auf das Wort abgebildet, was genau aus diesem Buchstaben besteht). Zeigen Sie, dass (A^*, u_a) ein freies Objekt von $\underline{\text{Mon}}$ über A (bezüglich U) ist (vgl. Vorl. 4.5).

Aufgabe 14 Es seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ vollständige Kategorien und $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor. Zeigen Sie:

a) F respektiert (bewahrt) Limites $\iff$ F bewahrt Produkte und Differenzkerne.

b) F entdeckt Limites $\iff$ F entdeckt Produkte und Differenzkerne.

Aufgabe 15 Es sei $F : \underline{\text{Set}} \to \underline{\text{Set}}$ ein Funktor. Eine F-Algebra ist ein Paar (X, f_X), wobei $X \in \text{Ob}(\underline{\text{Set}})$, $f_X : F(X) \to X$. Seien (X, f_X) und (Y, f_Y) F-Algebren. Eine Funktion $h : X \to Y$ heißt Homomorphismus (mitunter auch F-Homomorphismus), falls das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "f_X"] \arrow[d, "F(h)"'] & X \arrow[d, "h"] \\ F(Y) \arrow[r, "f_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Die Kategorie der F-Algebren werde mit $\underline{\text{Set}}^F$ bezeichnet. Es sei $U : \underline{\text{Set}}^F \to \underline{\text{Set}}$ der Vergissfunktor (gegeben durch $(X, f_X) \mapsto X$, $h \mapsto h$). Zeigen Sie:

a) U ist ein Funktor,

b) U entdeckt Limites,

c) $\underline{\text{Set}}^F$ ist vollständig,

d) U respektiert Limites.

Aufgabe 16 Zeigen Sie, dass es keinen Funktor von $\underline{\text{Group}}$ nach $\underline{\text{Set}}$ gibt, der jede Gruppe auf die Menge aller ihrer Elemente mit Ordnung 2 abbildet, wie auch immer die Wirkung auf den Morphismen definiert wird (x hat Ordnung 2, falls $x \neq 1$ und $x^2 = 1$). Zeigen Sie, dass es einen solchen Funktor von $\underline{\text{Group}}$ nach $\underline{\text{RelSet}}$ gibt.

Aufgabe 17 Zeigen Sie die in der Vorlesung noch nicht bewiesene Aussage aus Beispiel 6.4., dass der Produktfunktor $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} : (X, Y) \mapsto X \times Y$ rechtsadjungiert zum Diagonalfunktor $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C} : X \mapsto (X, X)$ ist.

Aufgabe 18 Zunächst einige Bezeichnungen und Definitionen: Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit endlichen Produkten. Ein *Exponentialobjekt* für zwei Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ist ein Objekt von $\mathcal{C}$, Bezeichnung Y^X, zusammen mit einem *Auswertungsmorphismus* $\mathrm{ev}\colon Y^X \times X \to Y$, so dass gilt:

$$\forall Z \in \mathcal{C}\, \forall u\colon Z \times X \to Y\ \exists! \widetilde{u}\colon Z \to Y^X : u = (\widetilde{u} \times \mathrm{id}_X); \mathrm{ev}$$

(hier bezeichnet $\widetilde{u} \times \mathrm{id}_X : (Z \times X) \to (Y^X \times X)$ das durch die Produkteigenschaft von $Y^X \times X$ eindeutig bestimmte „Tupeling“ der Morphismen $p_1; \widetilde{u} : Z \times X \to Z \to Y^X$ und $p_2; \mathrm{id}_X : Z \times X \to X \to X$, vgl. Vorl. 4.6). Man sagt, dass $\widetilde{u}$ aus u durch *currying* entsteht (Zusatzaufgabe: Wie sieht das *currying* in $\underline{\mathrm{Set}}$ aus?)

Es sei nun $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit endlichen Produkten ($\times$), Koprodukten ($+$) und Exponentialobjekten (solche Kategorien nennt man auch *kartesisch abgeschlossene Kategorien*). Zeigen Sie, dass dann für alle $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ folgendes gilt:

(a) $(X^Y)^Z \cong X^{(Y \times Z)}$,

(b) $(Y \times X) + (Z \times X) \cong (Y + Z) \times X$.

Es gilt also eine Art Potenzgesetz ($(a^b)^c = a^{bc}$) für die Exponentiation und eine Form von Distributivität ($ba + ca = (b + c)a$) für Produkt und Koprodukte.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist eine Übungsaufgabe zur YONEDA-Einbettung, genauer zur Anwendung den YONEDA-Prinzips.

Aufgabe 19 Freuen Sie sich über die elegante Einfachheit, mit der die Aussagen aus Aufgabe 18 mit Hilfe des YONEDA-Prinzips bewiesen wurden.[2]

[2]© Sebastian Kerkhoff, Vorlesung Kategorientheorie 2012