

Vorlesung Kategorientheorie
2. Übung am 25.6.2019

Die **Aufgaben 6** und **10** sind **schriftlich** (bis spätestens zu Beginn der Übung) zu lösen.

Bemerkung: Die Aufgaben können sicher nicht alle in der Übung besprochen werden. Vorrangig sollen solche Aufgaben behandelt werden, zu denen Sie Fragen haben (also bitte schon mal anschauen).

Aufgabe 1 Es sei $\Sigma = (V, E, \alpha, \beta)$ ein Diagrammschema und seien $A, B \in V$. Ein Weg $p : A \rightarrow B$ der Länge n ist eine Folge $e_1 e_2 \dots e_n$ von Kanten aus E , wobei $\alpha(e_1) = A$, $\beta(e_n) = B$ und $\beta(e_i) = \alpha(e_{i+1})$ für $1 \leq i < n$. Es wird auch noch ein „leerer“ Weg 1_A von A nach A (Länge $n = 0$) definiert.

1. Zeigen Sie, dass durch

$$\text{Ob}(\mathcal{S}) := V, \quad \mathcal{S}(A, B) := \{p : A \rightarrow B \mid p \text{ Weg}\}$$

eine Kategorie \mathcal{S} definiert ist, wobei die Komposition von Morphismen die Verkettung von Wegen sei.

2. Es sei \mathcal{C} eine Kategorie und $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm. Zeigen Sie, dass sich φ eindeutig zu einem Funktor $\hat{\varphi} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ fortsetzen lässt.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass eine natürliche Transformation $\eta = (\eta_A)$ (als Morphismus der entsprechenden Funktorkategorie, vgl. Vorl. 3.7) genau dann ein Isomorphismus ist, wenn alle ihre Komponenten η_A Isomorphismen sind. Gilt eine entsprechende Aussage auch für natürliche Transformationen, die Monomorphismen sind?

Aufgabe 3 Beschreiben Sie initiale und terminale Objekte (falls sie existieren) der folgenden Kategorien

- a) $\underline{P}_{\text{cat}}$ (wobei $\underline{P} = (P, \leq)$, vgl. Vorl. 1.8),
- b) $\underline{\text{Set}}$,
- c) $\underline{\text{RelSet}}$ (vgl. Vorl. 1.6),
- d) $\underline{\text{Mat}}_R$ (vgl. Vorl. 1.7).

Aufgabe 4 Zeigen Sie, dass Differenzkerne (Equalizer) stets Monomorphismen sind. Folgern Sie, dass Differenzkokerne stets Epimorphismen sind.

Aufgabe 5 Charakterisieren Sie die binären Relationen, die Monomorphismen bzw. Epimorphismen in der Kategorie RelSet sind.

Aufgabe 6 Gegeben sei folgendes Pullback-Diagramm in einer beliebigen Kategorie:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{b} & B \\ a \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Beweisen Sie:

f Monomorphismus (bzw. Isomorphismus) $\implies a$ Monomorphismus (bzw. Isomorphismus)

und formulieren Sie die dazu duale Aussage.

Aufgabe 7 Beweisen Sie, dass ein Morphismus $m : X \rightarrow Y$ genau dann Monomorphismus ist, wenn folgendes Diagramm ein Pullback-Diagramm ist:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1_X} & X \\ 1_X \downarrow & & \downarrow m \\ X & \xrightarrow{m} & Y \end{array}$$

Beweisen Sie mit Hilfe dieser Tatsache, dass ein Funktor, der Pullbacks respektiert, auch Monomorphismen bewahrt.

Aufgabe 8 Gegeben sei folgendes Pushout-Diagramm in Set:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow a \\ X & \xrightarrow{b} & Y \end{array}$$

Zeigen Sie, dass b Monomorphismus ist, falls f Monomorphismus ist.

(Bemerkung: Diese Aussage gilt nicht in allen Kategorien!)

Aufgabe 9 Finden Sie ein Beispiel eines treuen und vollen Funktors, der kein Isomorphismus ist. Geben Sie Konstruktion und Beweis an. (Hinweis: Funktoren aus Aufgabe 3 der 1. Übung)

Aufgabe 10 Für eine Menge A bezeichne A^* die Menge aller endlichen Tupel (Wörter) über A , d.h.

$$A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n.$$

Dabei sei $A^0 = \{()\}$ die Menge, die nur aus dem Tupel der Länge 0 besteht (leeres Tupel $()$). Es sei $F : \underline{\text{Set}} \rightarrow \underline{\text{Set}} : A \mapsto A^*$ und $G = F; F$. Zeigen Sie, dass die wie folgt definierten Abbildungen natürliche Transformationen rev , inits , concat bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{rev} : F &\Rightarrow F \\ \text{rev}_A : A^* &\rightarrow A^* : (a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_n, \dots, a_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{inits} : F &\Rightarrow G \\ \text{inits}_A : A^* &\rightarrow A^{**} : (a_1, \dots, a_n) \mapsto ((), (a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_1, \dots, a_n)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{concat} : G &\Rightarrow F \\ \text{concat}_A : (w_1, \dots, w_n) &\mapsto w_1 \cdots w_n \text{ (Aneinanderhängen (Konkatenation) der Wörter)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11 Es sei \mathcal{C} eine beliebige Kategorie und $F : \mathcal{C} \rightarrow \underline{\text{Set}}$ ein Funktor. Beschreiben Sie den¹ Kolimes und den¹ Limes von F (durch konkrete Angabe geeigneter Mengen und Abbildungen (Koprojektionen bzw. Projektionen)).

Aufgabe 12 Es sei \mathcal{C} eine Kategorie. Beschreiben Sie Koprodukte in \mathcal{C} als initiale Objekte einer geeigneten Kategorie.

Aufgabe 13 Es sei $\underline{\text{Mon}}$ die Kategorie der Monoide mit Monoidhomomorphismen als Morphismen. Weiter sei U der Vergissfunktorktor, der jedem Monoid $\underline{M} = (M, \cdot, 1)$ seine Trägermenge M zuordnet (auf Morphismen wirkt U als Identität). Sei nun A eine Menge und A^* (vgl. Aufg. 10) das Monoid aller Wörter über

¹genauer: einen

dem Alphabet A (die Multiplikation ist die Konkatenation von Wörtern und das neutrale Element ist das leere Wort). Schließlich sei $u_A : A \rightarrow U(A^*) : a \mapsto (a)$ (jeder Buchstabe wird auf das Wort abgebildet, was genau aus diesem Buchstaben besteht). Zeigen Sie, dass (A^*, u_a) ein freies Objekt von Mon über A (bezüglich U) ist (vgl. Vorl. 4.5).

Aufgabe 14 Es seien \mathcal{C} und \mathcal{D} vollständige Kategorien und $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Zeigen Sie:

- F respektiert (bewahrt) Limites $\iff F$ bewahrt Produkte und Differenzkerne.
- F entdeckt Limites $\iff F$ entdeckt Produkte und Differenzkerne.

Aufgabe 15 Es sei $F : \underline{\text{Set}} \rightarrow \underline{\text{Set}}$ ein Funktor. Eine F -Algebra ist ein Paar (X, f_X) , wobei $X \in \text{Ob}(\underline{\text{Set}})$, $f_X : F(X) \rightarrow X$. Seien (X, f_X) und (Y, f_Y) F -Algebren. Eine Funktion $h : X \rightarrow Y$ heißt Homomorphismus (mitunter auch F -Homomorphismus), falls das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{f_X} & X \\ F(h) \downarrow & & \downarrow h \\ F(Y) & \xrightarrow{f_Y} & Y \end{array}$$

Die Kategorie der F -Algebren werde mit $\underline{\text{Set}}^F$ bezeichnet. Es sei $U : \underline{\text{Set}}^F \rightarrow \underline{\text{Set}}$ der Vergissfunktor (gegeben durch $(X, f_X) \mapsto X$, $h \mapsto h$). Zeigen Sie:

- U ist ein Funktor,
- U entdeckt Limites,
- $\underline{\text{Set}}^F$ ist vollständig,
- U respektiert Limites.

Aufgabe 16 Zeigen Sie, dass es keinen Funktor von Group nach Set gibt, der jede Gruppe auf die Menge aller ihrer Elemente mit Ordnung 2 abbildet, wie auch immer die Wirkung auf den Morphismen definiert wird (x hat Ordnung 2, falls $x \neq 1$ und $x^2 = 1$). Zeigen Sie, dass es einen solchen Funktor von Group nach RelSet gibt.

Aufgabe 17 Zeigen Sie die in der Vorlesung noch nicht bewiesene Aussage aus Beispiel 6.4., dass der Produktfunctor $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} : (X, Y) \mapsto X \times Y$ rechtsadjungiert zum Diagonalfunctor $\Delta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C} : X \mapsto (X, X)$ ist.

Aufgabe 18 Zunächst einige Bezeichnungen und Definitionen: Es sei \mathcal{C} eine Kategorie mit endlichen Produkten. Ein *Exponentialobjekt* für zwei Objekte $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ist ein Objekt von \mathcal{C} , Bezeichnung Y^X , zusammen mit einem *Auswertungsmorphismus* $\text{ev} : Y^X \times X \rightarrow Y$, so dass gilt:

$$\forall Z \in \mathcal{C} \forall u : Z \times X \rightarrow Y \exists ! \tilde{u} : Z \rightarrow Y^X : u = (\tilde{u} \times \text{id}_X); \text{ev}$$

(hier bezeichnet $\tilde{u} \times \text{id}_X : (Z \times X) \rightarrow (Y^X \times X)$ das durch die Produkteigenschaft von $Y^X \times X$ eindeutig bestimmte „Tupeling“ der Morphismen $p_1; \tilde{u} : Z \times X \rightarrow Z \rightarrow Y^X$ und $p_2; \text{id}_X : Z \times X \rightarrow X \rightarrow X$, vgl. Vorl. 4.6). Man sagt, dass \tilde{u} aus u durch *currying* entsteht (Zusatzaufgabe: Wie sieht das *currying* in Set aus?)

Es sei nun \mathcal{C} eine Kategorie mit endlichen Produkten (\times), Koprodukten ($+$) und Exponentialobjekten (solche Kategorien nennt man auch *kartesisch abgeschlossene Kategorien*). Zeigen Sie, dass dann für alle $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ folgendes gilt:

- (a) $(X^Y)^Z \cong X^{(Y \times Z)}$,
- (b) $(Y \times X) + (Z \times X) \cong (Y + Z) \times X$.

Es gilt also eine Art Potenzgesetz $((a^b)^c = a^{bc})$ für die Exponentiation und eine Form von Distributivität $(ba + ca = (b + c)a)$ für Produkt und Koprodukte.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist eine Übungsaufgabe zur YONEDA-Einbettung, genauer zur Anwendung den YONEDA-Prinzips.

Aufgabe 19 Freuen Sie sich über die elegante Einfachheit, mit der die Aussagen aus Aufgabe 18 mit Hilfe des YONEDA-Prinzips bewiesen wurden.²

²© Sebastian Kerkhoff, Vorlesung Kategorientheorie 2012