

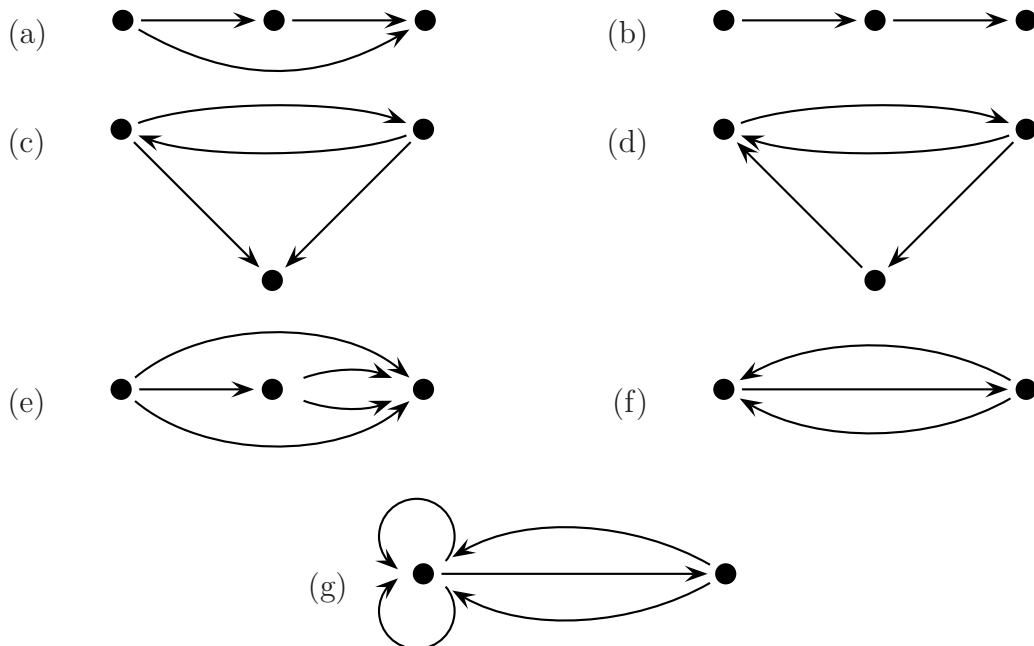
Vorlesung Kategorientheorie WS2021/22

1. Übung am 7.12.2021
(7. DS, WIL C115 (Änderung möglich))

Die **Aufgaben 1(a)-(d)** und (wenn möglich) **7(a),(b),(d),(g)** sind **schriftlich** zu lösen (vor der Übung).

Bemerkung: Die Aufgaben können sicher nicht alle in der Übung besprochen werden. Vorrangig sollen solche Aufgaben behandelt werden, zu denen Sie Fragen haben.

Aufgabe 1 Welche der folgenden Diagrammschemata sind das Diagrammschema einer geeigneten Kategorie? Beachten Sie, dass die immer existierenden identischen Morphismen 1_A in den Schemata nicht eingezeichnet sind (d.h. jeder Pfeil steht für einen nicht identischen Morphismus). Begründen Sie Ihre Antwort (z.B. durch Angabe einer Kategorie mit diesem Schema).



Aufgabe 2 Es sei P eine beliebige Menge und $\varrho \subseteq P \times P$ eine binäre Relation. Die „Kategorie“ $\underline{P}_{\text{cat}}$ wird wie in 1.8 (Vorlesung) definiert $\text{Ob}(\underline{P}_{\text{cat}}) := P$,

$$\underline{P}_{\text{cat}}(a, b) := \begin{cases} \{(a, b)\} & \text{falls } (a, b) \in \varrho, \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases}$$
 für Objekte $a, b \in P$.

- (1) Beweisen Sie, dass $\underline{P}_{\text{cat}}$ genau dann eine Kategorie ist, wenn ϱ reflexiv und transitiv ist (d.h. $\underline{P} = (P, \varrho)$ ist eine *Prä-* oder *Quasiordnung*).

- (2) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass eine Kategorie \mathcal{C} von der Form $\underline{P}_{\text{cat}}$ für eine Präordnung $\underline{P} = (P, \varrho)$ ist (d.h., dass \mathcal{C} isomorph zu $\underline{P}_{\text{cat}}$ ist).
- (3) Es sei $\underline{P} = (P, \varrho)$ eine geordnete Menge (d.h. ϱ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv). Was ist die Komma-Kategorie $(\underline{P}_{\text{cat}} \downarrow v)$ für ein $v \in P$ (d.h., wie lässt sich die Menge der verallgemeinerten Elemente von v in der Kategorie $\underline{P}_{\text{cat}}$ beschreiben)?

Aufgabe 3 Es seien $\underline{P} = (P, \leq_P)$ und $\underline{Q} = (Q, \leq_Q)$ geordnete Mengen (d.h., Menge mit Ordnungsrelation). Charakterisieren Sie die Funktoren zwischen $\underline{P}_{\text{cat}}$ und $\underline{Q}_{\text{cat}}$.

Aufgabe 4 Für eine Algebra $\underline{M} = (M, f)$ mit der Trägermenge M und einer binären Operation f werde die „Kategorie“ $\underline{M}_{\text{cat}}$ wie folgt definiert: $\text{Ob}(\underline{M}_{\text{cat}}) := \{0\}$ (es gibt also nur ein Objekt, das hier mit 0 bezeichnet wird), $\underline{M}_{\text{cat}}(0, 0) := M$ und $\mu_{0,0,0}(a, b) := f(a, b)$ (Morphismenkomposition, vgl. Def. 1.2). Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass $\underline{M}_{\text{cat}}$ eine Kategorie ist.

Aufgabe 5 Was ist die duale Aussage zu der folgenden kategorientheoretischen Aussage \mathcal{A} über einen Morphismus f ?

$$f \in \mathcal{C}(A, B) \text{ und } \forall C \in \text{Ob}(\mathcal{C}) \forall g_1, g_2 : (g_1, g_2 \in \mathcal{C}(B, C) \wedge f g_1 = f g_2) \Rightarrow g_1 = g_2$$

Finden Sie Morphismen in der Kategorie $\underline{\text{Set}}$, die \mathcal{A} oder \mathcal{A}^{op} bzw. \mathcal{A} und \mathcal{A}^{op} erfüllen. Können Sie die Morphismen in $\underline{\text{Set}}$, die \mathcal{A} bzw. \mathcal{A}^{op} erfüllen, vollständig charakterisieren?

Aufgabe 6 Welche der folgenden Isomorphismen gelten (Beweis)?

- $\underline{\text{RelSet}} \cong \underline{\text{RelSet}}^{\text{op}}$ (vgl. Vorl. 1.6),
- $\underline{\text{Set}} \cong \underline{\text{Set}}^{\text{op}}$,
- $\underline{\mathcal{P}(X)}_{\text{cat}} \cong \underline{\mathcal{P}(X)}_{\text{cat}}^{\text{op}}$ ($\underline{\mathcal{P}(X)} = (\mathcal{P}(X), \subseteq)$ Potenzmenge mit Inklusion).

Aufgabe 7 Die Funktoren $\text{Id}, F, G : \underline{\text{Set}} \rightarrow \underline{\text{Set}}$ seien auf den Objekten wie folgt definiert: $\text{Id } M := M$, $FM := M \times M$, $GM := \{\{x, y\} \mid x, y \in M\}$, was sich in „offensichtlicher“ Weise auf die Morphismen $f : M \rightarrow N$ überträgt ($\text{Id } f = f$ (identischer Funktor), $Ff(x, y) := (fx, fy)$ für $(x, y) \in FM$, $Gf(\{x, y\}) := \{fx, fy\}$ für $\{x, y\} \in GM$). Beschreiben Sie alle(!) natürlichen Transformationen $\eta = (\eta_M)_{M \in \text{Ob}(\underline{\text{Set}})}$ der Form

- | | | |
|---------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| (a) $\text{Id} \Rightarrow \text{Id}$ | (b) $\text{Id} \Rightarrow F$ | (c) $\text{Id} \Rightarrow G$ |
| (d) $F \Rightarrow \text{Id}$ | (e) $F \Rightarrow F$ | (f) $F \Rightarrow G$ |
| (g) $G \Rightarrow \text{Id}$ | (h) $G \Rightarrow F$ | (i) $G \Rightarrow G$. |

Aufgabe 8 Es sei \mathcal{C} eine Kategorie. Zeigen Sie, dass für alle Morphismen $f : X \rightarrow Y$ und $h, h' : Y \rightarrow X$ gilt:

$$fh = 1_X \wedge h'f = 1_Y \implies h = h'.$$

Aufgabe 9 Es sei \mathcal{C} eine Kategorie und $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ seien Morphismen von \mathcal{C} , so dass $fg = 1_X$. Zeigen Sie:

1. f ist Monomorphismus,
2. f Epimorphismus $\implies f$ Isomorphismus.

Aufgabe 10 Eine *partielle Äquivalenzrelation* ist eine symmetrische und transitive Relation. Wir definieren eine Kategorie $\underline{\text{Päq}}$ gemäß

$$\text{Ob}(\underline{\text{Päq}}) := \{(X, \approx_X) \mid X \text{ Menge, } \approx_X \subseteq X \times X \text{ partielle Äquivalenzrelation}\}.$$

Es seien $(X, \approx_X), (Y, \approx_Y) \in \text{Ob}(\underline{\text{Päq}})$. Auf den Funktionen von X nach Y definieren wir eine Äquivalenzrelation ϱ , so dass $(f, f') \in \varrho$ genau dann, wenn

$$\forall x \in X : x \approx_X x \implies f(x) \approx_Y f'(x).$$

Morphismen in $\underline{\text{Päq}}((X, \approx_X), (Y, \approx_Y))$ seien solche Äquivalenzklassen $[f]_\varrho$, für die gilt:

$$\forall x, x' \in X : x \approx_X x' \implies f(x) \approx_Y f(x').$$

Zeigen Sie, dass $\underline{\text{Päq}}$ mit dieser Art Morphismen eine Kategorie bildet. Wie muss dazu die Komposition von Morphismen definiert werden? Was sind die identischen Morphismen?

Aufgabe 11 Wir definieren eine Kategorie $\underline{\text{Pow}}$ gemäß

$$\text{Ob}(\underline{\text{Pow}}) := \{(\mathcal{P}(X), \subseteq) \mid X \text{ Menge}\}.$$

Morphismen seien monotone Funktionen, die die Vereinigung bewahren; d.h. $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ ist Morphismus, falls

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq B \implies f(A) \subseteq f(B)$,
2. $\forall (A_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{P}(X) : f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

Zeigen Sie, dass $\underline{\text{Pow}}$ eine Kategorie ist, die isomorph zu $\underline{\text{RelSet}}$ ist.

Aufgabe 12 Zeigen Sie, dass in der Kategorie $\underline{\text{Set}}$ für Morphismen (=Abbildungen) $f : X \rightarrow Y$ gilt:

- $f \text{ mono} \iff f \text{ injektiv}$,
- $f \text{ epi} \iff f \text{ surjektiv}$.