Vorlesung Kategorientheorie

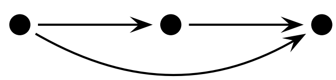
1. Übung am 14.5.2019

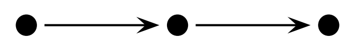
(7. DS, WIL C115)

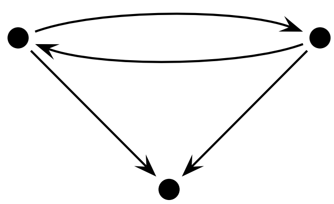
Die **Aufgaben 1(a)-(d)** und **7(a),(b),(d),(g)** sind **schriftlich** zu lösen (vor der Übung).

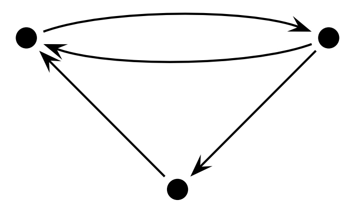
Bemerkung: Die Aufgaben können sicher nicht alle in der Übung besprochen werden. Vorrangig sollen solche Aufgaben behandelt werden, zu denen Sie Fragen haben.

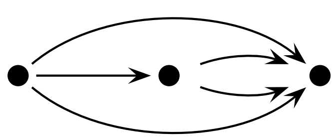
Aufgabe 1 Welche der folgenden Diagrammschemata sind das Diagrammschema einer geeigneten Kategorie? Beachten Sie, dass die immer existierenden identischen Morphismen 1_A in den Schemata nicht eingezeichnet sind (d.h. jeder Pfeil steht für einen nicht identischen Morphismus). Begründen Sie Ihre Antwort (z.B. durch Angabe einer Kategorie mit diesem Schema).

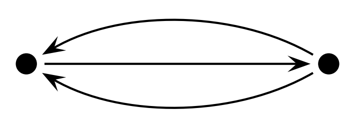
(a) 

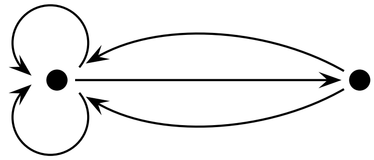
(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

(f) 

(g) 

Aufgabe 2 Es sei P eine beliebige Menge und $\varrho \subseteq P \times P$ eine binäre Relation. Die „Kategorie“ $\underline{P}_{\mathrm{cat}}$ wird wie in 1.8 (Vorlesung) definiert $\mathrm{Ob}(\underline{P}_{\mathrm{cat}}) := P$,

$$\underline{P}_{\mathrm{cat}}(a,b) := \begin{cases} \{(a,b)\} & \text{falls } (a,b) \in \varrho, \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases} \quad \text{für Objekte } a, b \in P.$$

(1) Beweisen Sie, dass $\underline{P}_{\mathrm{cat}}$ genau dann eine Kategorie ist, wenn ϱ reflexiv und transitiv ist (d.h. $\underline{P} = (P, \varrho)$ ist eine *Prä-* oder *Quasiordnung*).

(2) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass eine Kategorie $\mathcal{C}$ von der Form $\underline{P}_{\mathrm{cat}}$ für eine Präordnung $\underline{P} = (P, \varrho)$ ist (d.h., dass $\mathcal{C}$ isomorph zu $\underline{P}_{\mathrm{cat}}$ ist).

(3) Es sei $\underline{P} = (P, \varrho)$ eine geordnete Menge (d.h. ϱ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv). Was ist die Komma-Kategorie $(\underline{P}_{\mathrm{cat}} \downarrow v)$ für ein $v \in P$ (d.h., wie lässt sich die Menge der verallgemeinerten Elemente von v in der Kategorie $\underline{P}_{\mathrm{cat}}$ beschreiben)?

Aufgabe 3 Es seien $\underline{P} = (P, \leq_P)$ und $\underline{Q} = (Q, \leq_Q)$ geordnete Mengen (d.h., Menge mit Ordnungsrelation). Charakterisieren Sie die Funktoren zwischen $\underline{P}_{\mathrm{cat}}$ und $\underline{Q}_{\mathrm{cat}}$.

Aufgabe 4 Für eine Algebra $\underline{M} = (M, f)$ mit der Trägermenge M und einer binären Operation f werde die „Kategorie“ $\underline{M}_{\mathrm{cat}}$ wie folgt definiert: $\mathrm{Ob}(\underline{M}_{\mathrm{cat}}) := \{0\}$ (es gibt also nur ein Objekt, das hier mit 0 bezeichnet wird), $\underline{M}_{\mathrm{cat}}(0,0) := M$ und $\mu_{0,0,0}(a,b) := f(a,b)$ (Morphismenkomposition, vgl. Def. 1.2). Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass $\underline{M}_{\mathrm{cat}}$ eine Kategorie ist.

Aufgabe 5 Was ist die duale Aussage zu der folgenden kategorientheoretischen Aussage $\mathcal{A}$ über einen Morphismus f?

$$f \in \mathcal{C}(A,B) \text{ und } \forall C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \forall g_1, g_2 : (g_1, g_2 \in \mathcal{C}(B,C) \wedge f g_1 = f g_2) \Rightarrow g_1 = g_2$$

Finden Sie Morphismen in der Kategorie $\underline{\mathrm{Set}}$, die $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ bzw. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ erfüllen. Können Sie die Morphismen in $\underline{\mathrm{Set}}$, die $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ erfüllen, vollständig charakterisieren?

Aufgabe 6 Welche der folgenden Isomorphien gelten (Beweis)?

- $\underline{\mathrm{RelSet}} \cong \underline{\mathrm{RelSet}}^{\mathrm{op}}$ (vgl. Vorl. 1.6),
- $\underline{\mathrm{Set}} \cong \underline{\mathrm{Set}}^{\mathrm{op}}$,
- $\underline{\mathcal{P}(X)}_{\mathrm{cat}} \cong \underline{\mathcal{P}(X)}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{cat}}$ $\qquad$ ($\underline{\mathcal{P}(X)} = (\mathcal{P}(X), \subseteq)$ Potenzmenge mit Inklusion).

Aufgabe 7 Die Funktoren $\mathrm{Id}, F, G : \underline{\mathrm{Set}} \to \underline{\mathrm{Set}}$ seien auf den Objekten wie folgt definiert: $\mathrm{Id}\, M := M$, $FM := M \times M$, $GM := \{\{x,y\} \mid x,y \in M\}$, was sich in „offensichtlicher“ Weise auf die Morphismen $f : M \to N$ überträgt ($\mathrm{Id}\, f = f$ (identischer Funktor), $Ff(x,y) := (fx, fy)$ für $(x,y) \in FM$, $Gf(\{x,y\}) := \{fx, fy\}$ für $\{x,y\} \in GM$). Beschreiben Sie alle(!) natürlichen Transformationen $\eta = (\eta_M)_{M \in \mathrm{Ob}(\underline{\mathrm{Set}})}$ der Form

(a) $\mathrm{Id} \Rightarrow \mathrm{Id}$	(b) $\mathrm{Id} \Rightarrow F$	(c) $\mathrm{Id} \Rightarrow G$
(d) $F \Rightarrow \mathrm{Id}$	(e) $F \Rightarrow F$	(f) $F \Rightarrow G$
(g) $G \Rightarrow \mathrm{Id}$	(h) $G \Rightarrow F$	(i) $G \Rightarrow G$.

Aufgabe 8 Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Zeigen Sie, dass für alle Morphismen $f : X \to Y$ und $h, h' : Y \to X$ gilt:

$$fh = 1_X \wedge h'f = 1_Y \implies h = h'.$$

Aufgabe 9 Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ seien Morphismen von $\mathcal{C}$, so dass $fg = 1_X$. Zeigen Sie:

1. f ist Monomorphismus,
2. f Epimorphismus $\implies f$ Isomorphismus.

Aufgabe 10 Eine *partielle Äquivalenzrelation* ist eine symmetrische und transitive Relation. Wir definieren eine Kategorie $\underline{\text{Päq}}$ gemäß

$$\mathrm{Ob}(\underline{\text{Päq}}) := \{(X, \approx_X) \mid X \text{ Menge}, \ \approx_X \subseteq X \times X \text{ partielle Äquivalenzrelation}\}.$$

Es seien $(X, \approx_X), (Y, \approx_Y) \in \mathrm{Ob}(\underline{\text{Päq}})$. Auf den Funktionen von X nach Y definieren wir eine Äquivalenzrelation ϱ, so dass $(f, f') \in \varrho$ genau dann, wenn

$$\forall x \in X \, : \, x \approx_X x \implies f(x) \approx_Y f'(x).$$

Morphismen in $\underline{\text{Päq}}((X, \approx_X), (Y, \approx_X))$ seien solche Äquivalenzklassen $[f]_\varrho$, für die gilt:

$$\forall x, x' \in X \, : \, x \approx_X x' \implies f(x) \approx_Y f(x').$$

Zeigen Sie, dass <u>Päq</u> mit dieser Art Morphismen eine Kategorie bildet. Wie muss dazu die Komposition von Morphismen definiert werden? Was sind die identischen Morphismen?

Aufgabe 11 Wir definieren eine Kategorie <u>Pow</u> gemäß

$$\mathrm{Ob}(\underline{\mathrm{Pow}}) := \{(\mathcal{P}(X), \subseteq) \mid X \text{ Menge}\}.$$

Morphismen seien monotone Funktionen, die die Vereinigung bewahren; d.h. $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ ist Morphismus, falls

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq B \implies f(A) \subseteq f(B)$,
2. $\forall (A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(X) : f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

Zeigen Sie, dass <u>Pow</u> eine Kategorie ist, die isomorph zu <u>RelSet</u> ist.

Aufgabe 12 Zeigen Sie, dass in der Kategorie <u>Set</u> für Morphismen (=Abbilungen) $f : X \to Y$ gilt:

- f mono $\iff$ f injektiv,
- f epi $\iff$ f surjektiv.