Vorlesung Spezielle Algebraische Strukturen: Permutationsgruppen

1. Übung am 21.5.2015

Aufgaben 1 - 6

Die **Aufgaben 2d,e,f** sind **schriftlich** zu lösen und zur Übung mitzubringen (oder in der Vorlesung am 19.5.15 abzugeben).

1. Zeigen Sie die Aussagen (i)–(iii) aus Lemma 1.11 der Vorlesung.

2. Sei M eine endliche Menge, G eine Untergruppe von S_M und $g_1, g_2 \in \mathrm{S}_M$. Beweisen Sie die folgenden, aus Lemma 1.19 stammenden Aussagen:

   a) Konjugiertheit und Ähnlichkeit sind Äquivalenzrelationen auf S_M.

   b) Aus der Zyklendarstellung einer Permutation $g = (a_1 a_2 \ldots)(b_1 b_2 \ldots)(\ldots) \in \mathrm{S}_M$ erhält man für $f \in \mathrm{S}_M$ die Zyklendarstellung von $f^{-1}gf$, wenn man f auf jedes Element in jedem Zyklus anwendet. D. h., $f^{-1}gf$ besitzt die Zyklendarstellung $f^{-1}gf = (a_1^f a_2^f \ldots)(b_1^f b_2^f \ldots)(\ldots)$.

   c) Konjugiertheit zweier Permutationen g_1 und g_2 (in G) impliziert deren Ähnlichkeit.

   d) Die Gegenrichtung der Aussage aus c) ist im Allgemeinen nicht erfüllt (d. h., es existieren ähnliche Permutationen, die in ihrer zugehörigen Permutationsgruppe nicht konjugiert sind).

   e) Für $G = \mathrm{S}_M$ gilt in c) Äquivalenz.

   f) Permutationen g_1 und g_2 auf M sind ähnlich genau dann, wenn die erzeugten zyklischen Untergruppen $(\langle g_1 \rangle, M)$ und $(\langle g_2 \rangle, M)$ als Permutationsgruppen ähnlich sind im Sinne von Definition 1.16.

3. Es seien M und N Mengen und $G \leq \mathrm{S}_M$ sowie $H \leq \mathrm{S}_N$ Permutationsgruppen auf diesen Mengen.

   a) Sei durch $f\colon M \longrightarrow N$ und $\varphi\colon G \longrightarrow H$ eine Ähnlichkeit (f, φ) zwischen (G, M) und (H, N) gegeben. Zeigen Sie, dass dann durch f der Homomorphismus φ und die Gruppe H bereits eindeutig bestimmt sind.

   b) Ist $f\colon M \longrightarrow N$ eine Bijektion, so ist die Konjugationsabbildung

   $$\varphi_f\colon \quad \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{S}_N \\ g & \longmapsto & f^{-1}gf \end{array}$$

   ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Somit gilt ferner für jede Teilmenge $E \subseteq G$, dass $\langle \varphi_f[E] \rangle_{\mathrm{S}_N} = \varphi_f[\langle E \rangle_G]$, also $\left\langle f^{-1}Ef \right\rangle_{\mathrm{S}_N} = f^{-1} \langle E \rangle_G f$.

   c) Zeigen Sie für eine Bijektion $f\colon M \longrightarrow N$ die Äquivalenz folgender Aussagen.

      (i) Es existiert eine Abbildung $\varphi\colon G \longrightarrow H$, so dass (f, φ) Ähnlichkeit zwischen (G, M) und (H, N) ist.

      (ii) Es gilt $f^{-1}Gf = H$.

      (iii) Es gelten die Inklusionen $f^{-1}Gf \subseteq H$ und $fHf^{-1} \subseteq G$.

d) Zeigen Sie folgende Charakterisierung der Ähnlichkeit von Permutationsgruppen:

$$(G, M) \sim (H, N) \iff \exists\, f\colon M \longrightarrow N \text{ bijektiv}\colon f^{-1}Gf = H.$$

e) Seien $E \subseteq G$ und $F \subseteq H$ Erzeugendensysteme, d. h. $G = \langle E \rangle_G$ und $H = \langle F \rangle_H$. Charakterisieren Sie die Ähnlichkeit der Permutationsgruppen (G, M) und (H, N) durch eine Bedingung an E und F. Formulieren Sie den Spezialfall $M = N$, $E = \{g_1\}$ und $F = \{g_2\}$ mit $g_1, g_2 \in \mathrm{S}_M$.

f) Beweisen Sie, dass je zwei Erzeuger $g_1, g_2 \in \mathrm{S}_M$ einer Permutationsgruppe $G \leq \mathrm{S}_M$ auf einer *endlichen* Menge M ähnlich sind im Sinne von 1.18.

4. Beweisen Sie Satz 2.3 aus der Vorlesung: Jeder (rechtsseitigen) Gruppenwirkung $\varphi\colon M \times G \longrightarrow M$ einer festen Gruppe G auf einer festen Menge M entspricht in eineindeutiger Weise eine Permutationsdarstellung $\psi\colon G \longrightarrow \mathrm{S}_M$ und umgekehrt, nämlich via

$$x^{\psi(g)} = \varphi(x, g)$$

für alle $x \in M$ und $g \in G$.

Hinweis: Der Beweis ist technisch simpel, überlegen Sie aber genau, was jeweils im Detail bewiesen werden muss.

5. Es sei G die folgende Untergruppe der vollen linearen Gruppe $\mathrm{GL}\,(4,3) := \left\{ A \in \mathsf{GF}(3)^{4\times 4} \;\middle|\; \det A \neq 0 \right\}$ aller regulären (4×4)-Matrizen über dem dreielementigen Körper $\mathsf{GF}(3)$: $G = \langle U \rangle_{\mathrm{GL}(4,3)}$, wobei $U := \{C, T\}$ und

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Sei $\varphi\colon G \longrightarrow \mathsf{GF}(3) \setminus \{0\} : A \mapsto \det(A)$ und $V := \operatorname{Ker} \varphi$. Begründen Sie kurz, dass φ ein Homomorphismus von G auf die multiplikative Gruppe $(\mathsf{GF}(3) \setminus \{0\}, \cdot)$ ist. Entsprechend ist $V \leq G$ dann eine Untergruppe, sogar ein Normalteiler von G. Bestimmen Sie den Index $[G : V]$ und ein Repräsentantensystem für die Rechtsnebenklassenzerlegung G/V. Berechnen Sie dann mittels Satz 3.6 (Schreierlemma) ein Erzeugendensystem für V. Ermitteln Sie daraus ein bzgl. Inklusion minimales Erzeugendensystem für V. Begründen Sie dessen Minimalität.

6. Ein kleines mathematisches Projekt: Wir wollen die volle symmetrische Gruppe $S_{\underline{n}}$ auf der Menge $\underline{n} := \{1, 2, \ldots, n\}$ so gut wie möglich mittels Simsbasis, Simskette und eindeutiger Darstellung der Permutationen zu beschreiben. Dazu einige Fragen zur Anregung:

(1) Wieviele Elemente muss eine Simsbasis für $S_{\underline{n}}$ mindestens haben? Geben Sie eine solche Basis von minimaler Mächtigkeit an.

(2) Finden Sie (einfach beschreibbare) Transversalen für die Simskette.

(3) Für konkrete Permutationsnetzwerke ist folgende Fragestellung interessant: Finden Sie (z.B. für $n = 4$ und $n = 32$) Permutationen f_i ($i \in \{1, \dots, s\}$) für möglichst kleines $s \in \mathbb{N}$, so dass $S_{\underline{n}} = B_1 \cdot B_2 \cdot \ldots \cdot B_s$ für $B_i := \{e, f_i\}$. Können Sie für beliebiges n (oder $n = 32$) eine obere Schranke für das kleinstmögliche s angeben? Ist die Darstellung $f = b_1 b_2 \dots b_s$ (mit $b_i \in B_i$) immer oder manchmal eindeutig?

(4) ...

Vorlesung Spezielle Algebraische Strukturen: Permutationsgruppen

2. Übung am 9.7.2015

Aufgaben 7 - 13

Die **Aufgabe 11** ist **schriftlich** zu lösen und zur Übung mitzubringen (oder in der Vorlesung am 7.7.15 abzugeben).

7. Beweisen Sie die Aussagen in 5.19.

8. a) Nutzen Sie die rechtsreguläre Darstellung einer Gruppe, um zu zeigen, dass jede Gruppe isomorph zur Automorphismengruppe eines gefärbten Graphen ist.

   b) Zusatzaufgabe: Jede Gruppe ist nach einem Satz von FRUCHT sogar isomorph zur Automorphismengruppe eines Graphen. Stellen Sie die Grundidee des Beweises vor.

   c) Man finde einen (eventuell gefärbten) Graphen auf der Menge $M = \{g_1, \ldots, g_6\}$, dessen Automorphismengruppe die rechtsreguläre Darstellung der vollen symmetrischen Gruppe $S_{\underline{3}}$ ist (vgl. 2.6).
   Statt $M = \{g_1, \ldots, g_6\}$ kann man auch die Menge $\{1, \ldots, 6\}$ der Indizes verwenden.

9. In Beispiel 5.23 wurde ein Erzeugendensystem $\Sigma := \{f, g, h, k\}$ für die Automorphismengruppe des "Würfelgraphen" angegeben, mit

$$f := (1234)(5678) \quad g := (1874)(2563) \quad h := (284)(573) \quad k := (35)(48)$$

   Ist dieses redundant, d.h. existiert eine echte Teilmenge, die ebenfalls Erzeugendensystem ist? Wie groß ist ein minimales Erzeugendensystem?

10. Es sei $M = \{1, \ldots, n\}$.

    a) Jede Permutation $g \in S_M$ läßt sich eindeutig durch die Permutationsmatrix

$$\mu(g) := (a_{ij})_{M\times M} \quad \text{mit} \quad a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i^g = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

    charakterisieren. Man zeige, dass

$$\mu : S_M \longrightarrow GL(n, 2) \ : \ g \mapsto \mu(g)$$

    ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.
    ($GL(n, 2) =$ Gruppe (bzgl. Matrizenmultiplikation) der quadratischen n-reihigen invertierbaren Matrizen über $\mathbb{K}_2 = \{0, 1\} \cong$ Gruppe der linearen Abbildungen des n-dimensionalen Vektorraumes über dem Körper $\mathbb{K}_2$).

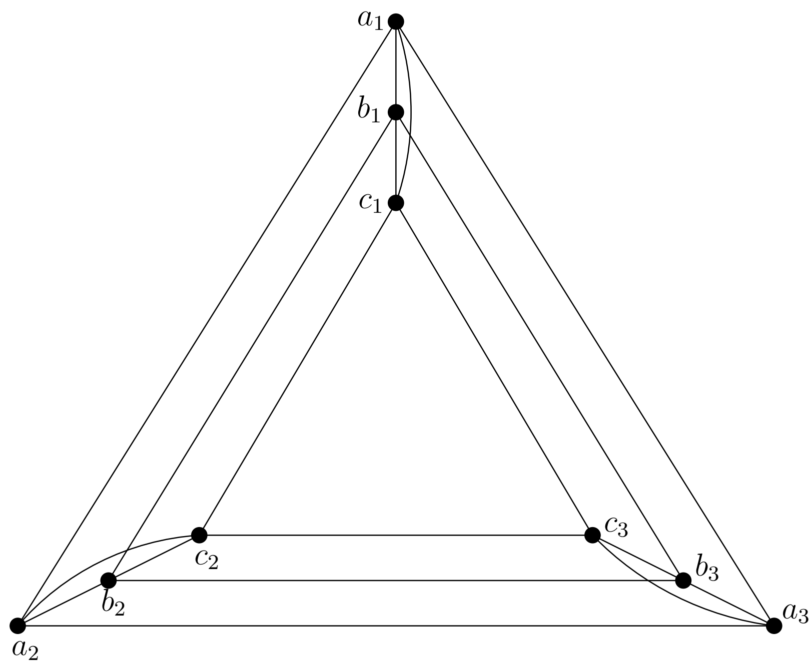
    b) Sei $M_g := \{m \in M \mid m^g = m\}$ die Menge der Fixpunkte von g. Wie läßt sich der Charakter $\chi(g) := |M_g|$ durch $\mu(g)$ ausdrücken?

    c) Man zeige (mittels 1.19 oder mit dem Ergebnis von (b)), dass $\chi : G \longrightarrow \mathbb{N} : g \mapsto \chi(g)$ eine *Klassenfunktion* ist, d.h. es gilt

$$\chi(h^g) = \chi(h)$$

    für alle $g, h \in S_M$, wobei $h^g := g^{-1}hg$ (χ ist auf den Konjugiertheitsklassen $\{h^g \mid h \in S_M\}$ konstant).

11. (a) Es sei G die Automorphismengruppe des folgenden Graphen (er hat neun Punkte und 18 Kanten). Geben Sie mindestens drei Automorphismen in Zyklenschreibweise an (aber nicht die Identität). Ist G transitiv? (Begründung!)



(b) Bestimmen Sie die Anzahl $|G|$.

Hinweis: Aus dem Satz von Lagrange folgt für eine beliebige Permutationsgruppe $G \leq S_A$ und $a \in A$, dass $|G| = |G_a| \cdot |a^G|$. Dabei ist G_a der Stabilisator des Punktes a, und $a^G := \{a^g \mid g \in G\}$ ist die Bahn von a in G. Wählen Sie sich ein a und wiederholen Sie das Verfahren mit einem weiteren Element, falls Sie $|G_a|$ nicht direkt bestimmen können.

(c) Bestimmen Sie den Stabilisator $G_{a_1,b_2} = \{g \in G \mid a_1^g = a_1,\ b_2^g = b_2\}$.

(d) Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Aut}\Gamma$.

12. (a) Bestimmen Sie den Zyklenzeiger $\mathfrak{Z}(S_{\underline{3}})$.

(b) Es sei $M := \underline{3} \times \underline{3} \setminus \Delta_{\underline{3}}$ und $(S_{\underline{3}}^{[2]}, M)$ die induzierte Wirkung von $S_{\underline{3}}$ auf M. Man bestimme den Zyklenzeiger $\mathfrak{Z}(S_{\underline{3}}^{[2]})$.

Hinweis: Es sei $\tilde{g} : M \longrightarrow M$ die durch $g \in S_{\underline{3}}$ induzierte Permutation. Für (b) muss man nur die Zyklentypen $\mathfrak{z}(\tilde{g})$ für Repräsentanten der Ähnlichkeitsklassen von $S_{\underline{3}}$ berechnen: In $S_{\underline{3}}$ ist Ähnlichkeit dasselbe wie Konjugiertheit. Die Konjugiertheit ist aber eine gruppentheoretische Eigenschaft, die sich auf $S_{\underline{3}}^{[2]}$ überträgt. Wenn also

$$\mathfrak{Z}(S_{\underline{3}}) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{q} a_i \mathfrak{z}(g_i),$$

für eine Transversale $T = \{g_1, \ldots, g_q\}$ der Zerlegung von $S_{\underline{3}}$ in Konjugiertheitsklassen gilt, so ist

$$\mathfrak{Z}(S_{\underline{3}}^{[2]}) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{q} a_i \mathfrak{z}(\tilde{g}_i).$$

13. Erläutern Sie die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Pólya, z.B. nach Klin, Pöschel, Rosenbaum: *Angewandte Algebra. Einführung in gruppentheoretisch-kombinatorische Methoden*[1]; Berlin 1988, S. 89-91 (vgl. auch Vorlesung 6.12):

    Satz (Pólyascher Abzählungssatz für mehrere Variable): Es sei (G, M) eine Permutationsgruppe, K beliebig, $f \in K^M$ und $A_{m_1 \dots m_r}$ die Anzahl der Bahnen von G auf der Menge $\{f \in K^M \mid \mathrm{Typ}(f) = z_1^{m_1} \cdot \dots \cdot z_r^{m_r}\}$. Dann gilt

    $$t_G(z_1, ..., z_r) = \mathfrak{Z}(G; z_1, ..., z_r)$$

    für $t_G(z_1, ..., z_r) := \sum A_{m_1 \dots m_r} \cdot z_1^{m_1} \cdot \dots \cdot z_r^{m_r}$. Wie ist $\mathfrak{Z}(G; z_1, ..., z_r)$ definiert?

[1] Link: `http://www.math.tu-dresden.de/~poeschel/poePUBLICATIONSpdf/1988KlinPoeRosenbaum.pdf`