Vorlesung Funktionen- und Relationenalgebren II

2. Übung am 11.7.2017

Aufgaben 8 - 16

Die **Aufgabe 13** ist **schriftlich** zu lösen und zu Beginn der Übung abzugeben.

8. Zeigen Sie für eine endliche Menge A (vgl. Satz 10.5(I)):

   (a) Jeder Klon $F \leq O_A$, der den ternären Diskriminator t_A enthält, besitzt die 2-Interpolationseigenschaft.
   Hinweis: Betrachten Sie die durch $t_A(x, t_A(x,y,z), z)$ definierte Funktion und denken Sie an das Baker-Pixley-Theorem 7.10.

   (b) Es sei $\operatorname{Subiso} F$ die Menge aller binären invarianten Relationen $\varrho \in \operatorname{Inv}^{(2)} F$, die zusätzlich die Eigenschaft $(x,y),(x,y'),(x',y) \in \varrho \implies x = x'$ und $y = y'$ für alle $x, x', y, y' \in A$ haben.
   Bemerkung: ϱ ist dann der Graph einer partiellen eineindeutigen Funktion und damit ein Isomorphismus zwischen Unteralgebren der Algebra $\underline{A} = \langle A; F \rangle$.
   Dann gilt für einen Klon $F \leq O_A$:
   $$t_A \in F \iff F = \operatorname{Pol}\operatorname{Subiso} F\,.$$

   (c) Folgern Sie, dass die Umkehrung von (a), also $F = \operatorname{Pol}\operatorname{Inv}^{(2)} F \implies t_A \in F$ im Allgemeinen nicht gilt.

   (d) Zeigen Sie, dass jede Algebra $\mathbb{A} = \langle A, F' \rangle$ mit $\langle F' \rangle = K_M$ für ein $M \subseteq A$ quasi-primal ist (dabei sei $K_M := \{f \in O_A \mid \forall x \in M : f(x, \ldots, x) = x\}$).

9. Wir betrachten eine abelsche Gruppe $\underline{G} = (A, +, -, 0)$ und den Klon L der (bzgl. $\underline{G}$) quasilinearen Funktionen f (d.h. es gilt
   $$f(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = f(x_1, ..., x_n) + f(y_1, ..., y_n) - f(0, ..., 0)$$
   für alle $x_i, y_i \in A$ $(i = 1, ..., n)$, vgl. Aufgabe 7c der Übung vom 15.11.2016). Es sei
   $$\varrho_G := \{(x, y, z, u) \in A^4 \mid x + y = z + u\}\,.$$
   Zeigen Sie $L = \operatorname{Pol}\varrho_G$ (vgl. auch Vorl. 3.5(4)).

10. Es seien $G = (A, +, -, 0)$ und $G' = (A, +', -', 0')$ zwei elementar abelsche p-Gruppen (d. h. für alle $a \in A$ gilt $\underbrace{a + a + \cdots + a}_{p \text{ mal}} = 0$ und $\underbrace{a +' a +' \cdots +' a}_{p \text{ mal}} = 0'$). Die Relationen ϱ_G und $\varrho_{G'}$ seien definiert wie in Aufgabe 9. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

    (a) $\operatorname{Pol}\varrho_G = \operatorname{Pol}\varrho_{G'}$.

    (b) $\varrho_G = \varrho_{G'}$.

    Zusatzaufgabe: Zeigen Sie, dass die Bedingungen (a) und (b) äquivalent zu folgender Aussage sind:

(c) Es existiert ein $c \in A$, so dass die Abbildung

$$\alpha : G' \to G,\, x \mapsto x + c$$

ein Isomorphismus von G' auf G ist.

11. (a) Wie viele verschiedene Ordnungsrelationen mit größtem und kleinstem Element gibt es auf einer 3-, 4- bzw. 5-elementigen Menge? Geben Sie zunächst die verschiedenen Isomorphietypen an (d.h. Diagramm ohne Beschriftung).

(b) Beweisen Sie für zwei Ordnungsrelationen (jeweils mit größtem und kleinstem Element) $\varrho_1,\, \varrho_2 \in R_A^{(2)}$:

$$\operatorname{Pol} \varrho_1 = \operatorname{Pol} \varrho_2 \iff [\, \varrho_1 = \varrho_2 \quad \text{oder} \quad \varrho_1 = (\varrho_2)^{-1}\,]$$

($\varrho^{-1} := \{(x, y) \mid (y, x) \in \varrho\}$).

Hinweis für den Beweis von „ $\Longrightarrow$ “: Man nehme sich Funktionen der folgenden Form

$$f(x) := \begin{cases} c & \text{falls } a\varrho_1 x \\ b & \text{sonst} \end{cases}$$

als Hilfsfunktionen (für geeignete $a, b, c \in A$).

12. Es sei $s \in S_A$ eine nichttriviale (d.h. von der identischen Funktion e verschiedene) Permutation auf der Menge $A = \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

(I) Man mache sich folgende Aussagen klar (Beweis):

(a) $f \in O_A^{(n)}$ ist genau dann s-selbstdual (d.h. $f(s(x_1), \ldots, s(x_n)) = s(f(x_1, \ldots, x_n))$), wenn $f \in \operatorname{Pol} s^\bullet$ (dabei ist $s^\bullet := \{(x, s(x)) \mid x \in A\}$ der Graph von s).

(b) Gibt es in der vollständigen[1] Zyklendarstellung von s Zyklen verschiedener Länge, so gibt es eine Potenz $\tilde{s} = s^i$, so dass $\tilde{s}$ mindestens einen Fixpunkt hat und $\tilde{s} \neq e$ gilt.

(c) Haben alle Zyklen von s die gleiche Länge, so gibt es eine Primzahl p und eine Potenz $\tilde{s} = s^i$, so dass alle Zyklen von $\tilde{s}$ die Länge p haben. Es gilt dann $\tilde{s}^\bullet \in [s^\bullet]_{R_A}$.

(d) Es sei $\operatorname{Fix}(s)$ die Menge der Fixpunkte von s (aufgefasst als einstellige Relation: $\operatorname{Fix}(s) \in R_A^{(1)}$). Dann gilt $\operatorname{Fix}(s) \in [s^\bullet]_{R_A}$ (Finden Sie eine Formel φ des $PK1$, so daß $\operatorname{Fix}(s) = F_\varphi(s^\bullet)$), also auch $\operatorname{Pol} s^\bullet \subseteq \operatorname{Pol}(\operatorname{Fix}(s))$.

(II) Beweisen Sie: Zu jeder nichttrivialen Permutation $s \in S_A$ gibt es eine Relation $\varrho \in \mathcal{P}(A) \cup (R_A^{(1)} \setminus \{\emptyset, A\})$ (Bezeichnung $\mathcal{P}(A)$ vgl. Vorl. 8.5), so dass $\operatorname{Pol} s^\bullet \subseteq \operatorname{Pol} \varrho$.

(III) Für zwei Permutationen $s_1, s_2 \in S_A$ mit $s_1^\bullet, s_2^\bullet \in \mathcal{P}(A)$ gilt $\operatorname{Pol} s_1^\bullet = \operatorname{Pol} s_2^\bullet$ genau dann, wenn $s_2 = s_1^i$ für ein geeignetes $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ gilt.

13. Beschreiben Sie alle maximalen Klone $F \leq O_A$ mit $A = \{0, 1, 2\}$. Geben Sie dazu explizit für jeden maximalen Klon eine Relation ϱ aus

$$\mathcal{S}(A) = \mathcal{O}(A) \cup \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{E}(A) \cup \mathcal{L}(A) \cup \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{B}(A)$$

[1]dabei müssen alle Zyklen, also auch die Zyklen der Länge 1 aufgeführt werden

an (vgl. Vorlesung 8.14 (8.13) und auch Aufg. 11 und 12). Markieren Sie dabei diejenigen Relationen, die zur Charakterisierung von Sheffer-Funktionen gemäß Vorl. 8.16 ausreichen.

Wieviele maximale Klone gibt es in O_A ?

14. Es sei $\mathbb{A}$ eine Algebra. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen für $\theta_1, \theta_2 \in \operatorname{Con}\mathbb{A}$ äquivalent sind:

    (i) $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$

    (ii) $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \circ \theta_2$

    (iii) $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$

15. Beweisen Sie 11.3 (2) $\Longrightarrow$ (1).

16. Beweisen Sie: Ein Algebra $\mathbb{A} = \langle A, F\rangle$ ist genau dann minimal (im Sinne der Tame Congruence Theory, Def. 11.5), wenn $\varrho_0 := \{(x,y,z) \in A^3 \mid x \neq y \text{ oder } y = z\}$ die Vereinigung von reflexiven Relationen aus $Q = \operatorname{Inv} F$ ist.

    Ein Relation $\varrho \subseteq A^3$ heiße *reflexiv*, wenn $(a,a,a) \in \varrho$ für alle $a \in A$ ist.