Vorlesung Funktionen- und Relationenalgebren I

2. Übung am 24.1.2017

Aufgaben 16 - 23

Die **Aufgabe 16** ist **schriftlich** zu lösen und zu Beginn der Übung abzugeben.

16. Beweisen Sie Bemerkung 3.11(a): Ein Klon $F \leq O_A$ ist genau dann ein maximaler Klon, wenn gilt
$$F \neq O_A \text{ und } \forall\, f \notin F : \langle F \cup \{f\}\rangle = O_A\,.$$
(Der Beweis ist nicht schwer, aber Sie sollen **sorgfältig begründen** und **nichts auslassen**, was zu einem korrekten Beweis gehört. Stellen Sie sich vor, Sie müssten diesen Beweis **für eine Abschlussarbeit** aufschreiben.)

17. Es sei $A = \{0,1\}$. Beweisen Sie den Satz in 3.5(4), dass für die Relation $\varrho_4 := \{(x,y,z,u) \in A^4 \mid x \oplus y = z \oplus u\}$ und eine beliebige Funktion $f \in O_A$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:
   (i) f bewahrt ϱ_4.
   (ii) $\forall x_i, y_i, z_i \in A : f(x_1 \oplus y_1 \oplus z_1, \ldots, x_n \oplus y_n \oplus z_n) = f(x_1,\ldots,x_n) \oplus f(y_1,\ldots,y_n) \oplus f(z_1,\ldots,z_n)$.
   (iii) f ist quasi-linear (vgl. Aufg 7).
   (iv) f ist *linear*, d. h. von der Form $f(x_1,\ldots,x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus \ldots \oplus a_nx_n$ mit $a_i \in A$.

18. (a) Zu jedem Klon $C \in \{T_0, T_1, M, S, L\}$ (das sind gerade die maximalen Klone) bestimme man $C^{(2)}$, d.h. alle zu C gehörigen zweistelligen BOOLEschen Funktionen. (Tabelle durch Ankreuzen ausfüllen)

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
T_0																	
T_1																	
M																	
S																	
L																	

   (b) $F \subseteq O_2$ heißt *Basis* von O_2 (vgl. Vorl. 1.9b), wenn $\langle F\rangle = O_2$ und $\langle F \setminus \{f\}\rangle \subsetneq O_2$ für jedes $f \in F$ gilt. Man bestimme alle zweielementigen Basen F von O_2 mit $F \subseteq O_2^{(2)}$.
   (c) Wieviele Elemente kann eine Basis höchstens haben? Gibt es eine Basis $F \subseteq O_2^{(2)}$ mit 3, 4 oder 5 Elementen? (Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, so gebe man eine an.)

19. (a) Beweisen Sie (mittels Satz 3.9), dass der *ternäre Diskriminator*

$$\begin{aligned} t_A(x,y,z) \; &:= \; \begin{cases} z & \text{falls} \quad x = y \\ x & \text{falls} \quad x \neq y \end{cases} \\ &= \; (\underline{\mathsf{if}}\ x = y\ \underline{\mathsf{then}}\ z\ \underline{\mathsf{else}}\ x) \end{aligned}$$

auf der Menge $A = \{0,1\}$ zusammen mit den Konstanten c_0, c_1 ein vollständiges Funktionensystem bildet.

Bemerkung. Als Folgerung ergibt sich: Jede Boolesche Funktion f kann durch ein Programm (Term) berechnet werden, in dem neben den Konstanten ausschließlich if-then-else-Befehle benutzt werden.

(b) Konstruieren Sie Implikation, Konjunktion und Disjunktion als Superposition von t_A und c_0, c_1 (d.h. stellen Sie die Funktionen f_{11}, f_8 und f_{14} aus Aufgabe 18 als Komposition (Term angeben) von t_A, c_0, c_1 dar).

20. (a) Zeigen Sie, dass für eine endliche Menge A, eine Permutation $f \in S_A$ und eine Relation $\varrho \in R_A$ die folgenden Aussagen äquivalent sind (vgl. Vorl. 4.7):

(i) f bewahrt ϱ

(ii) f^{-1} bewahrt ϱ

(iii) f bewahrt $\neg\varrho$

(iv) f^{-1} bewahrt $\neg\varrho$

(v) f und f^{-1} bewahren ϱ.

(b) Untersuchen Sie, welche Implikationen zwischen den Aussagen (i) - (v) noch gültig bleiben, wenn A eine beliebige (also auch unendliche) Menge ist. (Beweis bzw. Gegenbeispiel!)

21. Eine Relation $\varrho \in R_A$ bzw. eine Menge $Q \subseteq R_A$ heißt *poly-starr* wenn ϱ bzw. Q von keiner nichttrivialen Funktion bewahrt wird, d.h. wenn $\mathrm{Pol}_A\, \varrho = J_A$ bzw. $\mathrm{Pol}_A\, Q = J_A$ gilt.

(a) Schlussfolgern Sie $[\varrho]_{R_A} = R_A$ für eine poly-starre Relation $\varrho \in R_A$ bzw. $[Q]_{R_A} = R_A$ für eine poly-starre Menge $Q \subseteq R_A$. (Bemerkung: ϱ heißt dann auch *Sheffer-Relation* und Q *relational vollständig.*)

(b) Finden Sie in Analogie zum Vollständigkeitskriterium 3.13 ein Kriterium für die Poly-Starrheit eines Relationensystems $Q \subseteq R_A$ konkret für $A = \{0,1\}$. (Hinweis: minimale Klone). Beweisen Sie dieses Kriterium.

Zusatzaufgabe: Formulieren Sie das Kriterium für beliebiges endliches A.

(c) Formulieren Sie das Kriterium aus (a) explizit für die Poly-Starrheit einer einzigen Relation ϱ (d.h. $Q = \{\varrho\} \subseteq R_2$) (Hinweis: Sie benötigen dazu die Funktionen aus Satz 3.17) und prüfen Sie damit, welche der folgenden Relationen poly-starr ist:

$$\varrho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varrho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \varrho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

22. Es sei (φ, ψ) eine Galois-Verbindung zwischen geordneten Mengen $(P_1, \leq_1)$ und $(P_2, \leq_2)$ (vgl. 5.1.A).

    (a) Beweisen Sie die Eigenschaften 5.1.B (V)-(VIII).

    (b) Beweisen Sie, dass (φ, ψ) genau dann eine Galoisverbindung ist, wenn

    $$x \leq_1 \psi y \iff \varphi x \geq_2 y$$

    für alle $x \in P_1$, $y \in P_2$ gilt (vgl. 5.1.B (IX)).

23. Es seien $M_1 := \{M, V, T, S\}$ und $M_2 := \{w, m, j, a\}$. Weiter sei $q \subseteq M_1 \times M_2$ die durch die Interpretation
    M=Mutter, V=Vater, T=Tochter, S=Sohn,
    w=weiblich, m=männlich, j=jung, a=alt
    gegebene Inzidenzrelation. Zu q gehört gemäß 5.1.E eine Galois-Verbindung (φ, ψ).

    (a) Geben Sie q in Form einer Kreuztabelle an.

    (b) Bestimmen Sie alle Galois-abgeschlossenen Teilmengen von M_1. (Hinweis: Wie erhält man $\psi(Y_1 \cup Y_2)$ aus ψY_1 und ψY_2; was sollte man also zunächst berechnen? vgl. auch Bemerkungen unten)

    (c) Zeichnen Sie den Verband $\mathcal{B}$ (bezüglich Inklusion) dieser Teilmengen aus (a). Beschriften Sie die Punkte des Verbandes wie folgt:
    Für jedes $m \in M_2$ erhält die (Galois-abgeschlossene(!)) Menge $X = \psi\{m\}$ die Beschriftung m — das ist die größte abgeschlossenen Teilmenge $X \subseteq M_1$, für die $m \in \varphi X$ gilt (schreiben Sie die Beschriftung nach oben versetzt an die Punkte) die (ebenfalls Galois-abgeschlossene!) Menge $X = \psi\varphi\{g\}$ erhält die Beschriftung g (für jedes $g \in M_1$) — das ist die kleinste abgeschlossenen Teilmenge $X \subseteq M_1$, für die $g \in X$ gilt (schreiben Sie die Beschriftung etwas nach unten versetzt an die Punkte).

    Bemerkungen:
    Auf diese Weise haben Sie ein Diagramm des Begriffsverbands mit verkürzter Beschriftung (siehe auch Beispiel 5.1.F der Vorlesung) konstruiert, das wie folgt interpretiert werden kann: Jedem Punkt P entspricht ein Paar $(A, B) = (\psi\varphi X, \varphi X)$ von Galois-abgeschlossenen Mengen, wobei A die Menge aller Beschriftungen aller derjenigen Punkte ist, die im Verband unterhalb von P liegen oder gleich P sind; und B ist die Menge aller derjenigen Beschriftungen von Punkten, die oberhalb von (oder gleich) P sind.
    Die Paare $(A, B) = (\psi\varphi X, \varphi X)$ sind die *Begriffe* des *Kontextes* (M_1, M_2, q). Die Ordnung im Begriffsverband $\mathcal{B} = \mathcal{B}(M_1, M_2, q)$ ist gegeben durch $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) :\iff A_1 \subseteq A_2 \quad (\iff B_1 \supseteq B_2)$.