Vorlesung Funktionen- und Relationenalgebren II

1. Übung am 16.5.2017

Aufgaben 1 - 7

Die **Aufgabe 5a** (Zusatzaufgabe 6) ist **schriftlich** zu lösen und zu Beginn der Übung abzugeben.

1. Beweisen Sie die Aussagen in 6.6.

2. Für eine Menge $F \subseteq O_A$ sei ηF die Menge aller Funktionen $g \in O_A^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft
$$g[f_1, \ldots, f_n] \in F \text{ für alle } f_1, \ldots, f_n \in F^{(m)},\ m \in \mathbb{N}$$
(man sagt dazu auch „g erhält die Menge F“). Beweisen Sie
   (a) ηF ist ein Klon.
   (b) F ist ein Klon genau dann, wenn $F = \eta F$.

   Ist $F \mapsto \eta F$ ein Hüllenoperator auf dem Potenzmengenverband $\mathcal{P}(O_A)$?

3. Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 2 beweise man für einen Klon $F \leq O_A$ ($\eta F^{(m)}$ bedeute $\eta(F^{(m)})$):
   a) $\eta F^{(m)} = \operatorname{Pol} \Gamma_F(\chi_m)$,
   b) $F = \bigcap_{m=1}^{\infty} \eta F^{(m)}$.

   Schlussfolgern Sie, dass im Satz 7.8 auch die Äquivalenz (i) $\Longleftrightarrow$ (i)$'''$ gültig ist.

4. Es seien $|A| = k \geq 3$ mit $k \in \mathbb{N}$ und
$$\begin{aligned} U_{k-1} &:= \langle O_A^{(1)} \rangle \cup \{f \in O_A \mid |\operatorname{Im} f| \leq k-1\}, \\ \iota_k &:= \{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k \mid |\{a_1, \ldots, a_k\}| \leq k-1\}, \end{aligned}$$
wobei $|\operatorname{Im} f|$ die Anzahl der Funktionswerte (*image*) von f bezeichne.

   Eine Funktion $f \in O_A$ heißt *Słupecki-Funktion*, wenn sie surjektiv ist und von mindestens zwei Variablen wesentlich abhängt.

   Zeigen Sie:
   (a) f ist Słupecki-Funktion genau dann, wenn $f \notin U_{k-1}$.
   (b) U_{k-1} ist ein Klon ($\leq O_A$).
   (c) $U_{k-1} \subseteq \operatorname{Pol} \iota_k$.
   (d) U_{k-1} ist ein maximaler Klon.
   Benutzen Sie dabei das Słupecki-Kriterium 7.14: $\langle O_A^{(1)} \cup \{f\} \rangle = O_A$ für jede Słupecki-Funktion f.
   (e) $U_{k-1} = \operatorname{Pol} \iota_k$.

5. Es sei $\underline{M} = \langle M, \wedge, \vee, {}', 0, 1\rangle$ die Kleene-Algebra (Kleene-Logik), die wie folgt definiert ist:

   - $M = \{0, d, 1\}$ (0 = falsch, 1 = wahr, d = ungewiß/vielleicht).
   - $\wedge, \vee$ seien die Verbandsoperationen (d.h. Infimum und Supremum) für die geordnete Menge $\underset{\sim}{M} = (M, \leq)$ mit $0 < d < 1$ (d.h. z.B. $0 \wedge d = 0$, $d \vee 0 = d$).
   - $0' = 1$, $1' = 0$, $d' = d$
   - Die Konstanten $0, 1$ können als die konstanten Operationen c_0, c_1 betrachtet werden.

   a) Bestimmen Sie alle Unteralgebren von $\underline{M}$ und $\underline{M}^2$, d.h. bestimmen Sie $\mathrm{Inv}^{(1)} F$ und $\mathrm{Inv}^{(2)} F$ (alle 1-stelligen und 2-stelligen invarianten Relationen von F) für $F = \{\wedge, \vee, {}', 0, 1\}$.
   Hinweise: Es sind weniger als 4 bzw. 14 Stück. Konstruieren Sie $\Gamma_F(\varrho)$, z.B. gemäß 5.6(c), für die Teilmengen $\varrho \subseteq M \times M$. Man kann sich die Arbeit erleichtern, wenn man sich die Wirkung der Operationen aus F am (Hasse-)Diagramm des Verbandes $\underset{\sim}{M} \times \underset{\sim}{M}$ überlegt. ($\underset{\sim}{M} \times \underset{\sim}{M}$ besteht aus allen Paaren $(a, b) \in M \times M$ mit der Ordnungsrelation $(a, b) \leq (a', b') :\iff a \leq a'$ und $b \leq b'$.)

   b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Inv}^{(2)} F$ von den beiden Relationen $\varrho_0 := \{0, 1\} \in R_M^{(1)}$ und $\varrho_1 := \{(0,0), (0,d), (d,d), (1,d), (1,1)\} \in R_M^{(2)}$ erzeugt wird, d.h.
   $$\mathrm{Inv}^{(2)} F \subseteq [\{\varrho_0, \varrho_1\}]_{R_A}\,.$$
   (ϱ_1 heißt auch „Ungewissheitsrelation“; es ist eine Ordnungsrelation auf M (warum?): Wie sieht das Diagramm der geordneten Menge $\langle M, \varrho_1\rangle$ aus?)

   c) Finden Sie eine 3-stellige Majoritätsfunktion im Klon $\langle F\rangle$.
   (Hinweis: In 3.17 hatten wir schon mal eine Boolesche Majoritätsfunktion kennengelernt.)

   d) Aus dem Baker-Pixley-Theorem 7.10 folgt, dass sogar $\mathrm{Inv}\, F = [\mathrm{Inv}^{(2)} F]_{R_A}$ gilt (Begründung!).
   Beweisen Sie nun die folgende Charakterisierung der Funktionen der Kleene-Logik:
   $$g \in \langle F\rangle \iff g \in \mathrm{Pol}\{\varrho_0, \varrho_1\}\,,$$
   d.h., eine Funktion $g : M^n \to M$ kann genau dann aus den Funktionen in F durch Komposition erhalten werden, wenn g die Relationen ϱ_0 und ϱ_1 bewahrt.

6. Eine Algebra $\mathcal{A} = \langle A, (f_i)_{i\in I}\rangle$ heißt *primal*, wenn die Fundamentaloperationen ein vollständiges Funktionensystem bilden (d.h., wenn $\langle\{f_i \mid i \in I\}\rangle_{O_A} = O_A$). Zeigen Sie, dass jeder Körper $\langle \mathbb{Z}_p, +, -, 0, \cdot, 1\rangle$ primal ist (p Primzahl).
   Hinweis: 7.1e (Entwicklungssatz von Post). Die folgenden Hinweise nur lesen, wenn Sie sonst nicht weiterkommen:

   Was ist x^{p-1} im Körper $\mathbb{Z}_p$ für $x \neq 0$? Was berechnet die Termfunktion $h(x) := 1 - (x - k)^{p-1}$?

7. Es sei $A = \{0, 1, 2\}$, und durch

$$g_n(x_1, \dots, x_n) := \begin{cases} 1 & \text{falls ein } x_i \text{ gleich 1 und alle} \\ & \text{anderen gleich 2 sind} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

seien die Funktionen $g_n \in O_A^{(n)}$ $(n \geq 2)$ definiert.
Betrachten Sie für jede Teilmenge $I \subseteq \{2, 3, 4, \dots\}$ den Klon $W_I := \langle \{g_i \mid i \in I\} \rangle$ und zeigen Sie

$$j \notin I \implies g_j \notin W_I$$

d.h. kein g_j lässt sich als Superposition anderer g_i darstellen. (Eine wichtige Folgerung daraus haben Sie schon in Satz 3.19b kennengelernt.)
Finden Sie Teilmengen $I, I_n, I'_n \subseteq \{2, 3, 4, \dots\}$ $(n \in \mathbb{N}_+)$, so dass

$$I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I \subset \dots \subset I'_2 \subset I'_1$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I = \bigcap_{n=1}^{\infty} I'_n$$

Damit ist auch die letzte Bemerkung in 7.12 bewiesen.