Vorlesung Funktionen- und Relationenalgebren I

1. Übung am 15.11.2016

Aufgaben 1 - 15

Die **Aufgabe 7(c)** ist **schriftlich** zu lösen und zu Beginn der Übung abzugeben.

1. Informieren Sie sich (zur Wiederholung(?)):

   Was ist ein Verband?

   [Algebra $\underline{L} = \langle L, \wedge, \vee \rangle$ mit zwei Operationen $\wedge$ („Durchschnitt“, „Infimum“, „Schnitt“), $\vee$ („Vereinigung“, „Supremum“, „Verbindung“), bzw. Menge L mit Ordnungsrelation $\leq$, für die stets Infimum (= größte untere Schranke) und Supremum (= kleinste obere Schranke) zweier Elemente existiert. Was ist der Zusammenhang zwischen diesen Darstellungsformen?]
   Wie kann man einen (endlichen) Verband zeichnerisch darstellen? [(Hasse)-Diagramm]
   Zeichnen sie das (Hasse-)Diagramm des Potenzmengenverbandes $(\mathfrak{P}(\{0,1,2\}), \subseteq)$ einer dreielementigen Menge.

   Zusatzaufgabe: Was hat die Potenzmenge $\mathfrak{P}(\{a_1, \ldots, a_n\})$ einer n-elementigen Menge mit dem n-dimensionalen Würfel W_n zu tun? ($W_n := \{0,1\}^n$ ist Menge aller n-Tupel aus Nullen und Einsen). Mit der $\leq$-Relation (komponentenweise) ist W_n eine geordnete Menge (und sogar ein Verband). Wie lässt sich W_{n+1} darstellen (als Verband), wenn man bereits W_n konstruiert hat? Führen Sie die Konstruktion beginnend mit $n = 0$ durch. (Was ist $\mathfrak{P}(\emptyset)$, was ist W_0 ?)

2. Man zeige die folgenden Gleichungen

   (i) $e_i^n[f_1, \ldots, f_n] = f_i$

   (ii) $f[e_1^n, \ldots, e_n^n] = f$

   (iii) $\delta_\alpha f = f[e_{\alpha(1)}^m, \ldots, e_{\alpha(n)}^m]$

   (iv) $f * g = f[g[e_1^{m+n-1}, \ldots, e_m^{m+n-1}], e_{m+1}^{m+n-1}, \ldots, e_{m+n-1}^{m+n-1}]$

   (v) $e_2^2 = \zeta e_1^2, \quad e_1^2 = \zeta e_2^2, \quad e_2^2 = \nabla e_1^1$

   (vi) $\nabla f = f * e_2^2$.

   Veranschaulichen Sie sich diese Beziehungen durch „Schaltbilder“.

3. Finden Sie eine Abbildung α, so dass $e_i^n = \delta_\alpha e_1^1$.

4. Beweisen Sie: $f[g_1, \ldots, g_n]$ läßt sich aus $f, g_1 \ldots, g_n$ auch mit Hilfe der speziellen Komposition und den Stellentranformationen erzeugen.

5. Beweisen Sie: Jede Stellentransformation δ_α lässt sich mit den speziellen Stellentransformationen $\zeta, \tau, \Delta, \nabla$ erzeugen.

   (Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\delta_{\beta \circ \alpha} = \delta_\beta \circ \delta_\alpha$. Überlegen Sie, für welche konkreten Funktionen α die Operatoren $\zeta, \tau, \Delta, \nabla$ als δ_α beschrieben werden können und ob man aus diesen konkreten α durch Komposition $\circ$ alle Funktionen $\alpha : \underline{n} \to \underline{m}$ erhalten kann.)

6. Zeigen Sie, dass jeder Klon gegen linearisierte Komposition abgeschlossen ist.

   (Hinweis: Stellen Sie die linearisierte Komposition $f\langle g_1, \dots, g_n\rangle$ als (normale) Komposition von $f, g_1, \dots, g_n$ und Projektionen dar.)

7. a) Man zeige, dass die Menge J_A aller Projektionen ein Klon ist.

   b) Man zeige, dass die Menge aller idempotenten Funktionen (d.h. Funktionen $f \in O_A$ mit der Eigenschaft $f(x, \dots, x) = x$ für alle $x \in A$) einen Klon bildet.

   c) Es sei $G = \langle A; 0, +, -\rangle$ eine abelsche Gruppe mit Nullelement $0 \in A$. Eine Funktion $f \in O_A^{(n)}$ heißt *quasilinear* bzgl. G, wenn

   $$f(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = f(x_1, ..., x_n) + f(y_1, ..., y_n) - f(0, ..., 0)$$

   für alle $x_i, y_i \in A$ $(i = 1, ..., n)$ gilt.
   Man zeige, dass die Menge L aller (bzgl. G) quasilinearen Funktionen ein Klon ist.

8. Man beweise das *Superassoziativgesetz*

   $$(f[g_1, ..., g_n])[h_1, ..., h_m] = f[g_1[h_1, ..., h_m], ..., g_n[h_1, ..., h_m]]$$

   für Funktionen $f \in O_A^{(n)},\ g_1, ..., g_n \in O_A^{(m)},\ h_1, ..., h_m \in O_A^{(q)}$.

9. Die Funktionen aus O_2 heißen auch *Boolesche Funktionen*,
   z.B. sind $\wedge$ (Konjunktion), $\vee$ (Disjunktion), $\neg$ (Negation),
   $\rightarrow$ (Implikation), $\oplus$ (Addition mod 2), c_0 (Konstante 0)
   die durch folgende Wertetabellen gegebenen Booleschen Funktionen:

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \oplus y$	$\neg x$	$c_0(x)$
0	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0

   (a) Beschreiben Sie für jede Funktion $f \in \{\wedge, \vee, \oplus, \neg, c_0\}$ den von f erzeugten Klon F (z.B. durch Angabe der Terme, die die Funktionen aus $\langle f\rangle_{O_2}$ charakterisieren).

   (b) Geben Sie für jedes F aus (a) die Zahlen $|F^{(1)}|, |F^{(2)}|$ und $|F^{(3)}|$ an (Projektionen nicht vergessen mitzuzählen!).

   (c) Ein von J_A verschiedener Klon $F \leq O_A$ heißt *minimal*, falls $F = \langle g\rangle$ für *jede* Funktion $g \in F \setminus J_A$ gilt. Gibt es unter den Klonen aus (a) minimale? Welche sind nicht minimal? (Beweis)

   (d) Stellen Sie die Funktion $\vee$ als Superposition von $\rightarrow$ dar. Können Sie beweisen, dass die Umkehrung nicht möglich ist (d.h. es gilt $\rightarrow \notin \langle\vee\rangle_{O_2}$)? Ist $\langle\rightarrow\rangle$ ein minimaler Klon?

10. Für jede der folgenden BOOLEschen Funktionen (vgl. Aufg. 9) bestimme man die wesentlichen (nicht fiktiven) Variablen.

    a) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2)) \to x_3$

    b) $f(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2) \to x_2$

    c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2 \vee (\neg x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3)) \wedge x_4$

    d) $f(x_1, x_2, x_3) = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)$.

11. Zeigen Sie, dass $\{f \in O_A \mid f$ hat höchstens eine wesentliche Stelle$\}$ ein Klon ist.

12. Eine Boolesche Funktion $f \in O_2^{(n)}$ heißt *symmetrisch*, wenn $f = \delta_\alpha f$ für jede Permutation $\alpha \in S_n$ (d.h. beliebiges Permutieren der Variablen ändert nichts). Zeigen Sie, dass jede symmetrische, nichtkonstante Funktion von allen Variablen wesentlich abhängt.

13. Man gebe jeweils eine Formel φ der Prädikatenlogik 1. Stufe an, so dass für Relationen $\varrho_i \in R_A^{(2)}$ gilt:

    a) $F_\varphi(\varrho_1, \varrho_2) = \varrho_1 \cup \varrho_2$

    b) $F_\varphi = \Delta_A$

    c) $F_\varphi = \nabla_A$

    d) $F_\varphi = d_\varepsilon$ mit $\varepsilon = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$

    e) $F_\varphi(\varrho_1) = A^2 \setminus \varrho_1$

    f) $F_\varphi(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3) = \varrho_1 \circ \varrho_2 \circ \varrho_3$

    g) $F_\varphi(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4) = \varrho_1 \circ (\varrho_2 \cup \varrho_3 \cup \varrho_4)$.

14. Für die Relationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in R_2^{(3)} \text{ und } \varrho_0 = \{0\} \in R_2^{(1)}$$

    finde man eine Formel $\varphi(\varrho\,; x)$ der Prädikatenlogik 1. Stufe, so dass $\varrho_0 = F_\varphi(\sigma)$.

15. Es sei A eine endliche Menge und $s : A \to A$ eine Permutation (Bijektion). Für $f \in O_A^{(n)}$ werde die Funktion f^s durch

$$f^s(x_1, \ldots, x_n) := s(f(s^{-1}(x_1), \ldots, s^{-1}(x_n)))$$

    definiert.

    (a) Bestimmen Sie f^s für jede der Booleschen Funktionen aus Aufg. 9, wobei s die Permutation $s = \neg : 0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0$ sei.

    (b) Zeigen Sie: Ist $F \leq O_A$ ein Klon, so ist auch $F^s := \{f^s \mid f \in F\}$ ein Klon (der sogenannte zu F bezüglich s *duale Klon*).

    (c) Gilt stets $\langle F^s \rangle_{O_A} = \langle F \rangle_{O_A}^s$ für jede beliebige Teilmenge $F \subseteq O_A$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)