Denken in Bildern: Über die PEIRCEsche algebraische Logik und den Umgang mit Relationen

Vortrag zum 9. Dresdner Kolloquium zur Mathematik und ihrer Didaktik, 3. Februar 2004

Reinhard Pöschel
Institut für Algebra
Technische Universität Dresden

1 Einleitung

Als Mathematiker lernt man während des Studiums den Umgang mit allerlei mathematischen Symbolen und Sprechweisen. Im Rahmen der Aussagenlogik wird man mit den Zeichen $\wedge, \vee, \implies$ oder $\rightarrow, \neg$ vertraut gemacht, die in etwa den umgangssprachlichen Wörtern *und, oder, folgt (impliziert), nicht* entsprechen. In der Prädikatenlogik kommen noch die Quantoren $\exists$ (*existiert*) und $\forall$ (*für alle*) hinzu. Mit ein bisschen Übung versteht man dann bald solche Ausdrücke wie zum Beispiel

$$\forall A \subseteq \mathbb{N} : [0 \in A \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : n \in A \implies n+1 \in A)] \implies A = \mathbb{N},$$ [1]

die auf Nichteingeweihte aber eher abschreckend (weil unverständlich) wirken.

Wird die Komplexität der Formeln noch größer, so gibt auch der Mathematiker bald auf (er müßte sich umständlich die Formel in eine ihm wieder verständlichere Sprache zurück übersetzen oder er überlässt die Auswertung der Formel gleich einem Komputer). Der folgende Ausdruck beispielsweise ist für Mathematiker vielleicht gerade noch überschaubar (es ist das LEIBNIZsche *Praeclarum Theorema*), Nichtmathematiker werden sich aber wohl kaum mit solchen Zeichenfolgen auseinandersetzen wollen:

$$((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s)). \tag{1}$$

In diesem Beitrag soll auf einen ganz anderen Zugang zur Darstellung logischer Beziehungen aufmerksam gemacht werden, der auf CHARLES SANDERS PEIRCE (1839 – 1914) zurück geht.

Es ist nicht leicht, C.S. Peirce einzuordnen. Max H. Fisch schreibt in [Seb81]:

> Who is the most original and the most versatile intellect that the Americas have so far produced? The answer "Charles S. Peirce" is uncontested, because any second would be so far behind as not to be worth nominating. Mathematician, astronomer, chemist, geodesist, surveyor, cartographer, meteorologist, spectroscopist, engineer, inventor; psychologist, philologist, lexicographer, historian of science, mathematical economist, lifelong student of medicine; book reviewer, dramatist, actor, short story writer; phenomenologist,

[1] Das ist eine Möglichkeit, das Prinzip der vollständigen Induktion aufzuschreiben.

semiotician, logician, rhetorician and metaphysician. He was, for a few examples, the first modern experimental psychologist in the Americas, the first metrologist to use a wavelength of light as a unit of measure, the inventor of the quincuncial projection of the sphere, the first known conceiver of the design and theory of an electric switching-circuit computer, and the founder of "the economy of research". He is the only system-building philosopher in the Americas who has been both competent and productive in logic, in mathematics, and in a wide range of sciences.

Mit den von Peirce eingeführten „Bildern" eröffnet sich eine Chance, mathematisches Denken auch für Nichtmathematiker erschließbar zu machen und so für das logische Denken in allen Bereichen menschlichen Denkens und Handelns zu nutzen (zum Verhältnis von mathematischem Denken und dem weit darüber hinaus gehenden logischen Denken verweisen wir auf [Wil01]).

Es geht um die sogenannte Peircesche Algebraische Logik (PAL), die wir hier für Formeln der Aussagenlogik (existenzielle Graphen) und für relationale Konstruktionen (Relationengraphen) vorstellen werden. Auf die philosophischen Hintergründe kann und soll hier allerdings nicht weiter eingegangen werden.

Dieser Vortrag enthält (fast) keine eigenen Forschungs-Ergebnisse, der Autor möchte nur weitergeben, was er selbst erst vor kurzem kennen lernte, nämlich: es gibt eine „bildhafte" Alternative zur Darstellung von prädikatenlogischen Formeln und Schlüssen.

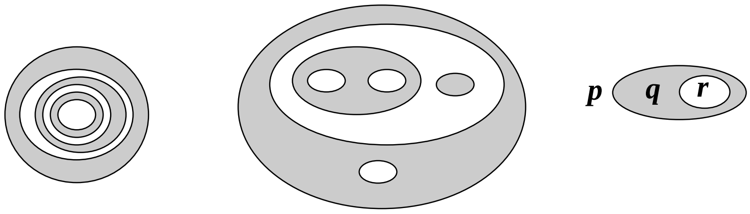
2 Logik in Bildern

Peirce ging unter anderem der Frage nach, wie mathematisches und logisches Denken funktioniert. Mit Blick auf das deduktive Schließen entwickelte er das, was er diagrammatisches Schließen (diagrammatic reasoning) nannte. Die Idee ist so einfach, dass selbst Vorschulkinder, mit diesem Kalkül spielend, formal richtige Schlussfolgerungen entwickeln könn(t)en (man muss Ihnen ja nicht sagen, dass dies Mathematik ist). Die Prämissen werden bildlich auf einem Blatt Papier als Symbole (z.B. $p, q, r, \dots$) dargestellt. Dann darf man mittels weniger einfacher Regeln etwas einfügen oder löschen. So entstehen – sozusagen unter den eigenen Blicken bzw. Händen – neue Bilder, die (bei entsprechender Interpretation) stets richtige Schlussfolgerungen (Conclusionen) aus den Prämissen sind. Die entstehenden Bilder heißen nach Peirce existenzielle Graphen (existential graphs). Für Peirce waren solche bildlichen Vorstellungen entscheidend für logisches Denken (dies gab dem vorliegenden Beitrag auch die Überschrift „Denken in Bildern")[2].

2.1. Existenzielle Graphen. Ein *existenzieller Graph* besteht aus Bereichen, die wir hier Areale nennen wollen und die durch geschlossenen Linien (Arealgrenzen, meist als Ovale gezeichnet) abgegrenzt werden; diese Areale können nebeneinander stehen oder ineinander verschachtelt sein, die Linien dürfen sich aber nicht überschneiden. Der (eventuell leere) Außenbereich zählt auch als Areal. Mit Ausnahme dieses Außenbereichs hat jedes Areal eine einzige (eindeutig bestimmte) äußere Arealgrenze. In jedem Areal können Symbole (für Aussagen) eingetragen sein. Die Areale werden in gerade und ungerade eingeteilt. Ein Areal, in das man von außen durch Überschreitung von $1, 3, 5, \dots,$

[2] Peirce wird in [Rob73, p. 126] wie folgt zitiert: „I do not think I ever reflect in words: I employ visual diagrams, firstly because this way of thinking is my natural language of self-communion, and secondly, because I am convinced that it is the best system for the purpose [Ms 620, p. 8]"

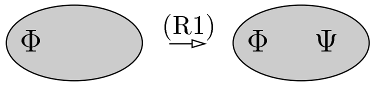
also ungerade vielen Arealgrenzen gelangen kann, heißt *ungerade*. *Gerade Areale* sind analog definiert, insbesondere ist das äußere Areal stets gerade (0 Grenzüberschreitungen). Die folgende Abbildung zeigt einige existenzielle Graphen; die ungeraden Areale sind dabei grau eingezeichnet.



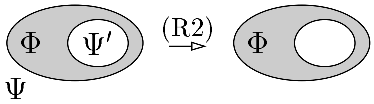
Statt existenzieller Graph wird im Folgenden häufig auch nur Graph gesagt.

2.2. Die Regeln. Nun wollen wir erstmal die Regeln vorstellen (der Einfachheit halber beschränken wir uns hier nur auf die Aussagenlogik; wenn man auch die Quantoren $\forall$, $\exists$ der Prädikatenlogik einbeziehen will, benötigt man weitere Regeln; das lässt sich z.B. in [Sow] nachlesen):

R1 **Einfügen in ungerade Areale:** In jedes ungerade Areal darf ein beliebiger Graph eingefügt werden.

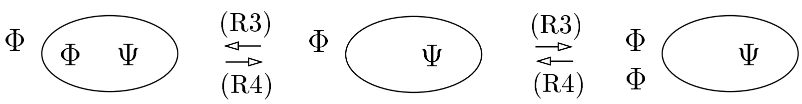


R2 **Löschen in geraden Arealen:** In jedem geraden Areal darf ein (dort vorhandener) Graph gelöscht werden.



R3 **Iteration:** Wenn ein Graph Φ in einem Areal A vorkommt, so darf er in jedem Areal, das von A umschlossen wird[3] (insbesondere in A selbst), noch einmal eingezeichnet werden.

R4 **Deiteration:** Dies ist die Umkehrung der Iterationsregel R3: Wenn ein Graph Φ in einem Areal B vorkommt und gleichzeitig auch noch in einem Areal A vorkommt, das B umschließt, dann darf Φ in B gelöscht werden.



R5 **Doppelte Umgrenzung setzen:** In jedem Areal dürfen um irgendeinen dort vorhandenen Graphen (eventuell leer) zwei ihn umfassende Arealgrenzen gezeichnet werden.

[3]Ein Areal B *wird von* einem Areal A *umschlossen*, wenn die äußere Arealgrenze von A die äußere Arealgrenze von B umfasst oder ihr gleich ist; damit ist auch festgelegt, dass ein Areal sich selbst umschließt und dass das äußerste Areal jedes Areal umfasst.

R6 **Doppelte Umgrenzung löschen:** Dies ist die Umkehrung von Regel R5: Zwei Arealgrenzen, von denen die eine die andere umfasst und zwischen denen kein anderer Graph vorhanden ist, dürfen gelöscht werden.

$$\Phi \quad \underset{(R6)}{\overset{(R5)}{\rightleftarrows}} \quad \boxed{\boxed{\Phi}}$$

Die angegebenen Bildchen sollen die Regeln verdeutlichen (Φ, Ψ, Ψ' bezeichnen dabei irgendwelche existenziellen Graphen). Ein Graph, der aus einem gegebenen Graphen mittels dieser Regeln R1-R6 konstruiert werden kann, heißt auch *abgeleiteter Graph* und die Konstruktionsfolge ist eine *Ableitung*.

2.3. Die aussagenlogische Interpretation der existenziellen Graphen. Um zu verstehen, was das Spiel mit den Regeln soll, müssen wir zunächst eine Interpretation der existenziellen Graphen kennenlernen. Die Interpretation eines Graphen Φ wollen wir mit $\Phi^\sharp$ bezeichnen. Sie wird entsprechend der Struktur der existenziellen Graphen induktiv definiert:

- Die in einem Graphen vorkommenden Symbole (z.B. $p, q, r, \dots$) werden als (vorgegebene) Aussagen[4] interpretiert (an Stelle von $p^\sharp, q^\sharp, r^\sharp, \dots$ werden wir meist einfach auch nur $p, q, r, \dots$ schreiben). Der leere Graph (leeres Blatt Papier) wird immer als wahre Aussage interpretiert: $\emptyset^\sharp := \mathtt{t}$
- Das Nebeneinanderschreiben von zwei Graphen Φ und Ψ wird als Konjunktion interpretiert:
$$(\Phi\ \Psi)^\sharp := \Phi^\sharp \wedge \Psi^\sharp.$$
- Das Einschließen eines Graphen in eine Arealgrenze wird als Negation interpretiert:
$$\boxed{\Phi}^\sharp := \neg(\Phi^\sharp).$$

Es ist bekannt, dass jede aussagenlogische Formel stets in einer äquivalenten Form angegeben werden kann, in der neben den Aussagen(variablen) nur noch die Zeichen $\wedge, \neg$ verwendet werden müssen (manchmal nimmt man noch $\mathtt{t}$ als Konstante dazu). Daher ist jede aussagenlogische Formel im Prinzip als existenzieller Graph darstellbar.

2.4. Beispiele. Die Beispiele in Abb. 1 zeigen, wie einige klassische Formeln durch existenzielle Graphen dargestellt werden (womit wir auch die Disjunktion und Implikation als Abkürzung einführen). Mittels dieser Abkürzungen ist es dann leicht möglich, jede beliebige aussagenlogische Formel φ in einen existenziellen Graphen Φ zu übersetzen, dessen zugehörige Formel zu φ äquivalent ist: $\Phi^\sharp \iff \varphi$ (wie am *Praeclarum Theorema* beispielhaft zu sehen ist).

2.5. Wahrheitswerte. Setzt man in einer aussagenlogischen Formel φ die Wahrheitswerte ($\mathtt{t}$ oder $\mathtt{f}$) der in der Formel vorkommenden Aussagen $p, q, r, \dots$ ein, dann lässt sich die Formel in bekannter Weise auswerten und man erhält einen Wahrheitswert, der

[4] zur Erinnerung: Aussagen im Sinne der Aussagenlogik sind Sachverhalte, die genau einen der zwei Wahrheitswerte $\mathtt{t}$(true, wahr) bzw. $\mathtt{f}$(false, falsch) haben können.

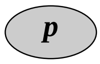
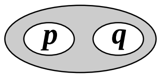
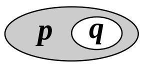
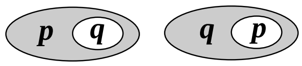
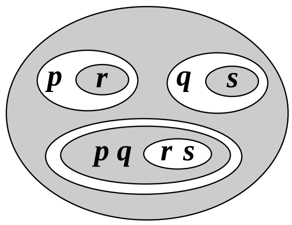
Existenzieller Graph Φ	Formel $\Phi^\sharp$	Abkürzung (Bemerkung)
p ***q***	$p \wedge q$	(Konjunktion)
	$\neg p$	(Negation)
	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	$p \vee q$ (Disjunktion)
	$\neg(p \wedge \neg q) = \neg p \vee q$	$p \to q$ (Implikation)
	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$ (Äquivalenz)
	$((p \to r) \wedge (q \to s))$ $\to ((p \wedge q) \to (r \wedge s))$	(*Praeclarum Theorema*)

Abbildung 1: Existenzielle Graphen und ihre Formeln

mit $w(\varphi)$ bezeichnet werden soll. Somit lässt sich auch jedem existenziellen Graphen Φ ein Wahrheitswert $w(\Phi)$ zuordnen, wenn die Wahrheitwerte der darin vorkommenden Aussagen bekannt sind: Man nimmt dafür einfach den Wahrheitswert der zugehörigen Formel $\Phi^\sharp$, also $w(\Phi) := w(\Phi^\sharp)$. Ein Graph bzw. eine Formel heißen *wahr*, *allgemeingültig* oder *Tautologie*, wenn ihr Wahrheitwert stets $\mathtt{t}$ ist, unabhängig von den Wahrheitswerten der darin vorkommenden Aussagen(variablen).

Es zeigt sich nun, dass bei Anwendung der Regeln R1 - R6 aus wahren Graphen stets wieder wahre Graphen entstehen (die Umkehrung gilt allerdings nicht, da aus falschen Graphen durchaus auch wahre Graphen entstehen können):

2.6. Theorem. *Es seien Φ und Ψ existenzielle Graphen, so dass Ψ aus Φ durch Anwendung einer der Regeln* R1-R6 *(aus* 2.2*) entsteht. Dann gilt:*

$$w(\Phi) = \mathtt{t} \implies w(\Psi) = \mathtt{t}\,.$$

Man sagt dazu auch, der Ableitungskalkül R1-R6 ist *korrekt*. Wir wollen dieses Theorem hier nicht detailliert beweisen (es folgt aus der Allgemeingültigkeit der folgenden aussagenlogischen Formeln: (R1) $\neg p \to \neg(p \wedge q)$, (R2) $p \wedge q \to p$, (R3)(R4) $p \wedge \psi(q) \leftrightarrow p \wedge \psi(p \wedge q)$ für eine beliebige Formel ψ, in der q vorkommt, (R5)(R6) $\neg\neg p \leftrightarrow p$).

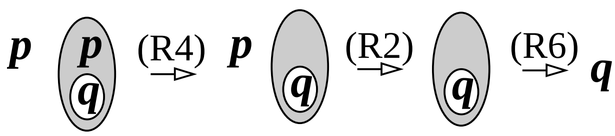
Nun taucht natürlich die Frage auf, ob der Ableitungskalkül R1-R6 auch *vollständig* ist, d.h. ob jede Tautologie auch mit den Regeln R1-R6 erzeugbar ist; genauer gesagt, erzeugbar aus dem einzigen existenziellen Graphen, dessen Wahrheitswert wir von vornherein kennen, nämlich das leere Blatt Papier: $w(\emptyset) = \mathtt{t}$. Die Antwort lautet Ja, wie das folgende Theorem zeigt.

2.7. Theorem. *Jeder allgemeingültige existenzielle Graph lässt sich aus dem leeren Graphen $\emptyset$ durch Anwendung der Regeln R1-R6 in endlich vielen Schritten erzeugen.*

Der Beweis für dieses Theorem soll hier nicht im Detail angegeben werden. In [Sow] wird dazu auf [Rob73] und [Sow84] verwiesen. Man kann aber mit einer beliebigen Axiomatisierung der Aussagenlogik starten: es ist dann eventuell mühselig aber nicht schwer, die Axiome als allgemeingültige existenzielle Graphen darzustellen und die Gültigkeit der Ableitungsregel *modus ponens* im Graphkalkül zu beweisen. Wir zeigen dies nur am Beispiel der Formel $p \to (q \to p)$ (die z.B. in [BelS69] (wie auch für die sogannten Hilbert-Systeme) als Axiom benutzt wird) und der Schlussregel *modus ponens*, die folgendes besagt:

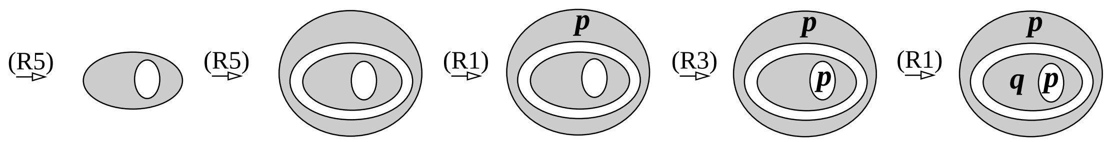
$$\left[\begin{array}{l}\text{wenn } p \text{ gilt und}\\ \text{wenn } q \text{ aus } p \text{ folgt,}\\ \text{dann gilt auch } q\end{array}\right] \quad \text{meist kurz geschrieben als} \quad \left[\begin{array}{l} p \\ \underline{p \to q} \\ q \end{array}\right].$$

Entsprechend den in Abb. 1 eingeführten Abkürzungen haben wir: Der erste Graph (genauer dessen Interpretation) der folgenden Ableitung besagt nichts anderes als die Prämissen p und $(p \to q)$ der Regel *modus ponens*.



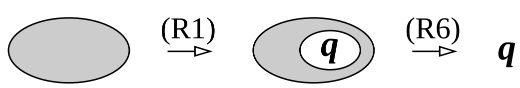
Wir erhalten die Konklusion q als abgeleiteten Graphen, also kann *modus ponens* bei der Ableitung von existenziellen Graphen benutzt werden.

Die folgende Konstruktion zeigt nun die Allgemeingültigkeit von $p \to (q \to p)$ (genauer des Graphen Φ mit $\Phi^\sharp = p \to (q \to p)$):



Entsprechend den in 2.4(Abb. 1) eingeführten Abkürzungen ist die Interpretation des letzten Graphen dieser Ableitungskette (die mit dem leeren Graphen startet) nichts anderes als das zu beweisende Axiom.

2.8. Weitere Beispiele. Zum Umgang mit den Ableitungsregeln wollen wir hier noch zwei Beispiele von Ableitungen angeben. Die folgende Ableitung bestätigt, dass aus etwas Falschem jede beliebige Aussage q gefolgert werden kann (ein einziges Negationsoval hat als Negation von $\mathtt{t}$ (leerer Graph) offenbar stets den Wahrheitswert $\mathtt{f}$ $(= \neg\mathtt{t})$:



Wie man das Leibnizsche *Praeclarum Theorema* aus der Einleitung (vgl. auch Abb. 1) beweisen kann, zeigt Abb. 2.

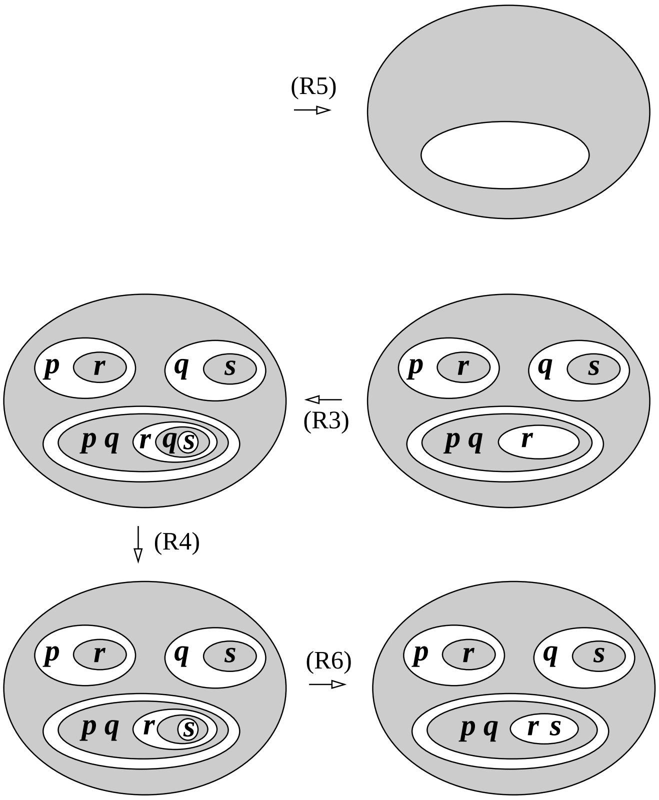


Abbildung 2: Beweis des *Praeclarum Theorema*

Man beachte, dass bei Anwendung der Regel (R3) die Areale des dublizierten Graphen die „Farbe" wechseln können (d.h. aus ungeraden Arealen können gerade Areale werden und umgekehrt). Ob ein Areal gerade oder ungerade ist, hängt nur von dem Gesamtgraphen ab (und ist für die Ableitungsregeln irrelevant).

Die Ableitung des Leibnizschen *Praeclarum Theorema* hat sieben Schritte (vgl. Abb. 2) und ist bei Kenntnis der Ableitungsregeln leicht nachvollziehbar. Als Kuriosität sei am Rande vermerkt, dass 13 Jahre nachdem Peirce seine Regeln entdeckt hatte, ein anderer Beweis dieses *Praeclarum Theorema* in den berühmten *Principia Mathematica* von Whitehead und Russell ([WhiR10]) erschien: dieser Beweis besteht aus 43 Schritten und beginnt mit fünf unübersichtlichen Axiomen (von denen eines sogar redundant war, was weder die Autoren noch die Leser bis 1926 bemerkten, mehr dazu in [Sow]). Wem es Spaß macht, kann sich im Internet unter `http://de.metamath.org/mpegif/prth.html` einen Beweis mit einem sogenannten Beweis-Explorer ansehen. Diese Internetseite ist auf der nächsten Seite dargestellt, hinter jedem der dort angegebenen Ableitungsschritte (die man jeweils anklicken kann) verbergen sich neue Ableitungen und nach vielen solchen Einzelschritten wird man dann endlich zu 4 Axiomen geführt (der Autor hat nicht gezählt, ob es mehr oder weniger als die oben genannten 43 Schritte sind) — ein Mathematiker kann dies vielleicht formal gerade noch nachvollziehen (aber wer wird sich schon dieser nahezu sinnlosen Aufgabe unterziehen wollen, die man heutzutage ja einem Komputer überlassen kann), ein Schüler würde durch solche Ableitungen vermutlich dauerhaft von der mathematischen Logik abgeschreckt.

Home

Metamath Proof Explorer

< Previous   Next >
Browser slow? Try the Unicode version.

Theorem prth 388

Description: Theorem *3.47 of [WhiteheadRussell] p. 113. It was proved by Leibniz, and it evidently pleased him enough to call it 'praeclarum theorema'.

Assertion

Ref	Expression
prth	$\vdash (((\varphi \to \psi) \wedge (\chi \to \theta)) \to ((\varphi \wedge \chi) \to (\psi \wedge \theta)))$

Proof of Theorem prth

Step	Hyp	Ref	Expression
1		pm3.2 211	$\vdash (\psi \to (\theta \to (\psi \wedge \theta)))$
2	1	syl3d 27	$\vdash (\psi \to ((\chi \to \theta) \to (\chi \to (\psi \wedge \theta))))$
3	2	syl3 18	$\vdash ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to ((\chi \to \theta) \to (\chi \to (\psi \wedge \theta)))))$
4	3	com23 31	$\vdash ((\varphi \to \psi) \to ((\chi \to \theta) \to (\varphi \to (\chi \to (\psi \wedge \theta)))))$
5	4	imp4b 262	$\vdash (((\varphi \to \psi) \wedge (\chi \to \theta)) \to ((\varphi \wedge \chi) \to (\psi \wedge \theta)))$

Colors of variables: wff set class

Syntax hints: $\to$ wi 2 $\wedge$ wa 183

This theorem is referenced by: im2and 390 mo 956 ssxp 2189 tfrlem5 2503 climunii 3902 hlimcaui 4078 hlimunii 4080

This theorem was proved from axioms: ax-1 3 ax-2 4 ax-3 5 ax-mp 6

This theorem depends on definitions: df-bi 116 df-an 185

The Metamath Home Page is metamath.org

`http://de.metamath.org/mpegif/prth.html` (Beweis des *Praeclarum Theorema*)

Mit den existenziellen Graphen von Pierce ist der Beweis dagegen im wahrsten Sinne des Wortes ein Kinderspiel.

3 Relationen und PAL

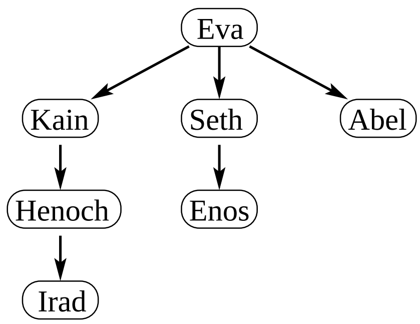
Im vorangegangenen Abschnitt haben wir nur Aussagen und ihre logischen Verknüpfungen betrachtet. Jetzt betrachten wir einen „Bilder"-Kalkül, in dem beliebige prädikatenlogische Formeln behandelt werden können. Dies ist eine Erweiterung der existenziellen Graphen, in denen nun auch Relationen vorkommen dürfen. Der Kalkül, der heute PAL (Peircesche Algebraische Logik) genannt wird, wurde z.B. auch von R.W. Burch in [Bur91] dargestellt.

3.1. Darstellung von Relationen. Der Begriff der Relation ist fundamental nicht nur in der Mathematik, sondern in allen Wissenschaften. Logisches Denken (das sich – wie schon erwähnt – nicht nur im mathematischen Denken erschöpft, vgl. z.B. [Wil01]) setzt stets verschiedene „Objekte" unseres Denkens in Beziehung, also „in Relation".

Oft hat man es mit binären Relationen zu tun. Eine binäre (zweistellige) Relation ϱ zwischen zwei Mengen B und C ist mathematisch eine Teilmenge des direkten Produkts

$B \times C$, also eine Menge von Paaren. Für $(b, c) \in \varrho$ (d.h. das Element $b \in B$ ist in Relation zu dem Element $c \in C$) schreibt man auch $b\varrho c$ (besonders wenn die Relation ϱ mit speziellen Symbolen wie z.B. $=, <, \leq$ bezeichnet wird). Setzt man $A := B \cup C$ so kann man ϱ als Teilmenge von $A \times A$ auffassen, d.h. als binäre Relation über der Menge A. Es ist also keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir stets $B = C$ voraussetzen.

Für binäre Relationen $\varrho \subseteq A \times A$ gibt es eine sehr schöne bildliche Darstellung durch Punkte und Pfeile (das sind Graphen im Sinne der Graphentheorie, die aber nichts mit den existenziellen Graphen des vorigen Kapitels zu tun haben). Die Elemente von A werden als Punkte (oder kleine Kreise) gezeichnet und es wird ein Pfeil vom Punkt a zum Punkt b genau dann eingezeichnet, wenn $(a, b) \in \varrho$. Ist ϱ beispielsweise die $\boxed{\text{ist Elternteil von}}$-Beziehung zwischen Menschen, so veranschaulicht der folgende Graph in leicht verstehbarer Form die Familienbeziehungen (Stammbaum) der angegebenen Personen (z.B. ist Eva die Großmutter von Henoch, und Abel ist der Onkel von Enos).

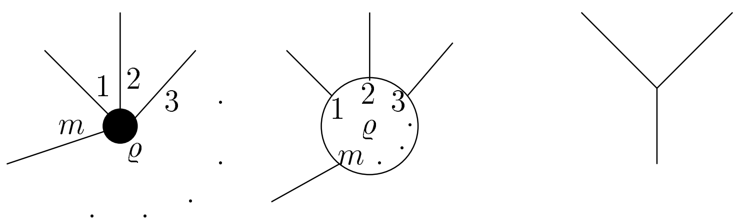


Die Pfeile sind also die Elemente der Relation. Wenn man mit den Relationen rechnen will, so kann es mit dieser Darstellungweise allerdings schon Schwierigkeiten geben. Völlig unklar ist, wie Relationen mit größerer Stelligkeit m dargestellt werden könnten. Eine m-stellige Relation ϱ auf einer Menge A ist eine Teilmenge von

$$A^m = \{(a_1, \ldots, a_m) \mid a_1, \ldots, a_m \in A\},$$

also eine Menge von m-Tupeln.

Da hilft nun der Ansatz von Peirce weiter. Eine m-stellige Relation $\varrho^A \subseteq A^m$ wird einfach durch einen mit ϱ markierten Punkt (oder kleinen Kreis) in der Ebene repräsentiert, von dem m durchnumerierte „Ärmchen“ (Valenzen) abgehen, wie in der Abbildung 3(a) oder (a') dargestellt Die Markierungen der Valenzen werden *Relationenmarkierungen*



(a) m-stellige Relation ϱ^A (a') (b) Die Teridentität id_3^A

Abbildung 3: Darstellung von Relationen in PAL genannt (und signalisieren, zur welcher Komponente der Relation das entsprechende Ärmchen gehört).

Wir unterscheiden hier zunächst (später dann vielleicht nicht immer konsequent) zwischen dem Symbol ϱ für eine Relation und seiner Interpretation ϱ^A auf einer Menge A, d.h. der konkreten m-stelligen Relation ϱ^A, die als Menge von m-Tupeln auf A gegeben ist. In Abb. 3(b) ist noch eine spezielle Relation – die sogenannte *Teridentität* – dargestellt, die durch

$$\mathsf{id}_3^A := \{(a, a, a) \mid a \in A\}$$

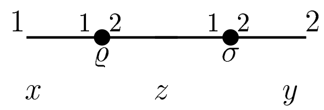
definiert ist und keiner zusätzlichen Markierungen bedarf.

3.2. Operationen auf Relationen (PAL). Die hier eingeführte Darstellung von Relationen durch „Bilder“, die wir Relationengraphen nennen wollen, bewährt sich auch bei der Darstellung von Operationen, die man mit Relationen durchführen kann. Ein Beispiel für solche Operationen ist etwa das Relationenprodukt $\varrho \circ \sigma$, das für binäre Relationen schon lange bekannt ist (Relationenkalkül, Relationenalgebra [Sch10], [Tar41]):

$$\varrho \circ \sigma := \{(x, y) \mid \exists z : (x, z) \in \varrho \wedge (z, y) \in \sigma\}.$$

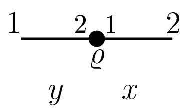
In der oben eingeführten Peirceschen Darstellung sieht das Relationenprodukt wie folgt aus

$\mathfrak{G}$:



Dabei kann man sich vorstellen, dass die Verbindungslinien Elemente x, y, z der Grundmenge A repräsentieren, wobei die durch den Relationengraphen $\mathfrak{G}$ gegebene Relation $\mathfrak{G}^A$ gerade die Menge aller Belegungen (x, y) der zwei freien Valenzen (mit 1 und 2 markiert) ist, für die eine Belegung z der mittleren Verbindungskante exitiert. Entsprechend der angegebenen Durchnumerierung der Ausgänge der Relationen ϱ und σ muss also das Paar (x, z) in Relation ϱ und das Paar (z, y) in Relation σ stehen. Das Inverse $\varrho^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in \varrho\}$ einer binären Relation ist in der Peirceschen Darstellung durch folgenden Relationengraphen gegeben:

$\mathfrak{G}'$:



Wir wollen nun die Operationen von PAL (Peircesche Algebraische Logik) kennenlernen, von denen das Relationenprodukt nur ein Spezialfall ist. Mit diesen Konstruktionen werden wir gleichzeitig auch definieren, was ein Relationengraph ist. *Relationengraphen* werden induktiv aufgebaut, wobei man mit Relationensymbolen (und insbesondere der Teridentität) startet. Jeder Relationengraph hat freie Valenzen nach außen, die mit $1, \ldots, m$ durchnumeriert (markiert) sind; die Anzahl der freien Valenzen heißt *Stelligkeit* oder *Arität* des Relationengraphen. Gleichzeitig wollen wir auch die Evaluierung (Interpretation) $\mathfrak{G}^A$ der Relationengraphen $\mathfrak{G}$ angeben, die bei diesen Konstruktionen entsteht, wenn die im Relationengraphen vorkommenden Relationensymbole ϱ mit konkreten Relationen $\varrho^A \subseteq A^m$ belegt werden.

(PAL1) Atomare Relationengraphen: Es sei ϱ ein m-stelliges Relationensymbol. Dann ist der Graph in Abb. 4(a) (der auch mit ϱ bezeichnet wird) ein m-stelliger Relationengraph. Er hat m freie Valenzen (jede mit einer Relationenmarkierung wie in Abb. 3 versehen) und m Markierungen, die am äußeren Ende der freien Valenzen eingezeichnet sind und zum Unterschiede zu den inneren Relationenmarkierungen *Graphmarkierungen* genannt werden sollen (hier allerdings mit diesen übereinstimmen). Die zugehörige Relation (Evaluierung auf der Grundmenge A) ist ϱ^A. Der Graph in Fig. 4(b) ist der Relationengraph der Teridentität. Er hat drei freie Valenzen mit den Graphmarkierungen $1, 2, 3$. Die Evaluierung ist natürlich als die Relation id_3^A festgelegt.

(PAL2) Permutation der Valenzen: Es sei $\mathfrak{G}$ ein m-stelliger Relationengraph mit Evaluierung $\mathfrak{G}^A$ und $\alpha : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ sei eine Permutation. Dann ist der Graph in Abb. 4(c), der aus $\mathfrak{G}$ durch Umnumerierung der Graphmarkierungen entsteht (Markierung i wird durch Markierung $\alpha(i)$ ersetzt), ein m-stelliger Relationengraph, der mit $\pi_\alpha(\mathfrak{G})$ bezeichnet wird. Die Evaluierung wird definiert durch

$$\pi_\alpha(\mathfrak{G})^A := \{(a_1, \ldots, a_m) \mid (a_{\alpha(1)}, \ldots, a_{\alpha(m)}) \in \mathfrak{G}^A\}.$$

(PAL3) (kartesisches) Produkt): Es seien $\mathfrak{G}_i$ m_i-stellige Relationengraphen ($i = 1, 2$). Dann ist der Graph in Abb. 4(d), der durch Nebeneinanderschreiben und Umnumerierung der Graphmarkierungen von $\mathfrak{G}_2$ (gemäß $i \mapsto m_1 + i$ für $i \in \{1, \ldots, m_2\}$) entsteht, ein $(m_1 + m_2)$-stelliger Relationengraph, der mit $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$ bezeichnet wird. Die Evaluierung ist gegeben durch:

$$(\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2)^A := \{(a_1, \ldots, a_{m_1}, b_1, \ldots, b_{m_2}) \,|(a_1, \ldots, a_{m_1}) \in \mathfrak{G}_1^A, (b_1, \ldots, b_{m_2}) \in \mathfrak{G}_2^A\}.$$

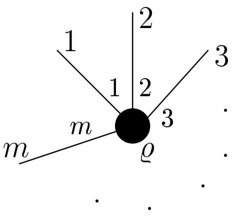
(PAL4) Verbinden freier Valenzen: Es sei $\mathfrak{G}$ ein m-stelliger Relationengraph mit $m \geq 2$. Weiter sei $1 \leq i < j \leq m$. Dann ist der Graph in Abb. 4(e), der durch das Verbinden der Valenzen mit den Markierungen i and j entsteht (wobei diese Graphmarkierungen gelöscht und die anderen umnumeriert werden), ein $(m-2)$-stelliger Relationengraph, der mit $\delta_{ij}(\mathfrak{G})$ bezeichnet wird. Die Evaluierung ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}(\delta_{ij}\mathfrak{G})^A := \{(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_m) \in A^{m-2} \mid \\ \exists\, b \in A : (a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_m) \in \mathfrak{G}^A\}.\end{aligned}$$

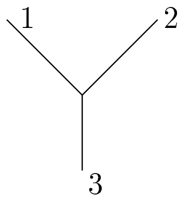
(PAL5) Negation (Komplementbildung): Es sei $\mathfrak{G}$ ein m-stelliger Relationengraph. Dann ist der Graph in Abb. 4(f), der aus $\mathfrak{G}$ durch Einschließen in eine einfache geschlossene Linie (auch *Negationsoval* genannt) und durch Verlängerung der freien Valenzen (bei Beibehaltung der Graphmarkierungen) entsteht, ein Relationengraph, der mit $\neg(\mathfrak{G})$ bezeichnet wird. Die Evaluierung ist das mengentheoretische Komplement:

$$(\neg(\mathfrak{G}))^A := A^m \setminus \mathfrak{G}^A.$$

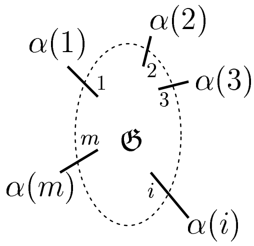
(PAL5') Lokale Negation: Dies ist ein Spezialfall von (PAL5). Für einen atomaren Relationengraphen ϱ wird der Relationengraph $\neg(\varrho)$ auch lokal negierter atomarer Relationengraph genannt; man zeichnet ihn auch einfach durch Änderung der Relationenmarkierung ϱ in $\neg\varrho$ (das Negationsoval gemäß (PAL5) wird dann nicht eingezeichnet).



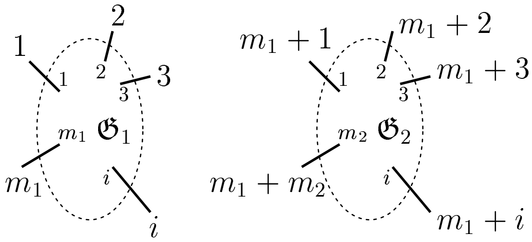
(a) Atomarer Relationengraph ϱ



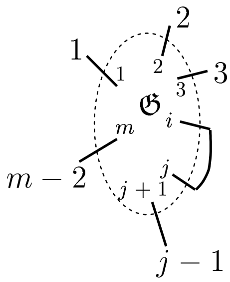
(b) Atomarer Relationengraph id_3



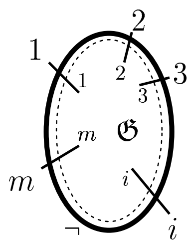
(c) $\pi_\alpha(\mathfrak{G})$



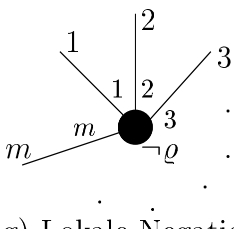
(d) $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$



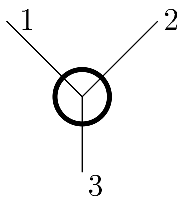
(e) $\delta_{ij}(\mathfrak{G})$



(f) $\neg(\mathfrak{G})$



(g) Lokale Negation $\neg\varrho$



(h) $\neg\mathsf{id}_3$

Abbildung 4: Konstruktion von Relationengraphen

Die kleinen Markierungen (innerhalb der gepunkteten Linien) in (c)-(f) sind die ursprünglichen Graphmarkierungen von $\mathfrak{G}$ und müssen durch die neuen Graphmarkierungen ersetzt werden, die außerhalb der gepunkteten Linie gezeichnet sind.

3.3. Beispiel. Am Beispiel von Abb. 5 soll demonstriert werden, wie der Aufbau von Relationengraphen funktioniert. Hat man die beiden Relationengraphen $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}'_0$ gegeben, so kann man durch einfaches Zusammenfügen sofort den Relationengraphen $\mathfrak{G}_6$ zeichnen, bei Benutzung eines Negationsovals und der lokalen Negation auch den Relationengraphen $\mathfrak{G}_8$. Die freien Valenzen (hier sind es nur zwei) kann man nach dem Zeichnen einfach durchnumerieren (mit diesen Graphmarkierungen wird das Bildchen dann zu einem „richtigen" Relationengraphen).

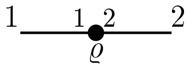
Mühsamer ist es, mit den Regeln (PAL1)-(PAL5) diesen Relationengraphen $\mathfrak{G}_6$ formal zu konstruieren. Wie das funktioniert zeigen die Zwischenkonstruktionen $\mathfrak{G}_1$ bis $\mathfrak{G}_5$. Rechts neben dem Graphen ist der entsprechende Konstruktionsterm angegeben. Wie man sieht, wird beispielsweise das Zusammenführen bzw. Aufspalten von freien Valenzen durch die Teridentität modelliert.

3.4. Bemerkung. Die PAL-Operationen hängen sehr eng mit sogenannten Relationenklonen und Relationenalgebren ([PösK79],[Pös03]) zusammen, mit denen auch das „Rechnen" mit Relationen untersucht werden kann. Es zeigt sich, dass PAL die gleiche Ausdrucksstärke wie die anderweitig bekannten relationalen Kalküle hat (und auch wie die Prädikatenlogik erster Stufe). Für genauere Informationen dazu sei auf [HerP04b] verwiesen. Dort wird auch auf die besondere Rolle der Teridentität id_3 (die auch schon in [Bur91] diskutiert wird) eingegangen, zu der abschließend noch ein kleines Problem(chen) erwähnt werden soll.

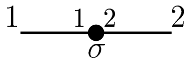
3.5. Die Teridentität. Die Teridentiät id_3 (vgl. 3.1 und Abb. 3b) ist bei der Konstruktion von Relationengraphen in gewisser Weise unverzichtbar. Man kann beweisen, dass in jedem Relationengraphen $\mathfrak{G}$, der die Teridentität auf einer (beliebigen, aber mindestens 2-elementigen) Grundmenge A modelliert (d.h. $\mathfrak{G}^A = \mathsf{id}_3^A$), mindestens eine 3-stellige Relation vorkommen muss.

Bildlich gesprochen bedeutet das: wenn man einen 3-stelligen Relationengraphen $\mathfrak{G}$ hat (d.h. 3 freie „Ärmchen" nach außen), in dem aber nur ein- oder zweistellige Relationensymbole vorkommen, dann kann man die Relationensymbole mit konkreten Relationen belegen (evaluieren) wie man will, nie wird $\mathfrak{G}^A$ die Teridentität sein. Anschaulich ist das „fast" klar, denn dabei können höchstens zwei der freien „Ärmchen" durch eine Kette von Relationen (wie beim Relationenprodukt, vgl. erste Abb. in 3.2) verbunden sein, während ein „Ärmchen" von den beiden anderen im Prinzip unabhängig ist (und damit die Gleichheit von zwei Komponenten eines Tripel $(x, y, z) \in \mathfrak{G}^A$ nicht erzwingen kann, dass auch noch die dritte Komponente gleich ist; also wird entweder $\mathfrak{G}^A \subsetneqq \mathsf{id}_3^A$ oder $\mathsf{id}_3^A \subsetneqq \mathfrak{G}^A$ sein). Für Relationengraphen ohne Negationsovale ist der Beweis fast trivial; aber für beliebige Relationengraphen $\mathfrak{G}$ existiert bisher (nach Kenntnis des Autors) nur ein ziemlich aufwändiger, technisch komplizierter Beweis (in [HerP04a]), der sich trotz mancher Bemühungen noch nicht vereinfachen ließ. Vielleicht hat ein Zuhörer eine Idee?

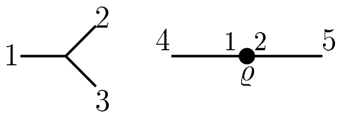
3.6. Begriffliche Graphen. Abschließend soll noch kurz auf eine Anwendung eingegangen werden. In der Informatik hat sich eine ganze Forschungsrichtung entwickelt, die sich mit sogenannten „begrifflichen Graphen" (*conceptual graphs*) beschäftigt (vgl. z.B. [Sow84], [Sow92]). Diese „Graphen" sind nichts anderes als die Peirceschen existenziellen Graphen bzw. Relationengraphen, allerdings für den Umgang mit Datenstrukturen (und auch für die Verwendung von Komputern) weiterentwickelt (eine mathematische



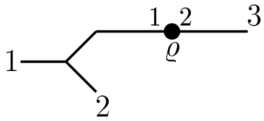
$\mathfrak{G}_0 := \varrho$



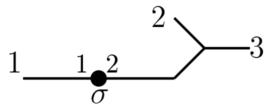
$\mathfrak{G}_0' := \sigma$



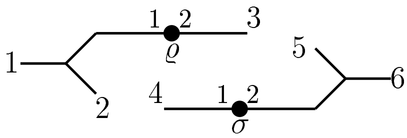
$\mathfrak{G}_1 := \mathsf{id}_3 \times \mathfrak{G}_0$



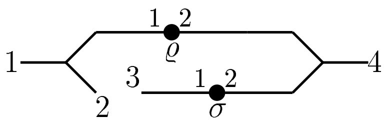
$\mathfrak{G}_2 := \delta_{24}(\mathfrak{G}_1)$



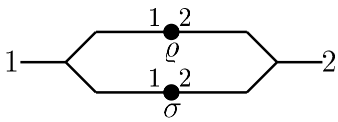
$\mathfrak{G}_3 := \delta_{23}(\mathfrak{G}_0' \times \mathsf{id}_3)$



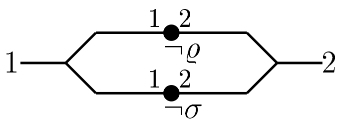
$\mathfrak{G}_4 := \mathfrak{G}_2 \times \mathfrak{G}_3$



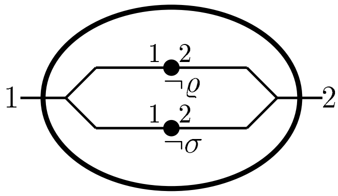
$\mathfrak{G}_5 := \delta_{35}(\mathfrak{G}_4)$



$\mathfrak{G}_6 := \delta_{23}(\mathfrak{G}_5)$ (Konjunktion $\varrho \wedge \sigma$)



$\mathfrak{G}_7$ die gleiche Konstruktion wie $\mathfrak{G}_6$ mit lokal negierten Relationensymbolen



$\mathfrak{G}_8 = \neg(\mathfrak{G}_7)$ (Disjunktion $\varrho \vee \sigma$)

Abbildung 5: Relationengraphen und die entsprechenden Konstruktionsterme

Fundierung basierend auf der formalen Begriffsanalyse ([GanW96]) findet man mit den *concept graphs* in [Dau03]). In Abbildung 6 ist ein einfaches Beispiel eines begrifflichen Graphen angegeben, das kaum einer Erklärung bedarf: John is going to Boston by Bus.

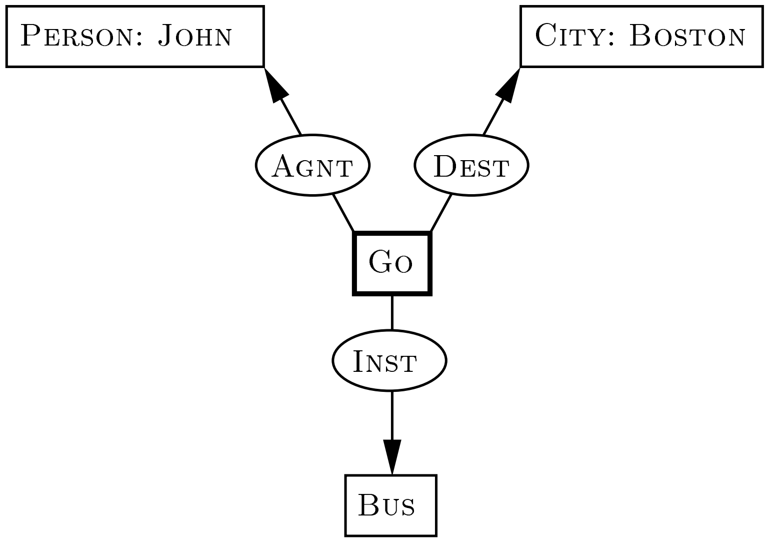
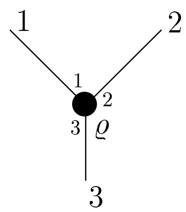


Abbildung 6: Begrifflicher Graph „John is going to Boston by Bus“

Zu Grunde liegt der folgende einfache Relationengraph,



wobei ϱ ein 3-stellige Relationensymbol ist. Zum begrifflichen Graphen gelangt man durch Belegung von ϱ mit dem konkreten dreistelligen Attribut Go. Die Relationenmarkierungen werden nun nicht mehr mit $1, 2, 3$ durchnumeriert, sondern erhalten die verbalen Markierungen Agnt (Agent) für die erste Komponente, Dest (Destination) für die zweite und Inst (Instrument) für die dritte Komponente. Gleichzeitig wird damit auch die Graphmarkierung für die freien Valenzen gegeben.

Die an den freien Valenzen angebrachten Boxen enthalten Werte, mit denen die entsprechenden freien Valenzen belegt werden können. Der so entstehenden begriffliche Graph ist dann gleichbedeutend mit der Aussage, dass das angegebene Wertetripel zu der Relation gehört, d.h.

$$\left(\boxed{\text{Person: John}}, \boxed{\text{City: Boston}}, \boxed{\text{Bus}}\right) \in \boxed{\text{Go}}$$

Die Formalisierung von Aussagen durch solche begrifflichen Graphen hat einen großen Vorteil: sie ist unabhängig von der benutzten (natürlichen) Sprache – der Graph ist der gleiche, nur die Umwandlung der Aussage in einen Satz der gerade benutzten Sprache folgt dann den Regeln dieser Sprache (im Englischen wird Go als „(Agnt) is going to

(Dest) BY (Inst)“ übersetzt, im Deutschen würde man „ (Agnt) FÄHRT MIT (Inst) NACH (Dest)“ sagen, also wäre der betrachtete Graph deutsch durch JOHN FÄHRT MIT DEM BUS NACH BOSTON wiederzugeben).

Mit diesem Beitrag konnten nur einige Facetten der Peirceschen Algebraischen Logik angerissen werden. Vielleicht bekommt aber der Eine oder die Andere unter den Zuhörer(inne)n Lust, einmal selbst mit und in solchen „Bildern“ zu „denken“.

Literatur

[BelS69] J. Bell und A. Slomson, *Models and ultraproducts.* North-Holland, 1969.

[Bur91] Robert W. Burch, *A Pearcean Reduction Thesis: the foundations of topological logic.* Texas Tech University Press, 1991.

[Dau03] F. Dau, *The Logic System of Concept Graphs with Negations (And its Relationship to Predicate Logic).* Lecture Notes in Artificial Intelligence series (LNCS 2892), Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin, 2003, (PhD-Thesis).

[GanW96] B. Ganter und R. Wille, *Formale Begriffsanalyse – Mathematische Grundlagen.* Springer-Verlag, 1996.

[HerP04a] J. Hereth Correia und R. Pöschel, *Peircean algebraic logic and relational clones*, 2004, Manuskript (in Vorbereitung).

[HerP04b] J. Hereth Correia und R. Pöschel, *The power of Peircean Algebraic Logic (PAL).* LNCS, Springer, 2004. (im Druck)

[Pös03] R. Pöschel, *Galois connections for operations and relations.* In: K. Denecke, M. Erné, und S.L. Wismath (Hrg.), *Galois connections and applications*, Kluwer, Dordrecht, 2003, (im Druck).

[PösK79] R. Pöschel und L.A. Kalužnin, *Funktionen- und Relationenalgebren.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979, Birkhäuser Verlag Basel, Math. Reihe Bd. 67, 1979.

[Rob73] D.D. Roberts, *The Existential Graphs of Charles S. Peirce.* Mouton, The Hague, 1973.

[Sch10] E. Schröder, *Abriss der Algebra der Logik, Zweiter Teil: Aussagentheorie, Gleichungen und Ungleichungen.* B.G. Teubner, Leipzig u. Berlin, 1910.

[Seb81] Th.A. Sebeok, *The Play of Musement.* Indiana University Press, Bloomington, 1981.

[Sow] J.F. Sowa, *Existential graphs,* MS514 *by Charles Sanders Peirce.* `http://www.jfsowa.com/peirce/ms514.htm`.

[Sow84] J.F. Sowa, *Conceptual Structures: Information Processing in Mind and Machine.* Addison-Wesley, 1984.

[Sow92] J.F. Sowa, *Conceptual graphs summary.* In: T.E. Nagle, J.A. Nagle, L.L. Gerholz, und P.W. Eklund (Hrg.), *Conceptual structures: Current Research and Practice*, Ellis Horwood, 1992, pp. 3–52.

[Tar41] A. Tarski, *On the calculus of relations.* J. Symbolic Logic 6, (1941), 73–89.

[WhiR10] A.N. Whitehead und B. Russell, *Principia mathematica.* Cambridge, 1910.

[Wil01] R. Wille, *Mensch und Mathematik: Logisches und mathematisches Denken.* In: K. Lengnink, S. Prediger, und F. Siebel (Hrg.), *Mathematik und Mensch: Sichtweisen der Allgemeinen Mathematik*, Band 2 der *Darmstädter Texte zur Allgemeinen Wissenschaft*, Verlag Allgemeine Wissenschaft - HRW e.K., 2001, S. 141–160.