TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik | Institut für Algebra

Prof. Reinhard Pöschel | 21.1.2020

2. Übung (21.1.2020) zur Vorlesung "Universelle Algebren und Koalgebren"

Bemerkung: Die Aufgaben können sicher nicht alle in der Übung besprochen werden. Vorrangig sollen solche Aufgaben behandelt werden, zu denen Sie Fragen haben.

Die **Aufgabe 2.1** ist **schriftlich** zu lösen und zu Beginn der Übung abzugeben.

Aufgabe 2.1 (Hausaufgabe!): Beweisen Sie mit 3.28(A), dass die Boolesche Algebra

$$\underline{\mathbf{2}} := \langle \{0,1\}; \wedge, \vee, ^{-}, 0, 1 \rangle$$

(vom Typ $(2,2,1,0,0)$, $\wedge$ Konjunktion, $\vee$ Disjunktion, $^{-}$ Negation, 0,1 Konstanten) bis auf Isomorphie die einzige subdirekt irreduzible Boolesche Algebra ist.

Versuchen Sie es erst ohne die nachfolgenden Hinweise.

Hinweise: Betrachten Sie eine beliebige Boolesche Algebra $\underline{\mathbb{B}} = \langle B; \wedge, \vee, ^{-}, 0, 1 \rangle$ mit $|B| \geq 3$. Es sei $a \in B \setminus \{0,1\}$. Zeigen Sie, dass die Relationen

$$\theta := \{(x,y) \in B^2 \mid x \wedge a = y \wedge a\},$$
$$\psi := \{(x,y) \in B^2 \mid x \vee a = y \vee a\}$$

nichttriviale Kongruenzrelationen sind und $\theta \cap \psi = \Delta_B$ gilt. Dazu benötigen Sie verschiedene Rechenregeln zum Rechnen in Booleschen Algebren (z.B. $\wedge, \vee$ assoziativ und kommutativ, distributiv, $x = (x \wedge a) \vee x$, $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$, $1 \wedge a = a$, $0 \vee a = a$, $\overline{a} \wedge a = 0$, $1 \vee a = 1$, $0 \wedge a = 0$, $\overline{a} \vee a = 1$).
Der Nachweis, dass $\underline{\mathbf{2}}$ subdirekt irreduzibel ist, ist trivial (warum?).

Wen es reizt, kann sich auch an der folgenden ZUSATZaufgabe versuchen (die mit dem Vorlesungsstoff allein nicht lösbar ist, aber trotzdem auch in der Übung besprochen werden kann): Finden Sie eine Boolesche Algebra, die nicht direktes Produkt (genauer Potenz) von $\underline{\mathbf{2}}$ ist und stellen Sie sie als subdirektes Produkt dar.

Aufgabe 2.2: Es sei Ω eine Signatur mit $\Omega_0 = \{\omega_F, \omega_T\}$, $\Omega_1 = \{\omega_1\}$, $\Omega_2 = \{\omega_2\}$ ($\Omega_n = \emptyset$ für $n \geq 3$).

(i) Welche der folgenden Zeichenketten sind Elemente der Termalgebra $T_\Omega(X)$ mit $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$? (Tabelle ausfüllen). Zeichnen Sie die zugehörigen Bäume und markieren Sie die Grundterme.

	Zeichenkette	Term?	Grundterm?
(a)	ω_T		
(b)	$\omega_1\omega_2x_1x_2\omega_2\omega_T\omega_F$		
(c)	$\omega_2\omega_1\omega_2\omega_1x_1x_2x_3$		
(d)	$\omega_2\omega_2x_1\omega_1\omega_1x_2$		
(e)	$\omega_1\omega_2\omega_T\omega_F$		
(f)	$x_1\omega_T\omega_2\omega_1x_1$		
(g)	$\omega_2\omega_2\omega_2\omega_2x_1x_2x_3x_4x_5$		
(h)	$\omega_1\omega_2\omega_1\omega_Fx_1$		

(ii) Interpretieren Sie die Terme in der Algebra $\underline{B} = \langle\{0,1\}; 0, 1, \neg, \vee\rangle$ mit den BOOLEschen Operationen $\omega_F^{\underline{B}} = 0, \omega_T^{\underline{B}} = 1$, $\omega_1^{\underline{B}} = \neg$, $\omega_2^{\underline{B}} = \vee$, d.h., bestimmen Sie die zu den Termen t aus (i) gehörigen Termfunktionen $t^{\underline{B}}$ durch Angabe der Wertetafel.

Aufgabe 2.3: Es sei $\underline{U}$ die von $\{27, 81, 729\}$ erzeugte Unteralgebra von $\langle\mathbb{N}; +, \mathrm{ggT}, \mathrm{kgV}\rangle$. Zeigen Sie mit algebraischer Induktion, dass die Quersumme aller $x \in U$ jeweils durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 2.4: In dieser Aufgabe geht es um das direkte Produkt von universellen und von F-Algebren.

a) Es seien $\underline{A_1}, \underline{A_2}, \underline{B} \in \mathrm{Alg}(\Omega)$ und $f_1 : \underline{B} \to \underline{A_1}$, $f_2 : \underline{B} \to \underline{A_2}$ Homomorphismen. Beweisen Sie, dass es genau einen Homomorphismus $k : \underline{B} \to \underline{A_1} \times \underline{A_2}$ gibt, so dass $k; p_1 = f_1$ und $k; p_2 = f_2$ gilt (p_1, p_2 bezeichnen die Projektionshomomorphismen von $\underline{A_1} \times \underline{A_2}$ auf $\underline{A_1}$ bzw. $\underline{A_2}$; vgl. Vorlesung 3.25(b)).

b) Es sei $F : \underline{Set} \to \underline{Set}$ ein Funktor. Zeigen Sie, dass das direkte Produkt zweier F-Algebren (vgl. Vorlesung 3.25(c)) die Universalitätseigenschaft in der Kategorie der F-Algebren erfüllt.

Aufgabe 2.5: Es sei Ω eine Signatur mit $p \in \Omega_2$ (d.h p ist ein zweistelliges Operationssymbol). Es sei $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}\,\Sigma$ mit $\Sigma := \{ppx_1x_2x_3 \approx px_1px_2x_3\}$

a) Wie heißt das Gesetz, das durch diese Identität aus Σ für die binäre Operation p beschrieben wird?

b) Zeigen Sie $\Sigma \vdash pppx_1x_3x_4x_5 \approx px_1px_3px_4x_5$ durch Angabe einer Ableitung mittels Schlussregeln der Gleichungslogik (vgl. Vorlesung 5.7).

Aufgabe 2.6: Beweisen Sie Lemma 5.9 aus der Vorlesung: Es sei $\Sigma \subseteq T_\Omega(X) \times T_\Omega(X)$ eine Menge von Identitäten. Dann führen die Konstruktionen $\mathbf{I}, \mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{H}$ nicht aus der Klasse $\mathrm{Mod}\,\Sigma$ heraus, d.h. für $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}\,\Sigma$ gilt:

- $\mathbf{I}\mathcal{K} \subseteq \mathbf{H}\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}\,\Sigma$
- $\mathbf{S}\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}\,\Sigma$
- $\mathbf{P}\mathcal{K} \subseteq \mathrm{Mod}\,\Sigma$

Aufgabe 2.7: Es sei $\circ$ ein 2-stelliges Operationssymbol und

$$\Sigma_1 := \{(x \circ y) \circ z \approx x \circ (y \circ z)\,,\ x \circ y \circ x \approx x\},$$
$$\Sigma_2 := \{(x \circ y) \circ z \approx x \circ z\,,\ x \circ x \approx x\}.$$

Zeigen Sie, dass die von Σ_2 erzeugte Gleichungstheorie in der von Σ_1 erzeugten enthalten ist, d.h. es gilt $\Sigma_1 \models \Sigma_2$. Gilt auch die Umkehrung?

Aufgabe 2.8: Beweisen Sie Satz 5.13 (zumindest (b)).

Aufgabe 2.9: Wie kann man binäre Relationen als F-Koalgebren beschreiben? Geben Sie den Funktor F an, die Umwandlung einer Relation in eine F-Koalgebra und beschreiben Sie die Homomorphismen elementar.

Aufgabe 2.10:

a) Es seien (A, α) und (B, β) terminale F-Koalgebren für einen Funktor $F : \underline{Set} \to \underline{Set}$. Zeigen Sie, dass diese dann *isomorph* sind, d. h. es gibt einen bijektiven Homomorphismus zwischen den beiden Koalgebren.

b) Bestimmen Sie die terminale F-Koalgebra für jeden der drei folgenden Funktoren

- $F_{\{\emptyset\}}$ (i.e. $F(X) := \{\emptyset\}$),
- $F(X) := 1 + X$ (vgl. Bsp. 3.7),
- $F(X) := 1 + A \times X$.
  Betrachten Sie zunächst den Fall $A = 1 = \{\emptyset\}$, dann den Fall, dass A zweielementig ist und überlegen Sie zuletzt, was die terminale Algebra für eine beliebige endliche, nichtleere Menge A ist.

Aufgabe 2.11: Zeigen Sie, dass jede Bisimulation einer terminalen Koalgebra (T, τ) in der trivialen Bisimulation Δ_T enthalten sein muss.

Aufgabe 2.12: Ein *nicht-deterministisches Transitionssystem über* A ist ein Paar (S, τ) mit $\tau \subseteq S \times A \times S$. Diese können als F-Koalgebren zu dem Funktor F mit $F(S) := \mathcal{P}(A \times S)$ betrachtet werden (vgl. 6.5(b)). Für ein Tripel $(s, a, t) \in \tau$ schreiben wir in diesem Zusammenhang $s \xrightarrow{a} t$ (damit kann (S, τ) als gerichteter, Graph (mit labels $a \in A$) dargestellt werden).

a) Beschreiben Sie elementar, d. h. für Systeme (S_1, τ_1) und (S_2, τ_2) über A, was Bisimulationen zwischen F-Koalgebren sind ("proof rule for bisimulation").

b) Veranschaulichen Sie die folgenden nicht-deterministischen Transitionssysteme durch Diagramme der entsprechenden gerichteten und gelabelten Graphen. Überprüfen Sie, zwischen welchen der Systeme eine Bisimulation exisiert, die das Paar (1,1) enthält. Es sei $A := \{a, b, c\}$:

(S_1, τ_1) mit $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\tau_1 = \{1 \xrightarrow{a} 2, 1 \xrightarrow{a} 3, 2 \xrightarrow{b} 4, 3 \xrightarrow{c} 5, 4 \xrightarrow{a} 6, 5 \xrightarrow{a} 6\}$,
(S_2, τ_2) mit $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\tau_2 = \{1 \xrightarrow{a} 2, 2 \xrightarrow{b} 3, 2 \xrightarrow{c} 4, 3 \xrightarrow{a} 5, 4 \xrightarrow{a} 5\}$,
(S_3, τ_3) mit $S_3 = \{1, 2, 3, 4\}$, $\tau_3 = \{1 \xrightarrow{a} 2, 2 \xrightarrow{b} 3, 2 \xrightarrow{c} 3, 3 \xrightarrow{a} 4\}$,
(S_4, τ_4) mit $S_4 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\tau_4 = \{1 \xrightarrow{a} 2, 1 \xrightarrow{a} 3, 2 \xrightarrow{b} 4, 3 \xrightarrow{c} 4, 4 \xrightarrow{a} 5\}$,
(S_5, τ_5) mit $S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\tau_5 = \{1 \xrightarrow{a} 2, 2 \xrightarrow{b} 3, 2 \xrightarrow{c} 4, 3 \xrightarrow{a} 5, 4 \xrightarrow{a} 6\}$.