TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Fakultät Mathematik | Institut für Algebra
Prof. Reinhard Pöschel | 26.11.2019

1. Übung (26.11.2019) zur Vorlesung "Universelle Algebren und Koalgebren"

Bemerkung: Die Aufgaben können sicher nicht alle in der Übung besprochen werden. Vorrangig sollen solche Aufgaben behandelt werden, zu denen Sie Fragen haben.

Die **Aufgabe 1.1** ist **schriftlich** zu lösen und wird zu Beginn der Übung besprochen.

Aufgabe 1.1: Zeigen Sie (nur unter Verwendung der Definition in 3.11 bzw. 3.4) für zwei Unteralgebren einer universellen Algebra (Def. 3.11) bzw. einer F-Algebra (Def. 3.4, für beliebigen Funktor F), dass der Durchschnitt der beiden Unteralgebren wieder eine Unteralgebra ist.

Aufgabe 1.2: a) Zeigen Sie: Zwei Abbildungen

$$\varphi : \mathfrak{P}(M_1) \to \mathfrak{P}(M_2), \quad \psi : \mathfrak{P}(M_2) \to \mathfrak{P}(M_1)$$

bilden (für geeignetes $R \subseteq M_1 \times M_2$, vgl. Vorl. 1.13) eine GALOIS-Verbindung (φ, ψ) zwischen $\mathfrak{P}(M_1)$ und $\mathfrak{P}(M_2)$ genau dann, wenn für alle $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{P}(M_1)$, $Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{P}(M_2)$ die folgenden Eigenschaften (I) - (IV) gelten:

(I) $X_1 \subseteq X_2 \implies X_1^\varphi \supseteq X_2^\varphi$

(II) $Y_1 \subseteq Y_2 \implies Y_1^\psi \supseteq Y_2^\psi$

(III) $X \subseteq X^{\varphi\psi}$

(IV) $Y \subseteq Y^{\psi\varphi}$.

b) Beweisen Sie unter alleiniger Benutzung von (I) - (IV) die folgenden Eigenschaften für eine GALOIS-Verbindung (φ, ψ):

(V) $X^{\varphi\psi\varphi} = X^\varphi$.

(VI) $Y^{\psi\varphi\psi} = Y^\psi$.

(VII) $h_1 : X \mapsto X^{\varphi\psi}$ ist ein Hüllenoperator.

(VIII) $h_2 : Y \mapsto Y^{\psi\varphi}$ ist ein Hüllenoperator.

c) Zeigen Sie unter Benutzung von (I) - (VIII), dass (φ, ψ) genau dann eine GALOIS-Verbindung ist, wenn für alle $X \in \mathfrak{P}(M_1)$ und $Y \in \mathfrak{P}(M_2)$ gilt:

(IX) $Y \subseteq X^\varphi \iff X \subseteq Y^\psi$.

Aufgabe 1.3: Zwischen den beiden Mengen $M_1 = \{\text{Patient } 1, \text{Patient } 2, \ldots, \text{Patient } 5\}$ und $M_2 = \{\text{Kopfschmerzen}, \text{Husten}, \text{Übelkeit}\}$ sei folgende binäre Relation $R \subseteq M_1 \times M_2$ gegeben

R	Kopfschmerzen	Husten	Übelkeit
Patient 1	$\times$	$\times$	
Patient 2	$\times$		
Patient 3			$\times$
Patient 4	$\times$	$\times$	$\times$
Patient 5	$\times$		$\times$

also z.B.
$(\text{Patient } 1, \text{Kopfschmerzen}) \in R$
aber $(\text{Patient } 1, \text{Übelkeit}) \notin R$.

Es sei (φ, ψ) die zugehörige Galoisverbindung.

a) Berechnen Sie alle Hüllen des Hüllenoperators h_1 (Hinweis: Dies sind alle Mengen der Form Y^ψ $(Y \subseteq M_2)$).

Bemerkung: eine Menge $X \subseteq A$ heißt *Hülle* eines Hüllenoperators $h : \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(A)$, wenn $X = X^h$ gilt.

b) Berechnen Sie alle Hüllen des Hüllenoperators h_2 (Überlegen Sie, wie Sie die Ergebnisse aus a) benutzen können).

c) Ein Paar $(X, Y) \in \mathfrak{P}(M_1) \times \mathfrak{P}(M_2)$ heißt *(formaler) Begriff* (im *(formalen) Kontext* (M_1, M_2, R)), falls $X^\varphi = Y$ und $Y^\psi = X$ gilt.
Geben Sie eine Liste aller Begriffe des Kontextes (M_1, M_2, R) an.

d) Auf der Menge der Begriffe ist in natürlicher Weise eine Ordnungsrelation $\preceq$ durch

$$(X_1, Y_1) \preceq (X_2, Y_2) :\iff X_1 \subseteq X_2$$

gegeben (Bemerkung: Die Bedingung $Y_2 \subseteq Y_1$ ist dazu äquivalent).
Dadurch ist sogar ein Verband – der sogenannte *Begriffsverband* des Kontextes – gegeben. Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm (vgl. Vorl. 1.9) dieses Begriffsverbandes, d.h. der durch $\preceq$ geordneten Menge der Begriffe (und beschriften Sie die Punkte mit den Begriffen (X, Y)).

e) Die Hüllen der Hüllenoperatoren h_1 bzw. h_2 bilden ebenfalls (bzgl. Inklusion) einen Verband (Unterverband des Potenzmengenverbandes $\mathfrak{P}(M_1)$ bzw. $\mathfrak{P}(M_2)$). Was haben diese Verbände mit dem Begriffsverband aus (d) zu tun?

Aufgabe 1.4: Es sei $F : \underline{Set} \to \underline{Set}$ ein Funktor und $f : A \to B$ eine Abbildung $(A, B \in \underline{Set})$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) f injektiv $\implies$ $F(f)$ injektiv,

b) f surjektiv $\implies$ $F(f)$ surjektiv,

c) f bijektiv $\implies$ $F(f)$ bijektiv und $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$.

Aufgabe 1.5: Es seien $F : \underline{Set} \to \underline{Set}$ ein Funktor und $f : (A, \alpha) \to (B, \beta)$ ein bijektiver Homomorphismus von F-Algebren. Beweisen Sie, dass dann auch f^{-1} ein Homomorphismus ist.

Aufgabe 1.6: Bestimmen Sie die initialen F-Algebren für die konstanten Funktoren $F_\emptyset$ und $F_{\{\emptyset\}}$ (vgl. Vorl. 3.3(b)). Sind diese (in diesem Fall/allgemein) eindeutig bestimmt?

Aufgabe 1.7:

a) Es sei $\underline{G} := (G, \cdot, ^{-1}, e)$ eine Gruppe im klassischen Sinne. Beschreiben Sie diese Gruppe als F-Algebra (G, γ) indem sie einen geeigneten Funktor $F : \underline{Set} \to \underline{Set}$ und einen Morphismus $\gamma : F(G) \to G$ angeben.

b) Zeigen Sie, dass die F-Unteralgebren der F-Algebra (G, γ) gerade den Untergruppen von $\underline{G}$ entsprechen.

c) Sei $\underline{H}$ eine weitere Gruppe im klassischen Sinne. Gemäß a) können wir auch diese Gruppe als F-Algebra (H, γ_2) interpretieren. Zeigen Sie, dass eine Abbildung $h : G \to H$ genau dann ein (F-)Homomorphismus zwischen (G, γ_1) und (H, γ_2) ist, wenn es ein Homomorphismus zwischen den Gruppen $\underline{G}$ und $\underline{H}$ im klassischen Sinne ist.

Aufgabe 1.8: Wenn nur F_{Ob} angegeben ist (vgl. Vorl. 3.2), kann man dann F_{Mor} immer so definieren, dass $F : \underline{Set} \to \underline{Set}$ ein Funktor ist?

Aufgabe 1.9: Es sei $F_{Ob}\colon Ob(\underline{Set}) \to Ob(\underline{Set})$ gegeben durch $F(X) := \mathfrak{P}(X)$.

a) Wie kann F_{Mor} so definiert werden, dass F ein Funktor ist?

b) Es sei $A := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Wir betrachten die F-Algebra $\underline{A} := (A, \sup)$ sowie folgende Aussagen für eine Teilmenge $B \subseteq A$:

1. $-\infty \in B$,
2. $|B| < \infty$,
3. B ist kompakt,
4. Für alle $b_1, b_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $b_1 < b_2$ und $(b_1, b_2) \subseteq B$ gilt $b_2 \in B$,[1]
5. Für alle $a \in A$ mit der Eigenschaft $(\forall b < a : (b, a) \cap B \neq \emptyset)$ gilt $a \in B$.

Welche der folgenden Kombinationen aus den Aussagen (1)-(4) sind notwendig und/oder hinreichend dafür, dass B die Trägermenge einer Unteralgebra von $\underline{A}$ ist ($B \leq \underline{A}$)?

- (1)
- (1) & (2)
- (2) & (3)
- (1) & (3)
- (1) & (4)
- (1) & (3) & (4)
- (5)

Woran sieht man, dass eine notwendige und eine hinreichende Bedingung zusammen im Allgemeinen keine notwendige und hinreichende Bedingung ist?

[1] (b_1, b_2) bezeichnet hier das offene Intervall $\{c \in A \mid b_1 < c < b_2\}$.

Aufgabe 1.10: Es seien $\underline{A}$ und $\underline{B}$ universelle Algebren zur gleichen Signatur. Weiterhin sei $h : \underline{A} \to \underline{B}$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie:

a) $\mathrm{Im}(h) \leq \underline{B}$ und $\ker h \in \mathrm{Con}(\underline{A})$.

b) Es sei $\theta \in \mathrm{Con}(\underline{A})$. Dann ist $\mathrm{nat}_\theta : \underline{A} \to \underline{A}/\theta \,:\, a \mapsto [a]_\theta$ ein Homomorphismus und es gilt $\theta = \ker(\mathrm{nat}_\theta)$.

(vgl. Vorlesung 3.13(a)(b): $\mathrm{Im}(h) := \{h(x) \mid x \in A\}$ bezeichnet das *Bild* und $\ker(h) := \{(x,y) \in A^2 \mid h(x) = h(y)\}$ den *Kern* der Abbildung h.)

Aufgabe 1.11: Sei $\underline{A}$ eine universelle Algebra und $\theta, \psi \in \mathrm{Con}(\underline{A})$, wobei $\theta \subseteq \psi$. Zeigen Sie, dass es sich bei der Abbildung

$$(A/\theta)/(\psi/\theta) \to A/\psi : \; [[a]_\theta]_{(\psi/\theta)} \mapsto [a]_\psi$$

um einen Isomorphismus handelt (2. Isomorphiesatz 3.14).