R. Pöschel, Institut für Algebra, TU Dresden

Material zur Vorlesung S2 (LAAG II)

S2.4 Berechnung der Jordanschen Normalform
(ohne wie bei S2.1 die Matrix S bzw. die Jordanketten berechnen zu müssen)

Gegeben sei Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, wobei das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfalle.

(1) Berechnung der Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von A mit den algebraischen Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_r$

(2) Für jeden Eigenwert $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ werden die folgenden Zahlen berechnet:

$$\begin{aligned} r_k(\lambda) &:= \mathrm{rg}((A - \lambda E)^k) \\ N_s(\lambda) &:= r_{s-1}(\lambda) - 2 \cdot r_s(\lambda) + r_{s+1}(\lambda) \end{aligned}$$

wobei $s = 1, 2, 3, \ldots$ (falls $r_k(\lambda) = r_{k+1}(\lambda)$, so bricht die Folge der Zahlen $N_s(\lambda)$ mit $N_{k+1}(\lambda) = 0$ ab).

Satz. $N_s(\lambda)$ *ist die Anzahl der Jordankästchen der Form* $J_s(\lambda)$ *in der Jordanschen Normalform* J *von* A.

Damit ist die Jordansche Normalform bestimmt: Ist m_i die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i, so ist $N_s(\lambda_i) = 0$ für $s > m_i$ und die geometrische Vielfachheit n_i (= Anzahl der Jordankästchen zum Eigenwert λ_i) ist

$$n_i = \sum_{s=1}^{m_i} N_s(\lambda_i)\,.$$

Beweis siehe z.B. W. Gawronski, *Grundlagen der lineare Algebra.* Aula-Verlag Wiesbaden 1996, Satz 8.3.5 (S. 387).

Beispiel aus S2.3:

$\boxed{\lambda_1 = 2}$

$$A_1 := A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_0(\lambda_1) = \operatorname{rg} A_1^0 = \operatorname{rg} E = 6$$

$$r_1(\lambda_1) = \operatorname{rg} A_1^1 = \operatorname{rg} A_1 = 3$$

$$r_2(\lambda_1) = \operatorname{rg} A_1^2 = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$r_3(\lambda_1) = \operatorname{rg}(A_1^3) = 1 = r_2(\lambda_1) \text{ (Abbruch!)}$$

also

$N_1(\lambda_1) = 6 - 2 \cdot 3 + 1 = 1$ d.h. 1 Jordankästchen $J_1(\lambda_1) = (2)$

$N_2(\lambda_1) = 3 - 2 \cdot 1 + 1 = 2$ d.h. 2 Jordankästchen $J_2(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Wegen Abbruchbedingung ergibt sich wie erwartet $N_3(\lambda_1) = 1 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$.

$\boxed{\lambda_2 = 3}$

$$r_0(\lambda_2) = 6$$

$$r_1(\lambda_2) = \operatorname{rg}(A_2) = \operatorname{rg}(A - \lambda_2 E) = 5$$

$$r_2(\lambda_2) = \operatorname{rg}({A_2}^2) = 5 = \operatorname{rg}_1(\lambda_2) \text{ (Abbruch!)}$$

also $N_1(\lambda_2) = 6 - 2 \cdot 5 + 5 = 1$ d.h. 1 Jordankästchen $J_1(\lambda_2) = (3)$

Wegen Abbruchbedingung ist $N_s(\lambda_2) = 0$ für $s \geq 2$.

Ergebnis: Die Jordansche Normalform von A (vgl. S2.3) ist

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Jordankästchen für $\lambda_1 = 2$ sind hier nach absteigender Größe geordnet.