§ 2.3 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

1. Schritt Eigenwerte bestimmen

$$\det(A - \lambda E) = \left| \ \cdots \ \right| \underset{(\text{Üb!})}{=} (2-\lambda)^5 (3-\lambda)$$

Eigenwerte

$\lambda_1 = 2$ algebr. Vielfachh. $m_1 = 5$

$\lambda_2 = 3$ " " $m_2 = 1$

2. Schritt Basen der Eigenräume bestimmen

$\boxed{\lambda_1 = 2}$: $\mathrm{Eig}_{\lambda_1}(A) = \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_1 E)$

$$A_1 := A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}(A_1) = 3$ (zwei Null-Zeilen und $z_6 = z_2 - z_5$)

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Eig}_{\lambda_1} = \dim \mathrm{Ker}\, A_1 = n - \mathrm{rg}(A_1) = 6 - 3 = 3$$

$\exists$ 3 lin. unabhängige Eigenvektoren (in $\mathrm{Lös}(A_1, 0)$) $\xrightarrow{(*)}$ (Üb!)

Lösung:
$x_1 = 0$
$x_2 = x_5 + x_6$
$x_3 = -x_4 + x_5 + 2x_6$
x_4, x_5, x_6 freie Parameter

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Verfahren: 6.9, ~~Bsp. 6.10~~) Gaußscher Alg. vgl. 6.11

also $B_{\lambda_1} = \{u_1, u_2, u_3\}$

(*) (hier freie Parameter Basis einsetzen)

$\boxed{\lambda_2 = 3}$ $\quad \dim \mathrm{Eig}_{\lambda_2} = n_2 \leq \underbrace{m_2}_{\text{alg. Vielf.}} = 1$

$\Rightarrow n_2 = 1$

$\Rightarrow \exists\ 1$ (lin. unabh.) Eigenvektor

Lösung von $A_2 u = 0$

$(A_2 := A - \lambda_2 E)$

$$A_2 = A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung $\underbrace{}_{u \neq 0}$ (Üb), z.B.

$$u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allg. Lösung

$x_1 = 0$

$x_2 = x_4 - x_6$

$x_3 = 2x_4 - x_5 - 3x_6$

$x_4 = 0$

$x_5 = -2x_6$

x_6 freier Parameter

also $B_{\lambda_2} = \{ u_4 \}$

3. Schritt Bestimmung der Jordanketten:

$\boxed{K_{u_1}}$: $u_1^{(1)} := u_1$

$u_1^{(2)}$: Lösung von $A_1 u_1^{(2)} = u_1^{(1)}$

$$\underset{(\text{üb})}{\Longrightarrow} \quad u_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u_1^{(3)}$: Lösung von $A_1 u_1^{(3)} = u_1^{(2)}$

keine Lösung (erste Zeile von A_1 Null, erste Komponente von $u_1^{(2)}$ nicht Null)

$$\Rightarrow rg(A_2) \underset{\neq}{<} rg(A_2, u_1^{(2)})$$

$\Rightarrow$ Jordankette $K_{u_1} = (u_1^{(1)}, u_1^{(2)})$

$\boxed{K_{u_2}}$: $u_2^{(1)} := u_2$

$u_2^{(2)}$ Lösung von $A_1 u_2^{(2)} = u_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underset{(\text{üb!})}{\Longrightarrow}$ $u_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (zufällig! erste Spalte von A_1)

$u_2^{(3)}$ Lösung von $A_1 u_2^{(3)} = u_2^{(2)}$?

keine Lösung (erste Kompon. von $u_2^{(2)} \neq 0$, erste Zeile von A_1 Null)

$\Rightarrow$ Jordankette $K_{u_2} = (u_2^{(1)}, u_2^{(2)})$

$\boxed{K_{u_3}}$: $u_3^{(1)} := u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u_3^{(2)}$ Lösung von $A_1 u_3^{(2)} = u_3^{(1)}$?

keine Lösung (4. Zeile von A_1 Null, aber nicht 4. Komponente von $u_3^{(1)}$)

$\Rightarrow$ Jordankette $K_{u_3} = (u_3^{(1)})$

$\boxed{K_{u_4}}$ $u_4^{(1)} := u_4$

$u_4^{(2)}$ Lösung von $A_2 u_4^{(2)} = u_4^{(1)}$

keine Lösung (ist auch unmittelbar klar, da algebraische Vielfachheit von λ_2 gleich 1, also nur ein Vektor in K_{u_4})

$\Rightarrow$ Jordankette $K_{u_4} = (u_4^{(1)})$

Ergebnis:

$$B = (u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(1)}, u_2^{(2)}, u_3^{(1)}, u_4^{(1)})$$

ist Basis von $\mathbb{R}^6$ und die Matrix

Spalten

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

liefert Jordansche Normalform von A gemäß:

LA 6 || S2 - 13

$$M_B^B(f_A) = J = S^{-1}AS = \left(\begin{array}{ccccc} \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & & 0 & \\ & & \boxed{2} & & \\ & 0 & & & \boxed{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{5 alg. Vielf. von } \lambda_1 \\ \left.\right\} \text{1 alg. Vielf. von } \lambda_2 \end{array}$$

$J_{s_{1,1}}(\lambda_1)$, $J_{s_{1,2}}(\lambda_1)$, $J_{s_{1,3}}(\lambda_1)$, $J_{s_{2,1}}(\lambda_2)$

↑ ↑ ↑

3 Jordanketten für λ_1 $\Longrightarrow$ 3 Jordankästchen für λ_1

$\Rightarrow$ geom. Vielfachheit 3 von λ_1

λ