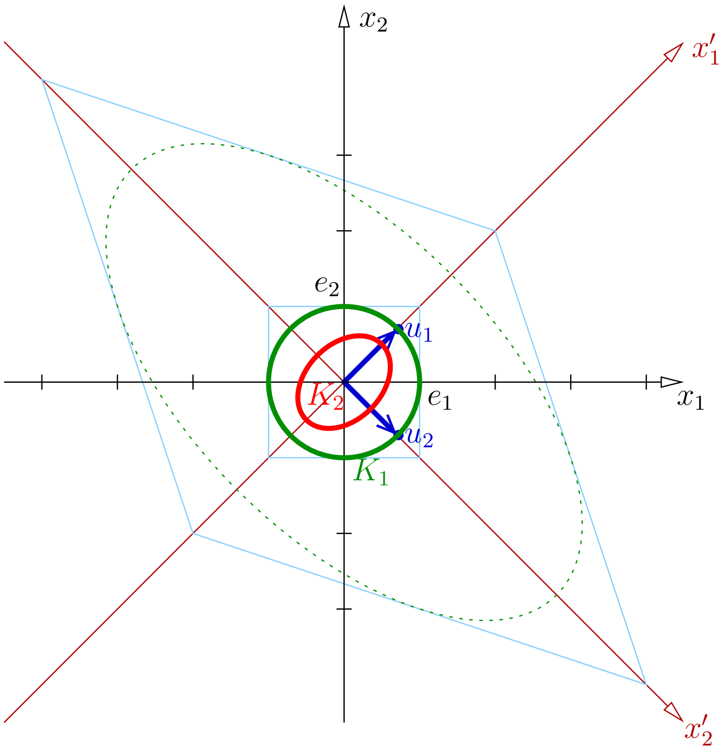
18.9 Hauptachsentransformation aus geometrischer Sicht

zu Beispiel 18.7 (vergleiche auch Beispiel 13.4)



lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$

Hauptachsensystem $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bilinearformen und Kennlinien:

$\langle x, y \rangle_1 := x^\top y$ (Standardskalarprodukt)

$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top x = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ Kreis mit Radius 1

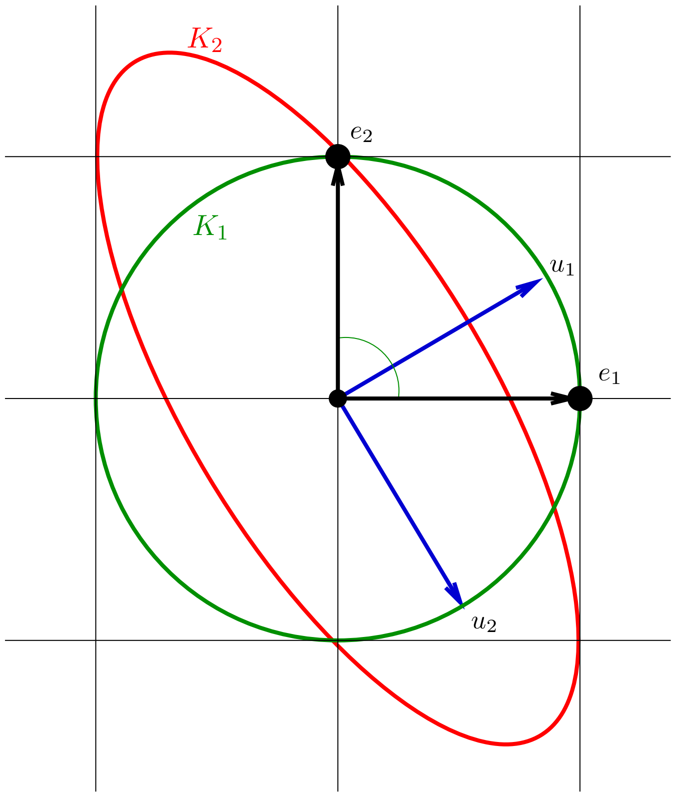
$\langle x, y \rangle_2 := x^\top A y$ Bilinearform mit Gramscher Matrix A

$$K_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top A x = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1^2 - x_1 x_2 - x_2 x_1 + 3x_2^2 = 1\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1 {x_1'}^2 + \lambda_2 {x_2'}^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{{x_1'}^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{{x_2'}^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1\}$$

Basiswechsel $B_0 = (e_1, e_2) \rightsquigarrow B = (u_1, u_2)$, d.h. $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 = x_1' u_1 + x_2' u_2$ führt zu Ellipse mit Halbachsen $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $b = \frac{1}{2}$.

zu Beispiel 18.8 (vergleiche auch Beispiel 16.6)



lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Hauptachsensystem $u_1 = \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda_1-2)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 - 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{1+(\lambda_2-2)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 - 2 \end{pmatrix}$.

Bilinearformen und Kennlinien:

$\langle x, y \rangle_1 := x^\top y$ (Standardskalarprodukt)

$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top x = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ Kreis mit Radius 1

$\langle x, y \rangle_2 := x^\top A y$ Bilinearform mit Gramscher Matrix A

$$K_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top A x = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda_1 {x'_1}^2 + \lambda_2 {x'_2}^2 = 1\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{{x'_1}^2}{(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}})^2} + \frac{{x'_2}^2}{(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}})^2} = 1\}$$

Basiswechsel $B_0 = (e_1, e_2) \rightsquigarrow B = (u_1, u_2)$, d.h. $x = x_1e_1 + x_2e_2 = x'_1u_1 + x'_2u_2$ führt zu Ellipse mit Halbachsen $a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ und $b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$.