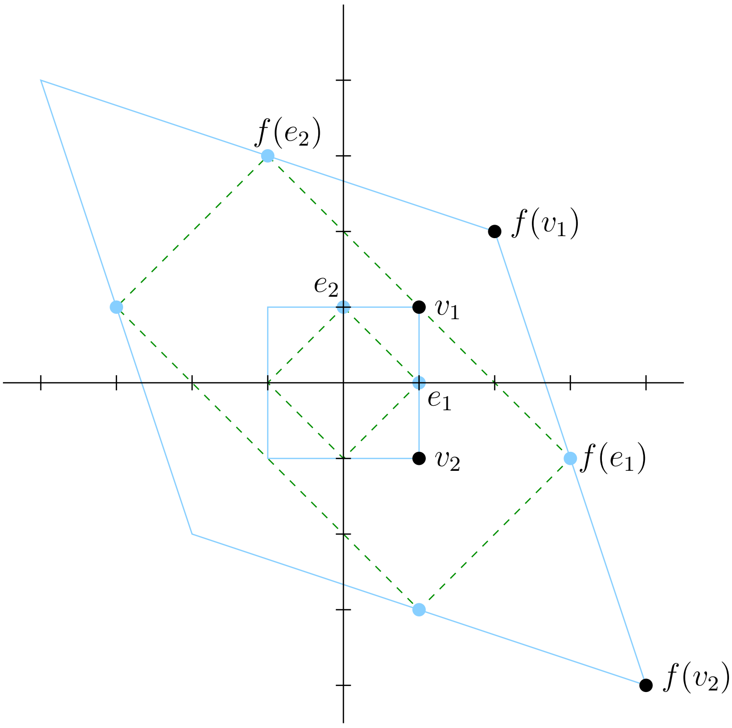


Beispiel 18.7 (vergleiche Beispiel 13.4)

lineare Abbildung

$$f : R^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto Ax$$

mit

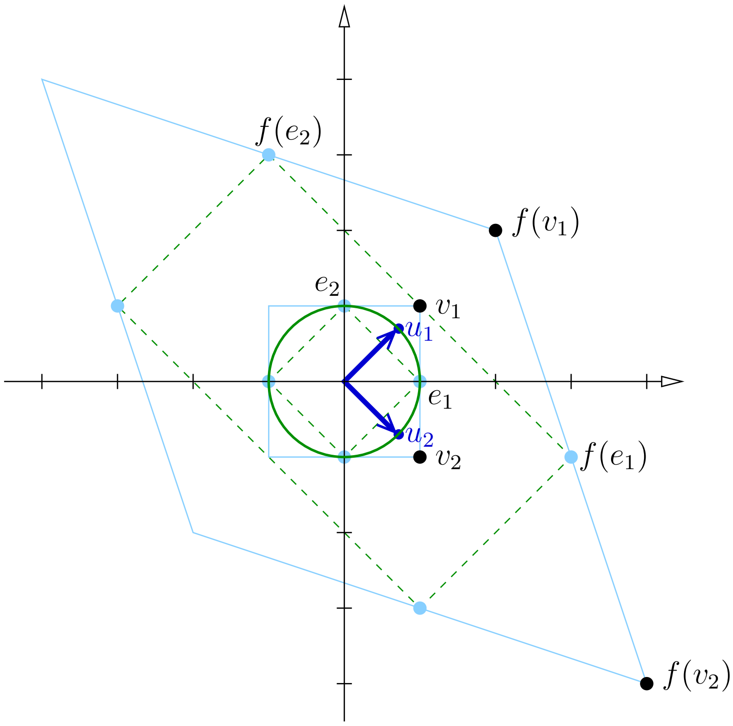
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren:

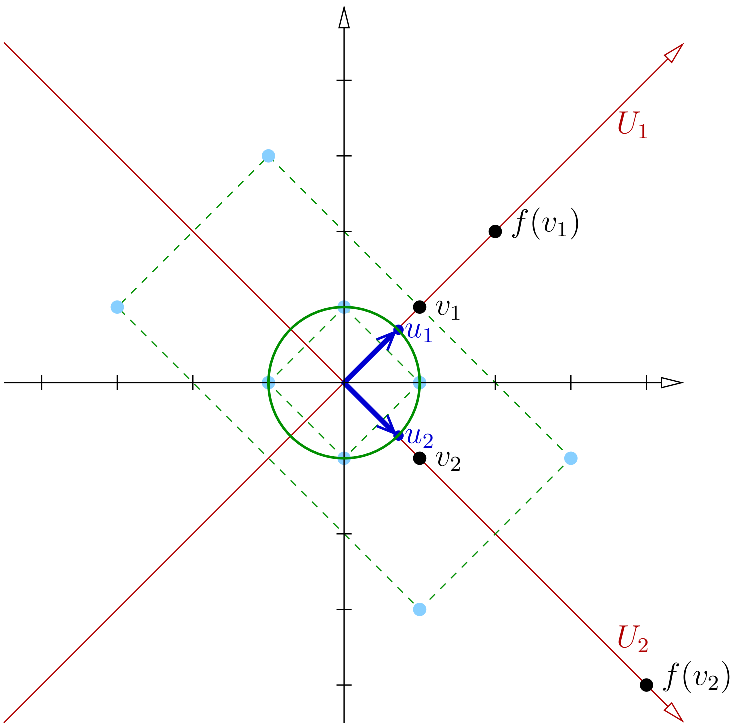
$$\lambda_1 = 2 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hauptachsentransformation (hier nur Normierung der Eigenvektoren) liefert ON-Basis $B = (u_1, u_2)$ (Hauptachsensystem):



mit Hauptachsen U_1 und U_2:

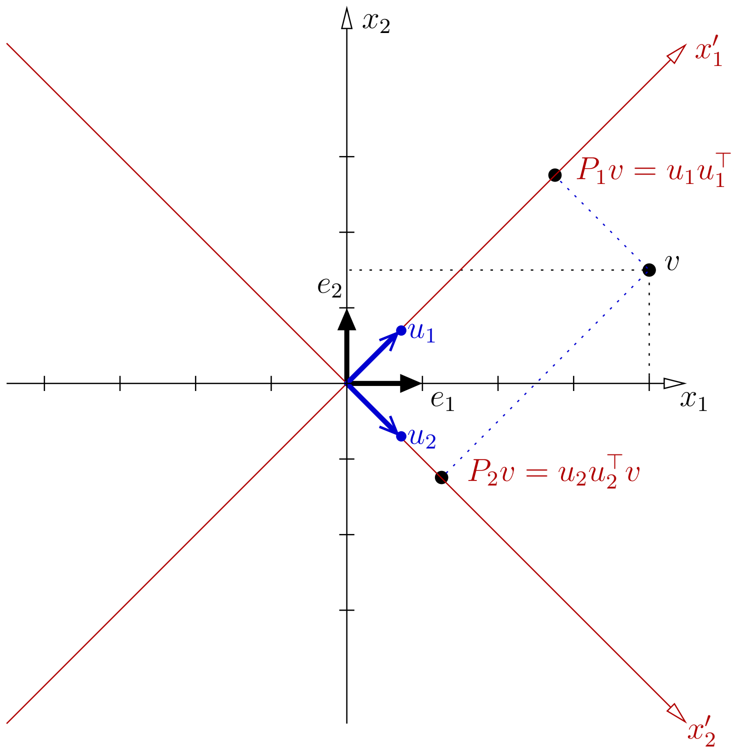


Projektionsmatrizen

$$P_1 = u_1 u_1^\top = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_2 = u_2 u_2^\top = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zerlegung des Punktes $v = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ bezüglich der Hauptachsen:

$$\begin{aligned} v &= P_1 v + P_2 v \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Spektralzerlegung von A:

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Zerlegung des Punktes $v = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ und des Bildes $Av = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ bezüglich der Hauptachsen:

$$v = P_1 v + P_2 v = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$Av = \lambda_1 P_1 v + \lambda_2 P_2 v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$