18.19 Beispiel

Freistaat Sachsen plane

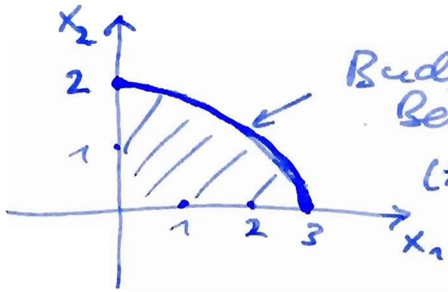
$x_1 \cdot 100$ km Straßen- und Brückenbau

$x_2 \cdot 100$ ha Parkanlagen und Erholungsfläche

kosteneffektive Arbeit an beiden Projekten sei durch

$$4x_1^2 + 9x_2^2 \leqq 36 \leftarrow \text{Gesamtkosten}$$

eingeschränkt



$$(*) \quad \boxed{4x_1^2 + 9x_2^2 = 36}$$

Akzeptanz („Nützlichkeitseinschätzung") in der Bevölkerung werde durch

$$q(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

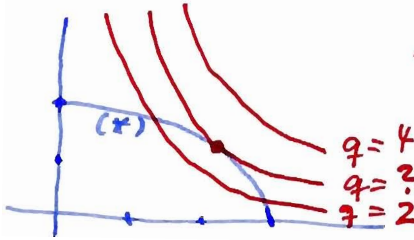
beschrieben (wird von Ökonomen häufig so gemacht)

(als quadratische Form darstellbar

$$q(x) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
)

Optimierungs-

Aufgabe: Finde Budget-Verteilung (x_1, x_2) mit maximaler Akzeptanz bei der Bevölkerung



Indifferenz-kurven
$q =$ konstant
d.h. $x_1 x_2 = q$

Lösung:

Umformung um Nebenbedingung (*) als $\|x\| = 1$ zu beschreiben (Dann Satz 18.~~17~~ 18 anwenden):

$$(*) \quad \frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} = 1 \qquad \left(\text{Ziel } x_1^2 + x_2^2 = 1\right)$$

Koordinatentransformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{x}_1 := \frac{x_1}{3}, \quad \tilde{x}_2 := \frac{x_2}{2}$$

ergibt

$$(*)' \quad \tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 = 1$$

$$\left(\text{d.h. } \tilde{x}^T \tilde{x} = 1 \text{ für } \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}\right)$$

Akzeptanzfunktion $q = x_1 x_2$ in neue Koordinaten umschreiben:

$$q(\hat{x}_1, \tilde{x}_2) = x_1 x_2 = 3\tilde{x}_1 \cdot 2\tilde{x}_2 = 6\,\tilde{x}_1\tilde{x}_2$$
$$= (\tilde{x}_1\ \tilde{x}_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A}\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$$

gesucht: Maximum

$$m_1 = \max\{\hat{x}^T A \tilde{x} \mid \tilde{x}^T \tilde{x} = 1\}$$

Lösung 18.~~17~~18:

$m_1 = \lambda_1$ größter Eigenwert von A

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = -3$$

größte erreichbare Akzeptanz ist $\underline{\underline{3}}$

Nun gesucht: zugehörige Budget-Verteilung (um diese max. Akzeptanz zu erreichen)

Lösung 18.~~17~~18: $m_1 = v_1^T A v_1$

v_1 normierter Eigenvektor zu λ_1

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}}_{(A-\lambda E)}\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \check{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \cancel{v_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor}$$

Normieren ergibt

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

Budget-Verteilung

$$\tilde{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \tilde{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

In alten Koordinaten

$$x_1 = 3\tilde{x}_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \approx 2{,}1$$

$$x_2 = 2\tilde{x}_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$$

Ergebnis: Sachsen muss ≈ 210 km Straßen+Brückenbau und ≈ 140 ha Park+Erholungsfeld. ausbauen um bei gegebenem Budget maximale Akzeptanz zu erreichen.