18.18 Optimierungsprobleme und Eigenwerte

Viele Optimierungsprobleme lassen sich in folgende Form bringen:

Was ist der kleinste bzw. größte Wert von

$$q(x) = x^T A x \quad (x \in \mathbb{R}^n, \; A \text{ symm. Matrix})$$

mit der Nebenbedingung $\|x\| = 1$ (und evtl. weiterer Randbedingungen)

Norm bzgl. Standardskalarprodukt

d.h. $\boxed{x^T x = 1}$

(nicht dem durch A def. Skalarprodukt)

Lösung gibt der folgende

Satz. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symm. Matrix mit Eigenwerten
$\lambda_1 \geqq \dots \geqq \lambda_n$ (der Größe nach geordnet)
reell wegen 18.3

Dann gilt

$$\lambda_1 = \max\{x^T A x \mid x^T x = 1\} =: m_1$$
$$\lambda_n = \min\{x^T A x \mid x^T x = 1\} =: m_0$$

Sei v_i normierter Eigenvektor zu Eigenwert λ_i. Dann

$$m_1 = v_1^T A v_1 \quad (= v_1^T(\underbrace{\lambda_1 v_1}))$$
$$= \lambda_1$$
$$m_0 = v_n^T A v_n$$

vgl. Lay (Lin. Alg.) p. 421/422

Weiter gilt für $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\lambda_k = \max\{x^T A x \mid x^T x = 1$$

zusätzliche Randbed. des Optimierungsproblems

$$\left.\begin{array}{l} x^T v_1 = 0, \\ \vdots \\ x^T v_{k-1} = 0 \end{array}\right\}$$

$\to$ LAG" 18-50

Zum Beweis:

Hauptachsentransformation

$$D = S^T A S$$

$x = S y \quad \rightsquigarrow \quad x^T A x = y^T D y$

alte Koord. neue Koord.

$\|x\| = 1 \iff \|y\| = 1$ (Üb!)

$\Rightarrow$

$$\max\{x^T A x \mid \|x\| = 1\}$$

$$= \max\{y^T D y \mid \|y\| = 1\}$$

$$y^T D y = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

$$\le \lambda_1 (y_1^2 + \dots + y_n^2) = \lambda_1 \underbrace{\|y\|^2}_{=1} = \lambda_1$$

$(\lambda_1 \ge \lambda_i)$

obere Schranke wird für $y = e_1$ angenommen, d.h. $m_1 = \lambda_1$

analog $m_0 = \lambda_n$. (■)