Klassifikation der Flächen Φ_A

(= Klassifikation der symmetrischen Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

= " der Bilinearformen $\langle x,y\rangle = x^T A y$

= " der quadratischen Formen $q(x) = x^T A x$)

(Quadriken)

durch Signatur (n_+, n_-, n_0)

(vgl. 18.13)

Φ_A gegeben durch $\boxed{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1}$

Für jeden Eigenwert $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ gibt es 3 Möglichkeiten

$\lambda > 0, \ \lambda < 0, \ \lambda = 0$

($\Rightarrow$ insgesamt $3^3 = 27$ Möglichkeiten für $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

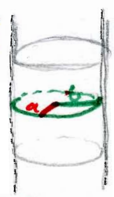
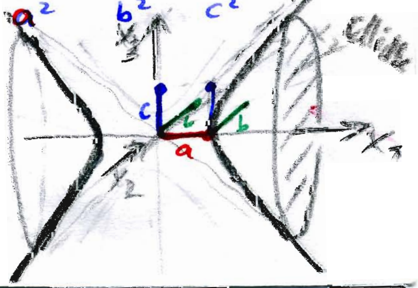
Bis auf Vertauschen der Indizes nur 10 :

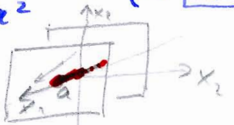
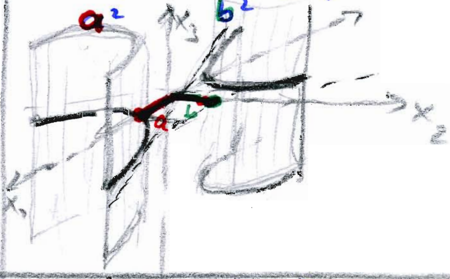
(∃ Folie)

LAG'' 18 - 41

(= alt LAG' 18-26)
LAG'' 18-37

27 Möglichkeiten

Signatur (Typ) (n_+, n_-, n_0) $n_+ + n_- + n_0 = 3$	Vorzeichen von λ_1 λ_2 λ_3	Φ_A ist $\boxed{\text{Bezeichnung}}$ mit Gleichung in Normalform $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1$
$(3, 0, 0)$	>0 >0 >0	$\boxed{\text{Ellipsoid}}$ $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ $\lambda_1 = \frac{1}{a^2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{b^2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{c^2}$  
$(2, 0, 1)$	>0 >0 $=0$ analog $=0$ >0 >0 >0 $=0$ >0 (Koordinatenachsen entsprechend vertauschen)	$\boxed{\text{elliptischer Zylinder}}$ $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ 
$(2, 1, 0)$	>0 >0 <0 analog >0 <0 >0 <0 >0 >0	$\boxed{\text{einschaliges Hyperboloid}}$ $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ 
$(1, 2, 0)$	>0 <0 <0 analog $<$ $>$ $<$ $<$ $<$ $>$	$\boxed{\text{zweischaliges Hyperboloid}}$ $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ 

(1, 0, 2)	$>0 \quad =0 \quad =0$ analog $= \quad > \quad =$ $= \quad = \quad >$	zwei parallele Ebenen $\frac{x_1^2}{a^2} = 1 \quad (\Rightarrow \boxed{x_1 = a} \; \boxed{x_1 = -a})$ 
(1, 1, 1)	$>0 \quad <0 \quad =0$ analog $< \quad > \quad =$ $> \quad = \quad <$ $< \quad = \quad >$ $= \quad > \quad <$ $= \quad < \quad >$	hyperbolischer Zylinder $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ 
(0, 3, 0)	$<0 \quad <0 \quad <0$	$\Phi_A = \emptyset \qquad -\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1$ keine reelle Lösung
(0, 2, 1)	$<0 \quad <0 \quad =0$ analog $< \quad = \quad <$ $= \quad < \quad <$	$\Phi_A = \emptyset \qquad -\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ keine reelle Lösung
(0, 1, 2)	$<0 \quad =0 \quad =0$ analog $= \quad < \quad =$ $= \quad = \quad <$	keine reelle Lösung $-\frac{x_1^2}{a^2} = 1 \qquad \Phi_A = \emptyset$
(0, 0, 3)	$=0 \quad =0 \quad =0$ (A Nullmatrix)	keine reelle Lösung (0 = 1 ↯)
	Σ 27	

<u>Bem.</u> Für die Fälle $\Phi_A = \emptyset$ gibt es komplexe Lösungen

z.B. $-\frac{x_1^2}{a^2} = 1$ hat als Lösung

zwei imaginäre Ebenen

$x_1 = ai$ und $x_1 = -ai$

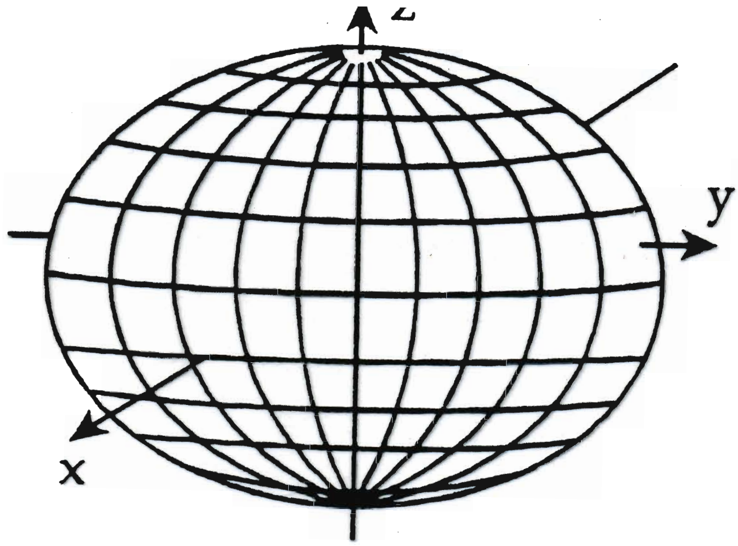
Weitere Flächen 2. Ordnung (z.B. Paraboloid) erhält man durch Hinzunahme linearer Glieder ($b \neq 0$) und Variation der Konstanten c.

LAG' 18.12
LAG'' 18.14/16

18.16 Flächen 2. Ordnung

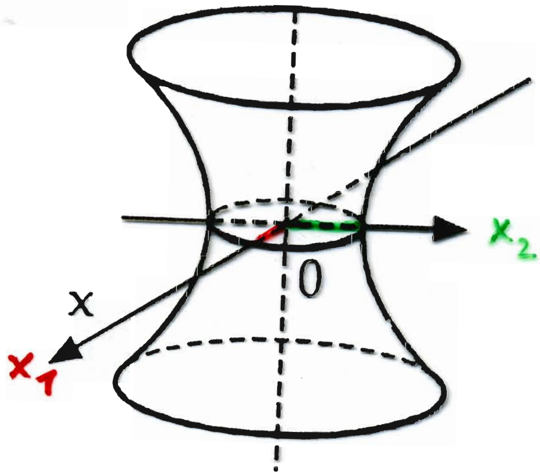
Signatur

$\boxed{(3,0,0)}$



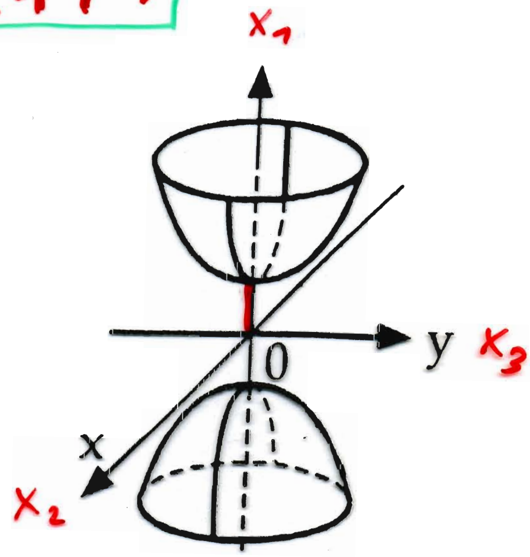
Ellipsoid

$\boxed{(2,1,0)}$



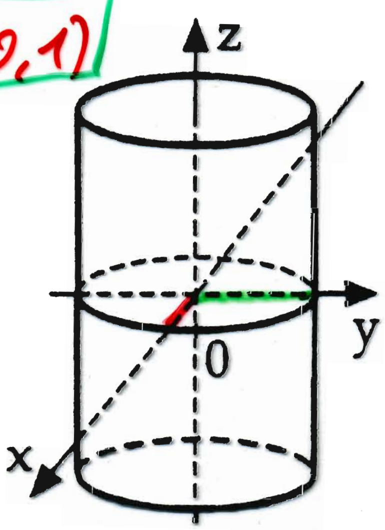
Einschaliges Hyperboloid

$\boxed{(1,2,0)}$



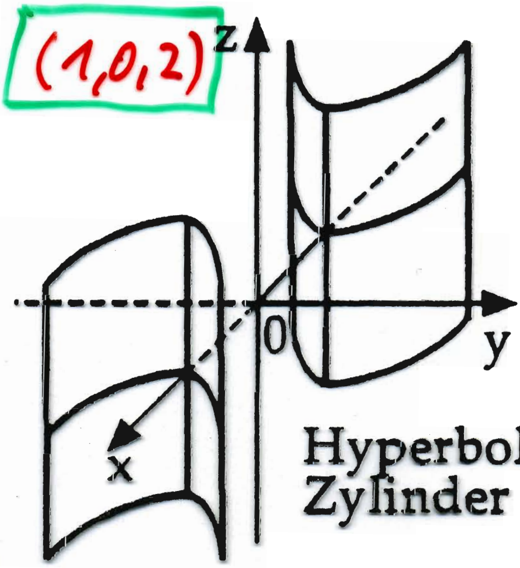
Zweischaliges Hyperboloid

$\boxed{(2,0,1)}$



Elliptischer Zylinder

$\boxed{(1,0,2)}$



Hyperbolischer Zylinder