AB 18.8

18.8 Beispiel

Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$
mit Standardskalarprodukt $\xi * \eta = \xi^T \eta$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu λ

Eigenwerte: $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\quad \lambda_1 \approx 2.6180$

$\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ $\quad \lambda_2 \approx 0.38197$

Eigenräume: $T_{\lambda_1} = \langle v_1 \rangle$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 - 2 \end{pmatrix}$ oder auch $\begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T_{\lambda_2} = \langle v_2 \rangle$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 - 2 \end{pmatrix}$ oder auch $\begin{pmatrix} \lambda_2 - 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ON-Basis von $\mathbb{R}^2$: $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} \approx \begin{pmatrix} 0.85065 \\ 0.52573 \end{pmatrix}$

(aus Eigenvektoren von A)!!!

$u_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} \approx \begin{pmatrix} -0.52573 \\ 0.85065 \end{pmatrix}$

$A u_i = \lambda_i u_i$

$\Rightarrow$ Hauptachsentransformation mit orthogonaler Matrix $S = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.85065 & -0.52573 \\ 0.52573 & 0.85065 \end{pmatrix}$

$$S^{-1} A S = S^T A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$\cos\alpha \approx 0.85065$

$\boxed{\alpha \approx 31{,}717^\circ}$

S orthogonal $\Rightarrow$ Drehmatrix $\boxed{D(\alpha)}$ (oder Spiegelungsmatrix $S(\alpha)$)

hier Drehmatrix

beschreibt Basiswechsel $(e_1, e_2) \leftrightarrow (u_1, u_2)$ $\quad \vec{x} = S\vec{x}'$

$x' = S^{-1}\vec{x} = S^T\vec{x}$