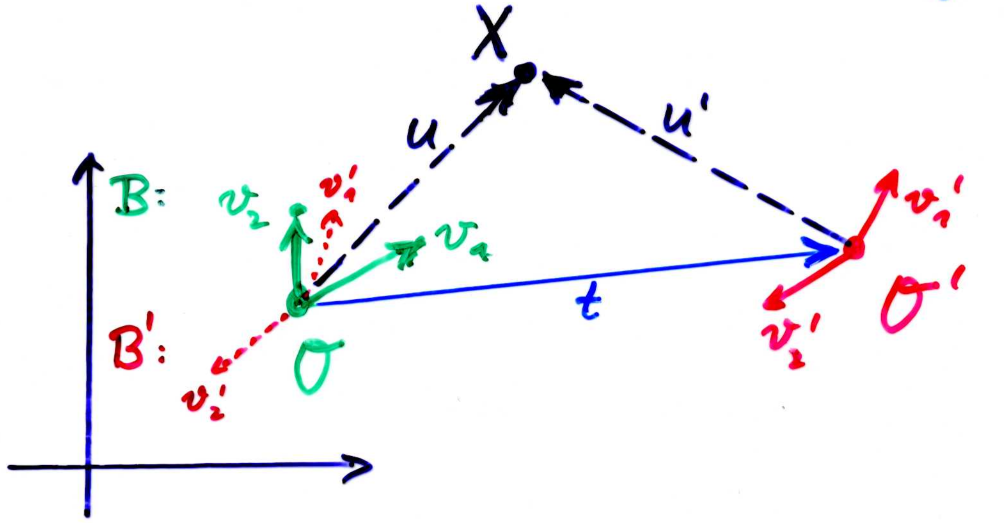
11.18 Koordinatensystemwechsel

hier für Ebene $\mathbb{R}^2$ (analog für $\mathbb{K}^n$)



$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$:= Koordinaten eines Punktes X im Koordinatensystem $(\mathcal{O}, v_1, v_2)$

$= \Phi_B^{-1}(u)$ (vgl. 7.11) = Koordinaten von Vektor u bzgl. Basis $B := (v_1, v_2)$

$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$:= Koordinaten von Punkt X im Koordinatensystem $(\mathcal{O}', v_1', v_2')$

$= \Phi_{B'}^{-1}(u')$ = Koordinaten von Vektor u' bzgl. Basis $B' := (v_1', v_2')$

Was ist der Zusammenhang zwischen diesen Koordinaten?

$$u = u' + t \qquad\qquad u' = u - t$$

$\mathfrak{b} := \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} := \Phi_{B}^{-1}(t)$ Koordinatenvektor von t bezüglich Basis B

$\mathfrak{b}' := \begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \end{pmatrix} := \Phi_{B'}^{-1}(t)$ Koordinatenvektor von t bezüglich Basis B'

Koordinatentransformation bei Basiswechsel (vgl. 8.7)

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \qquad (V = \mathbb{R}^2)$$

für $S := M_{B}^{B'}(id_{\mathbb{R}^2}) \quad T = S^{-1} = M_{B'}^{B}(id_{\mathbb{R}^2})$

also

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \Phi_{B'}^{-1}(u') = \Phi_{B'}^{-1}(u-t) = \Phi_{B'}^{-1}(u) - \Phi_{B'}^{-1}(t) = S^{-1}\Phi_{B}^{-1}(u) - \Phi_{B'}^{-1}(t)$$

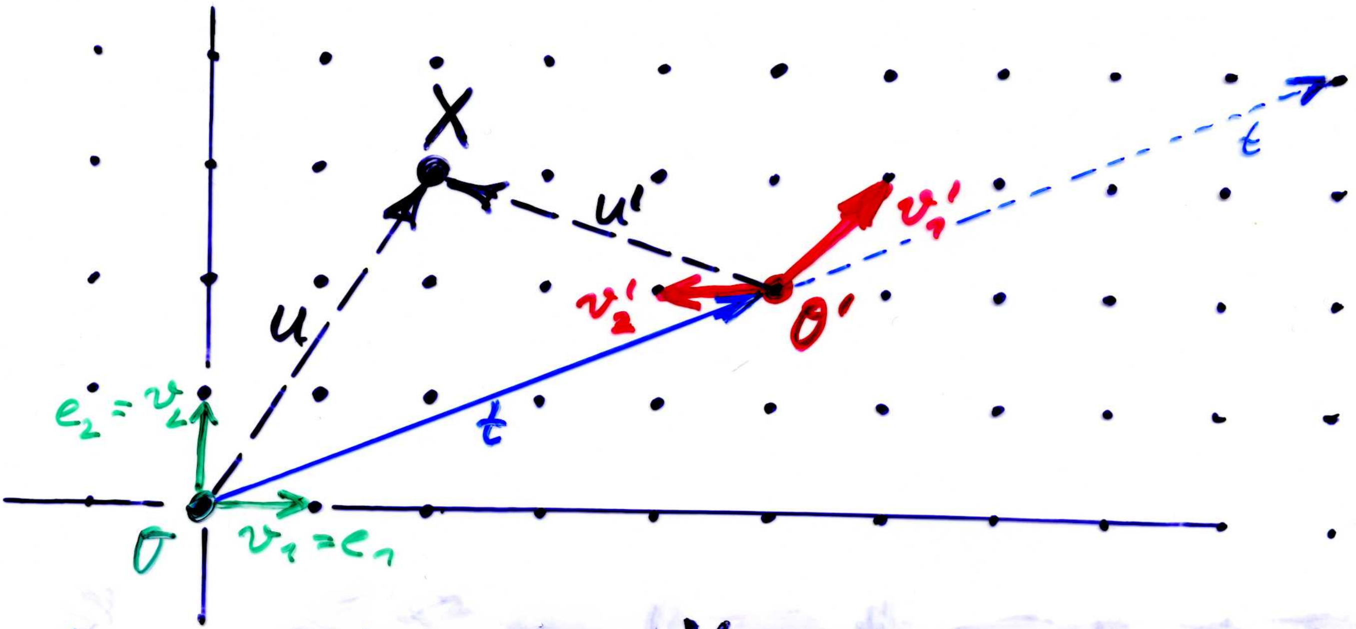
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Phi_{B}^{-1}(u) = \Phi_{B}^{-1}(u'+t) = \Phi_{B}^{-1}(u') + \Phi_{B}^{-1}(t) = S\,\Phi_{B'}^{-1}(u') + \Phi_{B}^{-1}(t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \end{pmatrix}}$$

● Koordinatensystemwechsel wird durch affine Abb. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\boxed{\varphi : x' \longmapsto Sx' + \mathfrak{b}}$ $\qquad$ $\boxed{\varphi' : x \longmapsto S^{-1}x - \mathfrak{b}'}$ $= S^{-1}(x - \mathfrak{b})$ beschrieben ($\mathfrak{b}' = S^{-1}\mathfrak{b}$)

11.19 Beispiel



Koordinaten von X

$u = 2v_1 + 3v_2$ $\qquad$ $u' = 1\cdot v_1' + 4v_2'$

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ (bzgl B) $\qquad$ $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ (bzgl. B')

$(v_1', v_2') = (w_1, w_2)$ Bsp. 8.8

Koordinatenvektor von $t = \begin{cases} 5\cdot e_1 + 2e_2 \\ 2v_1' - 3v_2' \end{cases}$

$b = \begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ $\qquad$ $b' = \begin{pmatrix}t_1'\\t_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$

Matrix der Koordinatentransformation (Basiswechsel)

$$S = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = M_B^{B'}(id) \qquad T = S^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

(vgl. Beispiel 8.8)

Koordinatensystemtransformation

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix} = S^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}t_1'\\t_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$