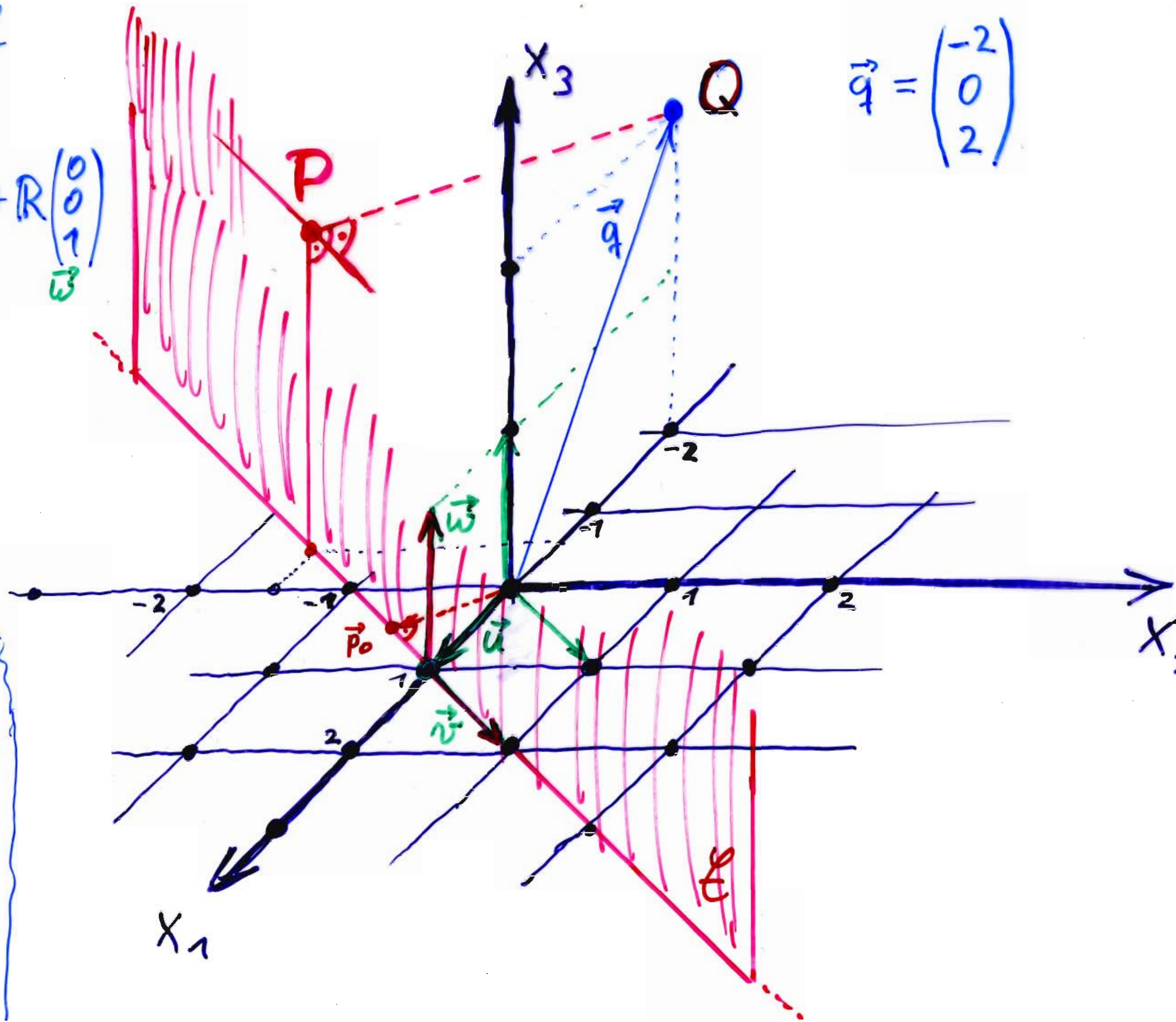
10.10 Beispiel

Ebene

$$\mathcal{E} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\vec{u}} + \mathbb{R}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\vec{v}} + \mathbb{R}\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{w}}$$

$$\vec{q} = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$$



$$\vec{q} - \vec{u} = \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$$

$\vec{v} * \vec{v} = 2$

$\vec{v} * \vec{w} = 0 = \vec{w} * \vec{v}$

$\vec{w} * \vec{w} = 1$

$\vec{v} * (\vec{q} - \vec{u}) = -3$

$\vec{w} * (\vec{q} - \vec{u}) = 2$

LAG 10.10a

Berechnung der Projektion

$\vec{p} := \overrightarrow{OP}$ von Q auf $\mathcal{E}$ mit 10.9

GRAMsche Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \vec{v} * \vec{v} & \vec{v} * \vec{w} \\ \vec{w} * \vec{v} & \vec{w} * \vec{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\vec{q} - \vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} * (\vec{q} - \vec{u}) = -3$$

$$\vec{w} * (\vec{q} - \vec{u}) = 2$$

$$\vec{p} = \vec{u} + \lambda_0 \vec{v} + \mu_0 \vec{w}$$

$$\lambda_0 = \frac{\begin{vmatrix} \vec{v} * (\vec{q} - \vec{u}) & \vec{v} * \vec{w} \\ \vec{w} * (\vec{q} - \vec{u}) & \vec{w} * \vec{w} \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{3}{2}$$

$$\mu_0 = \frac{\begin{vmatrix} \vec{v} * \vec{v} & \vec{v} * (\vec{q} - \vec{u}) \\ \vec{w} * \vec{v} & \vec{w} * (\vec{q} - \vec{u}) \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{4}{2} = 2$$

d.h.

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{3}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Abstand von Q zur Ebene $\mathcal{E}$: $\|\vec{q} - \vec{p}\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

HESSEsche Normalform von $\mathcal{E}$

Normalenvektor berechnen

(1) wie oben Projektion von $\mathcal{O}$ (d.h. $\vec{q}_0 = \vec{o}$) statt Q $(\vec{q})$ berechnen ergibt $\vec{p}_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ (Üb!)

$$\Rightarrow \quad \vec{n} = \frac{\vec{p}_0}{\underbrace{\|\vec{p}_0\|}_{=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

oder (2) Wir kennen schon Vektor $\perp \mathcal{E}$, nämlich $\vec{q}-\vec{p} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \vec{n}' = \frac{\vec{q}-\vec{p}}{\underbrace{\|\vec{q}-\vec{p}\|}_{\frac{3}{2}\sqrt{2}}} = \frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\3\\0\end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{=\frac{1}{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

HESSEsche Normalform

$$\vec{n} * (\vec{x} - \vec{u}) = 0 \qquad \left(\text{oder } \vec{n}' * (\vec{x}-\vec{u}) = 0\right)$$

10.10.08

LA6 10.10c

d.h. $\vec{n} * \vec{x} = \vec{n} * \vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\overset{!}{=}$ Abstand von O zur Ebene $\mathcal{E}$)

HESSEsche NF in Koordinatendarstellung

$$(*) \quad \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

andere (vereinfachte) Gleichung für $\mathcal{E}$

$$(*)' \quad \boxed{x_1 - x_2 = 1}$$

(ist aber nicht Hessesche NF)

nochmal:

Berechnung von $\vec{p}$ (Projektion von Q auf $\mathcal{E}$) mittels HESSEscher Normalform (vgl. 10.9)

$$\vec{p} = \vec{q} - (\vec{n} * (\vec{q} - \vec{u}))\,\vec{n}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \underset{(\text{Üb!})}{=} \dots = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\end{pmatrix}.$$

(ist dasselbe Ergebnis wie oben)