Vorlesung Spezielle Algebraische Strukturen: Körper und Galoistheorie

2. Übung am 11.12.2014

Aufgaben 6 - 12

Die **Aufgabe 8** ist **schriftlich** zu lösen und zur Übung mitzubringen (oder in der Vorlesung am 9.12.14 abzugeben).

6. Beweisen Sie für Körper $K \leq L \leq E$, dass aus $[E : K] = [E : L] < \infty$ die Gleichheit von K und L folgt.

   Bemerkung: Diese Aussage wird beim Beweis von 1.15 benutzt. Es ist eine Aufgabe aus der linearen Algebra. Finden Sie einen elementaren Beweis, der nur die vorkommenden Begriffe benutzt, aber keine weiteren Sätze.

7. Sei $E : K$ eine beliebige Körpererweiterung. Zeigen Sie, dass $[E : K]$ eine obere Schranke für die Ordnung $|\operatorname{Aut}(E : K)|$ der Galoisgruppe ist (vgl. Vorl. 1.13).

8. Es sei $f = X^4 - 3X^2 + 2$.

   a) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper E von f über $\mathbb{Q}$.

   b) Bestimmen Sie den Grad $[E : \mathbb{Q}]$.

   c) Berechnen Sie alle Permutationen der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(f; \mathbb{Q})$ ($\cong \operatorname{Aut}(E : \mathbb{Q})$).

   d) Entscheiden Sie, ob es sich bei $E : \mathbb{Q}$ um eine galoissche Körperweiterung handelt.

9. Es seien p, q ganze Zahlen. Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

   (i) $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{p})$,

   (ii) $\sqrt{q} \notin \mathbb{Q}$ und $\frac{q}{p}$ ist kein Quadrat (d.h. $\frac{q}{p} \neq b^2$ für alle $b \in \mathbb{Q}$),

   (iii) $[\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) : \mathbb{Q}(\sqrt{p})] = 2$,

   (iv) $X^2 - q$ ist ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Q}(\sqrt{p})[X]$.

10. Bestimmen Sie alle Unterkörper des Körpers $E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Geben Sie für jeden Unterkörper $L > \mathbb{Q}$ ein primitives Element β an (d. h. $\beta \in E$ mit $L = \mathbb{Q}(\beta)$, vgl. Vorl. 1.18). Begründen Sie sorgfältig. Zeichnen Sie ein Ordnungsdiagramm des Verbandes aller Unterkörper von E.

    Bemerkung: Da $\mathbb{Q}$ Primkörper, so ist jeder Unterkörper $L \leq E$ ein Zwischenkörper der Galoiserweiterung $E\colon \mathbb{Q}$.

11. Die *Kommutatorgruppe* G' einer (multiplikativen) Gruppe G ist die von den *Kommutatoren* $[a, b] := a^{-1}b^{-1}ab$ (wobei $a, b \in G$) erzeugte Untergruppe von G:

    $$G' := \langle \{[a, b] \mid a, b \in G\} \rangle_G$$

    Zeigen Sie:

    a) G abelsch $\iff G' = \{e\}$,

    b) $G' = \{[a_1, b_1] \cdot \ldots \cdot [a_n, b_n] \mid a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in G, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$,

    c) $G' \trianglelefteq G$,

    d) Für einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ ist G/N genau dann abelsch, wenn $G' \subseteq N$.

    e) Die Faktorgruppe G/G' ist stets abelsch.

12. Es sei E der Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in K[X]$ (K beliebiger Körper) mit $\operatorname{grad}(f) = n \geq 1$. Beweisen Sie, dass $[E\colon K]$ ein Teiler von $n!$ ist.

    Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N} \setminus 0$, beachten Sie bei Bedarf, dass der Binomialkoeffizient $\binom{k+l}{k} = \frac{(k+l)!}{k!l!}$ eine ganze Zahl ist, und deshalb $k!l!$ ein Teiler der Zahl $(k+l)!$ ist.