Vorlesung Spezielle Algebraische Strukturen: Körper und Galoistheorie

1. Übung am 13.11.2014

Aufgaben 1 - 5

Die **Aufgaben 4(c) und 5** sind **schriftlich** zu lösen und zur Übung mitzubringen (oder in der Vorlesung am 11.11.14 abzugeben).

1. Machen Sie sich mit den Begriffen *Hüllenoperator* (= Abschlussoperator), *Hüllensystem*, *Verband*, *geordnete Menge* (= Halbordnung) und *Diagramm* (= Hasse-Diagramm) *einer geordneten Menge* vertraut (genaue Definitionen!, s. z.B. Literatur).

2. a) Zeigen Sie: Zwei Abbildungen

$$\varphi : \mathfrak{P}(M_1) \to \mathfrak{P}(M_2), \quad \psi : \mathfrak{P}(M_2) \to \mathfrak{P}(M_1)$$

bilden (für geeignetes $R \subseteq M_1 \times M_2$, vgl. Vorl. 0.1) eine Galois-Verbindung (φ, ψ) zwischen $\mathfrak{P}(M_1)$ und $\mathfrak{P}(M_2)$ genau dann, wenn für alle $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{P}(M_1)$, $Y, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{P}(M_2)$ die folgenden Eigenschaften (I) - (IV) gelten:

(I) $X_1 \subseteq X_2 \implies X_1^\varphi \supseteq X_2^\varphi$

(II) $Y_1 \subseteq Y_2 \implies Y_1^\psi \supseteq Y_2^\psi$

(III) $X \subseteq X^{\varphi\psi}$

(IV) $Y \subseteq Y^{\psi\varphi}$.

b) Beweisen Sie unter alleiniger Benutzung von (I) - (IV) die folgenden Eigenschaften für eine Galois-Verbindung (φ, ψ):

(V) $X^{\varphi\psi\varphi} = X^\varphi$.

(VI) $Y^{\psi\varphi\psi} = Y^\psi$.

(VII) $h_1 : X \mapsto X^{\varphi\psi}$ ist ein Hüllenoperator.

(VIII) $h_2 : Y \mapsto Y^{\psi\varphi}$ ist ein Hüllenoperator.

c) Zeigen Sie unter Benutzung von (I) - (VIII), dass (φ, ψ) genau dann eine Galois-Verbindung ist, wenn für alle $X \in \mathfrak{P}(M_1)$ und $Y \in \mathfrak{P}(M_2)$ gilt:

(IX) $Y \subseteq X^\varphi \iff X \subseteq Y^\psi$.

3. Zwischen den Mengen $M_1 = \{\mathrm{Mo}, \mathrm{Di}, \mathrm{Mi}, \mathrm{Do}, \mathrm{Fr}\}$ und $M_2 = \{k, b, r\}$ sei folgende binäre Relation $R \subseteq M_1 \times M_2$ gegeben

R	k	b	r
Mo	×		
Di	×	×	
Mi	×	×	×
Do		×	
Fr		×	×

also z.B. $(\mathrm{Mo}, k) \in R$ aber $(\mathrm{Mo}, r) \notin R$.

(Diesen Kontext kann man sich als Wetterbeobachtung an den 5 Werktagen einer Woche vorstellen, wobei nur die Merkmale klar (k), bewölkt (b), Regen (r) beobachtet und registriert werden.)

Es sei (φ, ψ) die zugehörige Galoisverbindung.

a) Berechnen Sie alle Hüllen des Hüllenoperators h_1 (Hinweis: Dies sind alle Mengen der Form Y^ψ $(Y \subseteq M_2)$, wie Sie in der Aufgabe 4 beweisen sollen).

Bemerkung: eine Menge $X \subseteq A$ heißt *Hülle* eines Hüllenoperators $h : \mathfrak{P}(A) \to \mathfrak{P}(A)$, wenn $X = X^h$.

b) Berechnen Sie alle Hüllen des Hüllenoperators h_2 (Überlegen Sie, wie Sie die Ergebnisse aus a) benutzen können).

c) Ein Paar $(X, Y) \in \mathfrak{P}(M_1) \times \mathfrak{P}(M_2)$ heißt *(formaler) Begriff* (im *(formalen) Kontext* (M_1, M_2, R)), falls $X^\varphi = Y$ und $Y^\psi = X$ gilt.
Geben Sie eine Liste aller Begriffe des Kontextes (M_1, M_2, R) an.

d) Auf der Menge der Begriffe ist in natürlicher Weise eine Ordnungsrelation $\preceq$ durch

$$(X_1, Y_1) \preceq (X_2, Y_2) :\iff X_1 \subseteq X_2$$

gegeben (Bemerkung: Die Bedingung $Y_2 \subseteq Y_1$ ist dazu äquivalent).
Dadurch ist sogar ein Verband – der sogenannte *Begriffsverband* des Kontextes – gegeben.
Zeichnen Sie das (Hasse-)Diagramm dieses Begriffsverbandes, d.h. der durch $\preceq$ geordneten Menge der Begriffe (und beschriften Sie die Punkte mit den Begriffen (X, Y)).

e) Die Hüllen der Hüllenoperatoren h_1 bzw. h_2 bilden ebenfalls (bzgl. Inklusion) einen Verband (Unterverband des Potenzmengenverbandes $\mathfrak{P}(M_1)$ bzw. $\mathfrak{P}(M_2)$). Was haben diese Verbände mit dem Begriffsverband aus (d) zu tun?

f) Zeichnen Sie das gleiche Diagramm wie in (d) und vereinfachen Sie dabei die Beschriftung der Punkte wie folgt:
Die Punkte, die den Begriffen $(\{x\}^{\varphi\psi}, \{x\}^\varphi)$ mit $x \in M_1$ entsprechen, erhalten Beschriftung x. Die Punkte, die den Begriffen $(\{y\}^\psi, \{y\}^{\psi\varphi})$ mit $y \in M_2$ entsprechen, erhalten die Beschriftung y (an einem Punkt des Diagramms können also Elemente aus M_1 und/oder Elemente aus M_2 stehen; es kann vorkommen, dass ein Punkt gar keine Beschriftung erhält).
Diskutieren Sie, ob und wie man aus diesem vereinfachten Diagramm die ursprüngliche Diagrammbeschriftung und den ganzen Kontext erhalten kann. (konkret: Wie liest man aus dem Diagramm ab, ob $(x, y) \in R$ gilt oder nicht?)

4. Es sei (φ, ψ) eine beliebige Galois-Verbindung zwischen $\mathfrak{P}(M_1)$ und $\mathfrak{P}(M_2)$.

   a) Beweisen Sie, dass

   $$X = X^{\varphi\psi} \iff \exists Y \subseteq M_2 : \ X = Y^\psi$$

   für alle $X \subseteq M_1$ gilt.
   (Hinweis: Sie können die Eingeschaften (I)-(IX) von Aufgabe 2 verwenden)

   b) Nehmen Sie an, Ihnen ist nur die Menge M_2 und die Abbildung ψ bekannt. Wie können Sie trotzdem das zum Hüllenoperator $h_1 : \mathfrak{P}(M_1) \to \mathfrak{P}(M_1) : X \mapsto X^{\varphi\psi}$ gehörige Hüllensystems bestimmen? (Bemerkung: Das zu einem Hüllenoperator $h : \mathfrak{P}(M) \to \mathfrak{P}(M)$ gehörige *Hüllensystem* ist $\{h(U) \mid U \subseteq M\}$.)

   c) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die beiden folgenden Aussagen: Für beliebige $X_1, X_2 \subseteq M_1$ gilt:

   - $(X_1 \cup X_2)^\varphi = X_1^\varphi \cap X_2^\varphi$
   - $(X_1 \cap X_2)^\varphi = X_1^\varphi \cup X_2^\varphi$

5. Es seien E ein Körper und $U \subseteq \mathrm{Aut}(E)$, $K \subseteq E$ beliebige Teilmengen (nicht notwendigerweise Untergruppe bzw. Unterkörper). Zeigen Sie, dass

$$U^{\psi} = \mathrm{Fix}(E; U) := \{a \in E \mid \forall \sigma \in U : \sigma(a) = a\}$$

ein Unterkörper von E ist (es ist der *Fixkörper* von U in E) und dass

$$K^{\varphi} = \mathrm{Aut}(E : K) := \{\sigma \in \mathrm{Aut}(E) \mid \forall a \in K : \sigma(a) = a\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(E)$ ist.

Zusatzaufgabe (nicht Bestandteil der Hausaufgabe):
Was hat der Körper $K^{\varphi\psi} = \mathrm{Fix}(E; \mathrm{Aut}(E : K))$ mit der Teilmenge K zu tun? Wie hängen $U^{\psi\varphi} = \mathrm{Aut}(E : \mathrm{Fix}(E; U))$ und die Teilmenge U zusammen? (was vermuten Sie? können Sie Ihre Vermutung beweisen?)