

Technische Universität Dresden

Fakultät Forst-, Geo- und Hydrowissenschaften

**SYSTEMANALYSE IN DER WASSERWIRTSCHAFT -
AUFGABEN UND LÖSUNGEN**

Peter-Wolfgang Gräber

Sommersemester 2007

Das vorliegende Lehrmaterial ist internes Studienmaterial für die Studiengänge der Fachrichtung Wasserwesen der TU Dresden. Das Material unterliegt den Urheberrechten und ist nur zum Gebrauch für interne Aus- und Weiterbildung innerhalb der TU Dresden gestattet. Jegliche Vervielfältigung, auch auszugsweise, ist nur mit Zustimmung des Verfassers zulässig.

Redaktion und Gestaltung: Prof. Dr.-Ing. habil. Peter-Wolfgang Gräber
TU Dresden
Fakultät Forst-, Geo- und Hydrowissenschaften
Institut für Abfallwirtschaft und Altlasten

Tel.: (03501) 530029
Fax: (03501) 530022
e-mail: Peter-Wolfgang.Graeber@tu-dresden.de
Internet: <http://www.tu-dresden.de/fghhiaa/graeber>
Redaktionsschluss: 01.08.2007

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis.....	VI
--------------------------	----

Abbildungsverzeichnis	XI
-----------------------------	----

I Aufgaben und Lösungen	XIII
--------------------------------	-------------

Teil

1 Mathematische Grundlagen	1
---	----------

1.1 Algebraische Grundlagen	2
---------------------------------------	---

1.1.1 Aufgaben	2
--------------------------	---

1.1.2 Lösungen	3
--------------------------	---

1.2 Matrizen	6
------------------------	---

1.2.1 Aufgaben	6
--------------------------	---

1.2.2 Lösungen	7
--------------------------	---

1.3 Lineare Gleichungssysteme	17
---	----

1.3.1 Aufgaben	17
--------------------------	----

1.3.2 Lösungen	19
--------------------------	----

1.4 Vektoralgebra und Analysis	75
--	----

1.4.1 Aufgaben	75
--------------------------	----

1.4.2 Lösungen	77
--------------------------	----

1.5 Interpolationsverfahren	95
---------------------------------------	----

1.5.1 Aufgaben	95
--------------------------	----

III

1.5.2	Lösungen	96
1.6	Gewöhnliche Differentialgleichungen	121
1.6.1	Analytische Methoden - DGL erster Ordnung	121
1.6.1.1	Aufgaben	121
1.6.1.2	Lösungen	124
1.6.2	Analytische Methoden - DGL höherer Ordnung	151
1.6.2.1	Aufgaben	151
1.6.2.2	Lösungen	151
1.6.3	LAPLACE-Transformation	155
1.6.3.1	Aufgaben	155
1.6.3.2	Lösungen	158
1.7	Numerische Verfahren	206
1.7.1	Integrationsverfahren	206
1.7.1.1	Aufgaben	206
1.7.1.2	Lösungen	208
1.7.2	Numerische Lösung von Differentialgleichungen	229
1.7.2.1	Aufgaben	229
1.7.2.2	Lösungen	231
2	Analytische Lösung der Brunnenanströmung	247
2.1	Aufgaben	248
2.2	Lösungen	257
3	Numerische Grundwasserströmungsmodelle	307
3.1	Aufgaben	308

3.2	Lösungen	312
4	Simulationsprogrammsystem ASM	349
4.1	Aufgaben	350
5	Prozessanalyse	355
5.1	Aufstellen von Gleichungen	356
5.1.1	Aufgaben	356
5.1.2	Lösungen	360
5.2	Übertragungsfunktionen	370
5.2.1	Aufgaben	370
5.2.2	Lösungen	376

Tabellenverzeichnis

1.1	Korrespondenztafel	158
1.2	Korrespondenztafel - Fortsetzung	159
2.1	Brunnenfunktion $W(\sigma)$ für den Bereich $1 \cdot 10^{-12} \leq \sigma \leq 9$	256
5.1	Zusammenhang zwischen den verschiedenen Funktionen des Übertragungs- verhaltens	399

Abbildungsverzeichnis

1.1	Darstellung der Konzentrationsverteilung als Äquipotentiallinien	87
1.2	Darstellung der Äquipotentiallinien der Konzentrationsverteilung	89
1.3	Darstellung der Hydroisohypsen	92
1.4	Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels	122
1.5	Füllvorgang eines Restloches	123
1.6	Abhängigkeit des Grundwasserstandes von geohydraulischen Verhältnissen	145
1.7	Grundwasserstandsänderung bei sinusförmiger Hochwasserwelle des Flusses	146
1.8	Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentrationsänderung	148
1.9	Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels	156
1.10	Füllvorgang eines Restloches	157
1.11	Schema der Grundwasserverhältnisse	190
1.12	Änderung des Grundwasserstandes bei sprunghafter Änderung des Flusswas- serstandes	195
1.13	Grundwasserhöhe z_R gegenüber der Flusswasserspiegelhöhe h_{Fl}	201
1.14	Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentrationsänderung	203
1.15	Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius	207
1.16	Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten . .	210
1.17	Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten . .	213
1.18	Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten . .	216
1.19	Entwicklung des Integrals im Intervall 1 bis 1,3 mittels der Rechteck- und Trapezformel	219

1.20	Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius	226
1.21	Füllvorgang eines Restloches	230
1.22	Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter . . .	232
1.23	Abhängigkeit des Integrationsergebnisses von Quantisierungsschrittweite .	233
1.24	Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter . . .	239
1.25	Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter . . .	241
1.26	Abhängigkeit der Konzentration von der Zeit	243
1.27	Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentration	244
2.1	Unendlich ausgedehnter Grundwasserleiter mit Brunnen und GWBR	248
2.2	Grundwasserleiter mit unvollkommenem Fluss, Brunnen und Baugrube . .	249
2.3	Grundwasserleiter mit Brunnen und Baugrube, Spundwand und Fluss . . .	249
2.4	Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius	250
2.5	Grundwasserleiter mit Fluss, Brunnen und Hangzufluss	251
2.6	Unendlich ausgedehnter Grundwasserleiter mit einem Förderbrunnen . . .	252
2.7	Realer Fluss mit Entnahmehbrunnen (Grundwasseranreicherungsanlage) . .	253
2.8	Grundwasseranreicherungsanlage mit Brunnen und Spundwand	254
2.9	Uferfiltratanlage mit Brunnen und Fluss	254
2.10	Gespannter Grundwasserleiter mit Entnahmehbrunnen und Grundwasserbe- obachtungrohr	257
2.11	Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit für $r = 10m$	259
2.12	Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit innerhalb der ersten $30min$ und für $r = 10m$	260
2.13	Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit und für verschiedene Radien . . .	263

2.14	Absenkung in Abhängigkeit vom Radius und für unterschiedliche Zeiten	263
2.15	Förderganglinie und deren Aufteilung in einzelne Förderleistungen	269
2.16	Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit bei stufenförmiger Förderung	270
2.17	Grundwasserleiter mit unvollkommenem Fluss und Brunnen	271
2.18	Detailansicht der Zusatzlängen und virtuellen Brunnen	272
2.19	Schema zur Ernfernungsbestimmung der realen und der virtuellen Brunnen	273
2.20	Lage der virtuellen Brunnen bei der Begrenzung durch eine Barriere	276
2.21	Lage des virtuellen Brunnens bei einem idealen Fluss als Randbedingung	281
2.22	Abhängigkeit des Grundwasserstandes und der Absenkung vom Hangzufluss	288
2.23	GWBR mit Förderintervall	291
2.24	RB dritter Art -> Verschiebung	295
2.25	Zwei Brunnen an einem Fluss	298
2.26	Grundwasseranreicherungsanlage	300
2.27	Schematische Anordnung mit Brunnen und Spundwand	302
2.28	Grundwasserleiter mit Brunnen und Fluss	305
3.1	Geschichteter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime	308
3.2	Geschichteter Grundwasserleiter mit instationärem Strömungsregime	310
3.3	Einbau eines Tunnelbauwerkes in einem Grundwasserleiter	310
3.4	Deichbauwerk mit Kerndichtung	310
3.5	Grundwasserleiter mit Fluss und Brunnen	311
3.6	Wirkung eines Flusses und eines Hangzuflusses auf den Grundwasserleiter	311
3.7	Quantisierter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime	312
3.8	Iterationsverhalten des Wasserstandes	317

3.9	Quantisierter Grundwasserleiter mit Speicherkapazitäten	319
3.10	Verlauf eines Absenkungsvorgangs	321
3.11	Wasserstand in Abhängigkeit von Zeit und Ort	325
3.12	Schematisierung des Grundwasserleiters mit Tunneleinbau	326
3.13	Deich mit Kerndichtung und Quantisierungsschema	331
3.14	Darstellung des quantisierten Grundwasserleiters	335
3.15	Grundwasserstand nach einem Tag	339
3.16	Grundwasserleiter mit Quantisierungsschema	340
3.17	Ankopplung des Flusses über zusätzliche Widerstände	344
4.1	Grundwasserleiter mit Brunnen und Baugrube	351
4.2	Geschichteter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime	351
4.3	Geschichteter Grundwasserleiter mit instationärem Strömungsregime	352
4.4	Einbau eines Tunnelbauwerkes in einem Grundwasserleiter	352
5.1	Füllvorgang eines Restloches mit konstantem Volumenstrom	356
5.2	Füllvorgang eines Restloches mit variablem Volumenstrom	357
5.3	Gekoppelte Speicherkaskade	357
5.4	Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels mit Blockschaltbild	358
5.5	Wasserstandsregelung eines Bewässerungsgrabens	358
5.6	Schadstofftransport aus dem Boden in das Wasser	359
5.7	Füllvorgang eines Restloches mit konstantem Volumenstrom	360
5.8	Füllvorgang eines Restloches mit variablem Volumenstrom	361
5.9	Gekoppelte Speicherkaskade	362
5.10	Schema der Grundwasserfließverhältnisse	364

5.11	Wasserstandsregelung eines Bewässerungsgrabens	366
5.12	Impulsantwort eines Säulen-Durchlaufversuches	372
5.13	Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius	373
5.14	Bestimmung der Zeitkonstanten T aus dem Absenkungsverlauf	377
5.15	Absenkungsverlauf bei $[\dot{V} = 0,005m^3s^{-1}]$	378
5.16	Eingangssignal $[\dot{V} = 0,1m^3s^{-1}]$	379
5.17	Bestimmung der Zeitkonstante	379
5.18	Konzentrationsverlauf C_{r1}	383
5.19	Konzentrationsverlauf mit ausgewählten Punkten zur Parameterbestimmung	384
5.20	Konzentrationsverlauf C_{r1} mit Bestimmung der Parameter	387
5.21	Konzentrationsverlauf C_{r2} und Parameterbestimmung	388
5.22	Impulsantwort eines Säulen-Durchlaufversuches	390
5.23	Auswertung der Impulsantwort	391
5.24	Antwortsignal eines Pumpversuches	394
5.25	Impulsantwort mit Parameterbestimmung	395
5.26	Temperaturverlauf des Flusswassers und des Grundwassers in der Fassung .	401

Teil I

Aufgaben und Lösungen

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen

1.1 Algebraische Grundlagen

1.1.1 Aufgaben

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke (Lösung s. S. 3):

$$(a) \quad \frac{(18a^2x)^4}{(27ax^2)^5} \cdot \frac{(15ax^2)^4}{(20a^3x)^2} \quad (b). \quad \frac{0,004 \cdot 10^2 \cdot 0,2^3}{0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 16}$$

$$(c) \quad \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[10]{x}}{\sqrt[5]{x^3}} \quad (d) \quad 2 \log_{10} x^3 - 3 \log_{10} y^2$$

$$(e) \quad (\ln u + 4 \ln v)$$

2. Stellen Sie folgende Formeln nach t um (Lösung s. S. 4):

$$(a) \quad I = I_0 \left(\exp \left(-\frac{t}{T} \right) \right)$$

$$(b) \quad I = I_0 \left(1 + 9 \log 9 \frac{t}{T} \right)$$

$$(c) \quad I = I_0 (e^{\mu t} - 1)$$

3. Bestimmen Sie die Variable T im halblogarithmischen Maßstab aus dem Anstieg der

$$\text{Regressionsgeraden} \quad s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \cdot \ln \frac{2,25 \cdot t \cdot T}{r^2 \cdot S} \quad (\dot{V} \text{ ist gegeben})$$

(Lösung s. S. 5)

4. Bestimmen Sie den Speicherkoeffizient S für den Fall $s = 0$ bei t_0 und gegebenem r !

(Lösung s. S. 5)

1.1.2 Lösungen

• zu Aufgabe 1 (s. S. 2)

(a)

$$\begin{aligned} \frac{(18a^2x)^4}{(27ax^2)^5} \cdot \frac{(15ax^2)^4}{(20a^3x)^2} &= \frac{18^4 a^8 x^4 \cdot 15^4 a^4 x^8}{27^5 a^5 x^{10} \cdot 20^2 a^6 x^2} \\ &= \frac{3^8 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot a^{12} \cdot x^{12}}{3^{15} \cdot 2^4 \cdot 5^2 \cdot a^{11} \cdot x^{12}} = \frac{5^2}{3^3} a \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{0,004 \cdot 10^2 \cdot 0,2^3}{0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 16} = \frac{2^2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^2 \cdot 2^3 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-3} \cdot 2^4} = 1$$

(c)

$$\frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[10]{x}}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{10}}}{x^{\frac{3}{5}}} = \frac{x^{\frac{38}{30}}}{x^{\frac{18}{30}}} = x^{\frac{2}{3}}$$

(d)

$$\begin{aligned} 2 \log_{10} x^3 - 3 \log_{10} y^2 &= \log_{10} x^6 - \log_{10} y^6 \\ &= \lg \left(\frac{x^6}{y^6} \right) = 6 \lg \left(\frac{x}{y} \right) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 2 \log_{10} x^3 - 3 \log_{10} y^2 &= 6 \lg x - 6 \lg y \\ &= 6 \lg \left(\frac{x}{y} \right) \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} (\ln u + 4 \ln v) &= \ln u + \ln v^4 \\ &= \ln (u \cdot v^4) \end{aligned}$$

• zu Aufgabe 2 (s. S. 2)

(a)

$$I = I_0(\exp(-\frac{t}{T}))$$

$$\frac{I}{I_0} = \exp(-\frac{t}{T}) = e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{t}{T}$$

$$t = -T \cdot \ln \frac{I}{I_0}$$

(b)

$$I = I_0 \left(1 + 9 \log_a \frac{t}{T} \right)$$

$$\frac{I}{I_0} = 1 + 9 \log_a \frac{t}{T}$$

$$\frac{I}{I_0} - 1 = 9 \log_9 \frac{t}{T}$$

$$\frac{\left(\frac{I}{I_0} - 1\right)}{9} = \log_9 \frac{t}{T}$$

$$9^{\left(\frac{\frac{I}{I_0} - 1}{9}\right)} = \frac{t}{T}$$

$$t = T \cdot \sqrt[9]{9^{\left(\frac{I}{I_0} - 1\right)}}$$

(c)

$$I = I_0 (e^{\mu t} - 1)$$

$$e^{\mu t} = \frac{I}{I_0} + 1$$

$$\mu t = \ln \left(\frac{I}{I_0} + 1 \right)$$

$$t = \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{I}{I_0} + 1 \right)$$

$$t = \ln \left(\frac{I}{I_0} + 1 \right)^{\frac{1}{\mu}} = \ln \sqrt[\mu]{\left(\frac{I}{I_0} + 1 \right)}$$

- zu Aufgabe 3 (s. S. 2)

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \cdot \ln \frac{2,25 \cdot t \cdot T}{r^2 \cdot S}$$

$$s = 0,183 \frac{\dot{V}}{T} \cdot \lg t + 0,183 \frac{\dot{V}}{T} \cdot \lg \frac{2,25 \cdot T}{r^2 \cdot S}$$

$$s_2 - s_1 = 0,183 \frac{\dot{V}}{T} \cdot (\lg t_2 - \lg t_1)$$

$$T = 0,183 \dot{V} \frac{\Delta(\lg t)}{\Delta s} \implies \text{Anstieg}$$

- zu Aufgabe 4 (s. S. 2)

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \cdot \ln \frac{2,25 \cdot t \cdot T}{r^2 \cdot S}$$

$$s = 0 \implies \ln(1) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{2,25 \cdot t_0 \cdot T}{r^2 \cdot S} &= 1 \\ \implies S &= \frac{2,25 \cdot t_0 \cdot T}{r^2} \end{aligned}$$

1.2 Matrizen

1.2.1 Aufgaben

1. Bilden Sie mit: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

folgende Ausdrücke: (Lösung s. S. 7ff)

(a) $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$ (b) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C}$ (c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

(d) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T$ (e) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ (f) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$

(g) $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}$ (h) $\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$ (i) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

2. Bilden Sie für die folgenden Matrizen $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$: (Lösung s. S. 12ff)

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$

3. Bilden Sie die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$: (Lösung s. S. 14ff)

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$; (b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

1.2.2 Lösungen

- zu Aufgabe 1 (s. S. 6)

(a) Berechnen Sie $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$:

$$2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 6 & -12 \end{bmatrix}$$

$$2\mathbf{A} + 3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 14 & -6 \end{bmatrix}$$

(b) Berechnen Sie $\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 + 2 - 3 & 1 - 2 - 12 \\ 4 - 4 + 6 & 3 + 8 + 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 3\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & -13 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c). Berechnen Sie $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2) & (2 \cdot 1 + 1 \cdot (-4)) \\ (4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2) & (4 \cdot 1 + 3 \cdot (-4)) \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(d) Berechnen Sie $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{siehe Lösung zu Aufgabe 1c}$$

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = [a_{jk}]^T = [a_{kj}]$$

erhält man

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$$

(e) Berechnen Sie $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ((-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4) & ((-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3) \\ (2 \cdot 2 + (-4) \cdot 4) & (2 \cdot 1 + (-4) \cdot 3) \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -12 & -10 \end{bmatrix} \neq \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(f) Berechnen Sie $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} && \text{siehe Lösung zu Aufgabe 1c} \\
 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) & 0 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 1 + (-8) \cdot (-2) & 2 \cdot 4 + (-8) \cdot (-1) \end{bmatrix} \\
 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 18 & 16 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(g) Berechnen Sie $(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -12 & -10 \end{bmatrix} && \text{siehe Lösung zu Aufgabe 1e} \\
 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -12 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (2 \cdot 1 + 2 \cdot (-2)) & (2 \cdot 4 + 2 \cdot (-1)) \\ (-12) \cdot 1 + (-10) \cdot (-2) & ((-12) \cdot 4 + (-10) \cdot (-1)) \end{bmatrix} \\
 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & -38 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(h) Berechnen Sie $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = [a_{jk}]^T = [a_{kj}]$$

erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}; & \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ((-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1) & ((-1) \cdot 4 + 2 \cdot 3) \\ (1 \cdot 2 + (-4) \cdot 1) & (1 \cdot 4 + (-4) \cdot 3) \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(i) Berechnen Sie $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = [a_{jk}]^T = [a_{kj}]$$

erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 + (-1) & 4 + 2 \\ 1 + 1 & 3 + (-4) \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T &= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

• zu Aufgabe 2 (s. S. 6)

(a) Berechnen Sie $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = [a_{jk}]^T = [a_{kj}]$$

erhält man

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = (2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3)$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = 5$$

(b) Berechnen Sie $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$$

Entsprechend der Vorschrift zur Bildung der Transponierten einer Matrix

$$\mathbf{A}^T = [a_{jk}]^T = [a_{kj}]$$

erhält man

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -8 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) & 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-8) \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & -2 \cdot 3 + 1 \cdot (-8) \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -21 \\ -2 & -7 & -14 \end{bmatrix}$$

• zu Aufgabe 3 (s. S. 6)

Die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ kann genau dann gebildet werden, wenn die Determinante D der Matrix $\mathbf{A}$ ungleich Null ($D \neq 0$) ist. Die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ wird gebildet, indem die Unterdeterminante U_{ij} zum Element a_{ij} durch die Determinante der Matrix $D = \det(\mathbf{A})$ dividiert wird. Mit der Unterdeterminante U_{ji} , zum Element a_{ji} gehörend, ergibt sich:

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{U_{ji}}{D}$$

Die Berechnung der Determinante von $\mathbf{A}$ erfolgt nach dem Entwicklungssatz von LAPLACE oder nach der Regel von SARRUS (siehe auch Lösung von Gleichungssystemen S. ??). Daran anschließend müssen die Unterdeterminanten U_{ji} berechnet werden, damit die Elemente a_{ij} der inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnet werden kann.

(a) Berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = 11$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} & -\frac{5}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) Berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= 1 \cdot ((-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1) - 1 (1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1) + (-1) \cdot (1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1)) \\ &= -4 \end{aligned}$$

Daran anschließend müssen die neun Unterdeterminanten berechnet werden, damit die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnet werden kann.

Die Unterdeterminanten ergeben sich entsprechend der Rechenregeln für Determinanten zu

$$U_{11} : ((-1) \cdot 1) - (1 \cdot 1) = -2$$

$$U_{12} : (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot 1) = 2$$

$$U_{13} : (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot (-1)) = 0$$

$$U_{21} : (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot 1) = 2$$

$$U_{22} : (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot (-1)) = 0$$

$$U_{23} : (1 \cdot 1) - (1 \cdot (-1)) = 2$$

$$U_{31} : (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot (-1)) = 0$$

$$U_{32} : (1 \cdot 1) - ((-1) \cdot 1) = 2$$

$$U_{33} : (1 \cdot (-1)) - (1 \cdot 1) = -2$$

Entsprechend der Regeln zur Bildung der inversen Matrix, die in der Aufgabenstellung wiederholt ist, ergibt sich die Inverse zu

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(c) Berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -8 + 24 - 36 + 24 - 18 + 16$$

$$= 2$$

Daran anschließend müssen die neun Unterdeterminanten berechnet werden, damit die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnet werden kann.

Die Unterdeterminanten ergeben sich entsprechend der Rechenregeln für Determinanten zu

$$U_{11} : ((-2) \cdot 2) - (3 \cdot 3) = -13$$

$$U_{12} : ((-4) \cdot 2) - (4 \cdot 3) = -20$$

$$U_{13} : ((-4) \cdot (-2)) - (4 \cdot 3) = -4$$

$$U_{21} : (2 \cdot 2) - (3 \cdot 3) = -5$$

$$U_{22} : (2 \cdot 2) - (4 \cdot 3) = -8$$

$$U_{23} : (2 \cdot 3) - (4 \cdot 2) = -2$$

$$U_{31} : (2 \cdot 3) - (-2 \cdot 3) = 12$$

$$U_{32} : (2 \cdot 3) - ((-4) \cdot 3) = 18$$

$$U_{33} : (2 \cdot (-2)) - ((-4) \cdot 2) = 4$$

Entsprechend den Regeln zur Bildung der inversen Matrix, die in der Aufgabenstellung wiederholt ist, ergibt sich die Inverse zu

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & -\left(\frac{-5}{2}\right) & \frac{12}{2} \\ -\left(\frac{-20}{2}\right) & \frac{-8}{2} & -\left(\frac{18}{2}\right) \\ \frac{-4}{2} & -\left(\frac{-2}{2}\right) & \frac{4}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -6,5 & 2,5 & 6 \\ 10 & -4 & -9 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1.3 Lineare Gleichungssysteme

1.3.1 Aufgaben

Bestimmen Sie von den folgenden Gleichungssystemen ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$) den Lösungsvektor $\mathbf{X}$ auf fünf Arten:

- (a) mittels des GAUSSschen Eliminationsverfahrens
- (b) mit Hilfe der CRAMERSchen Regel
- (c) durch Bestimmung von $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R}$ (s.auch S. 14ff)
- (d) unter Verwendung der LU-Zerlegung und
- (e) mittels des CHOLSKY-Verfahrens

1.
$$\frac{x-2}{3} - \frac{y+2}{2} = \frac{x-2y}{5}$$
$$\frac{x-y}{6} + \frac{3y+2}{4} = \frac{x-2(y-1)}{3}$$
 Lösung s. S. 19

2.
$$3x + y - z = 2$$
$$2x - y + 4z = 0$$
$$x + 5y - 2z = 1$$
 Lösung s. S. 27

3.
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
 Lösung s. S. 33

$$x + y + z = 3$$

4. $2x + 4y + 8z = 13$ Lösung s. S. 38

$$3x + 9y + 27z = 34$$

$$2x - 4y + 9w = 25$$

5. $3x - 3y - 3z + 11w = 27$ Lösung s. S. 43

$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$

$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

$$2x + y - 2z = 1$$

6. $x + y + z = 6$ Lösung s. S. 63

$$-2x + y - 2z = -3$$

1.3.2 Lösungen

- zu Aufgabe 1 (s. S. 17)

Zuerst werden die beiden Gleichungen vereinfacht

Gleichung 1:

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{3} - \frac{y+2}{2} &= \frac{x-2y}{5} \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} - \frac{1}{2}y - 1 &= \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y \\ \frac{5}{15}x - \frac{3}{15}x - \frac{5}{10}y + \frac{4}{10}y &= \frac{5}{3} \\ \frac{2}{15}x - \frac{1}{10}y &= \frac{5}{3} \\ 4x - 3y &= 50\end{aligned}$$

Gleichung 2:

$$\begin{aligned}\frac{x-y}{6} + \frac{3y+2}{4} &= \frac{x-2(y-1)}{3} \\ \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}y + \frac{3}{4}y + \frac{1}{2} &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6}x + \frac{15}{12}y &= \frac{1}{6} \\ -4x + 30y &= 4\end{aligned}$$

Damit erhält man das vereinfachte Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}4x - 3y &= 50 \\ -4x + 30y &= 4\end{aligned}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 50 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(a) **GAUSSsches Eliminationsverfahren**

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

Zur Elimination müssen nur die beiden Gleichungen addiert werden. Dann erhält man:

$$27y = 54$$

$$y = 2$$

Setzt man diesen Wert in die erste Gleichung ein, so ergibt sich:

$$4x - 3 \cdot 2 = 50$$

$$x = 14$$

Probe:

$$4 \cdot 14 - 3 \cdot 2 = 50$$

$$-4 \cdot 14 + 30 \cdot 2 = 4$$

(b) CRAMERSche Regel

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 50 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Es gilt:

$$x_i = \frac{D_{xi}}{D}$$

wobei D die Determinante und D_{xi} die entsprechende CRAMERSche Determinante ist.

$$D = \det A = \det \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{vmatrix} = 4 \cdot 30 - (-4 \cdot (-3)) = 120 - 12$$

$$D = 108$$

$$D_x = \det \begin{vmatrix} 50 & -3 \\ 4 & 30 \end{vmatrix} = 1500 - (-12) = 1512$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1512}{108} = 14$$

$$D_y = \det \begin{vmatrix} 4 & 50 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 16 - (-200) = 216$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \left(\frac{216}{108} \right) = 2$$

Probe:

$$4 \cdot 14 - 3 \cdot 2 = 50$$

$$-4 \cdot 14 + 30 \cdot 2 = 4$$

(c) Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 50 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Berechnung:

$$D = \det \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{vmatrix} = 108$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{30}{108} & \frac{3}{108} \\ \frac{4}{108} & \frac{4}{108} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} & \frac{1}{36} \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{27} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 50 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5 \cdot 50}{18} + \frac{4}{36} \\ \frac{50}{27} + \frac{4}{27} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{252}{18} \\ \frac{54}{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Daraus folgt die Lösung des Gleichungssystems:

$$x = 14; \quad y = 2$$

Probe:

$$4 \cdot 14 - 3 \cdot 2 = 50$$

$$-4 \cdot 14 + 30 \cdot 2 = 4$$

(d) LU-Zerlegung

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 50 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Berechnung:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Grundgedanke der **LU**-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen **L** (Lower) und **U** (Upper).

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

Dabei werden aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonalen der unteren Dreiecksmatrix **L** zu Eins gesetzt.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{bmatrix}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ und anschließendem Elementevergleich mit der $\mathbf{A}$ -Matrix erhält man folgende Gleichungen.

$$1 \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 = a_{11} = 4 \Rightarrow u_{11} = 4$$

$$1 \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} = a_{12} = -3 \Rightarrow u_{12} = -3$$

$$l_{21} \cdot u_{11} + 1 \cdot 0 = a_{21} = -4 \Rightarrow l_{21} = -1$$

$$l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} = a_{22} = 30 \Rightarrow u_{22} = 27$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$$

Über die Zwischenlösung $\mathbf{Y}$ lässt sich der Lösungsvektor $\mathbf{X}$ berechnen:
Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} \cdot \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{Y}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{R}$ erhält man:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 50 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = 50$$

$$-1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = 4$$

$$y_1 = 50$$

$$y_2 = 54$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{X}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{Y}$ erhält man:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 27 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 50 \\ 54 \end{bmatrix}$$

$$4 \cdot x - 3 \cdot y = 50$$

$$0 \cdot x + 27 \cdot y = 54$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x = 14; \quad y = 2$$

Probe:

$$4 \cdot 14 - 3 \cdot 2 = 50$$

$$-4 \cdot 14 + 30 \cdot 2 = 4$$

(e) **CHOLESKY-Verfahren**

Vereinfachte Ausgangsgleichungen:

$$4x - 3y = 50$$

$$-4x + 30y = 4$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 30 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 50 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$. Dies ist hier nicht gegeben.

Damit ist das CHOLESKY-Verfahrens nicht anwendbar.

- zu Aufgabe 2 (s. S. 17)

(a) GAUSSsches Eliminationsverfahren

Ausgangsgleichungen:

$$3x + y - z = 2$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x + 5y - 2z = 1$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 4 & 0 \end{array} \quad | -2 \cdot 1. \text{ Zeile}$$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 1 & -1 & 2 \end{array} \quad | -3 \cdot 1. \text{ Zeile}$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -11 & 8 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -14 & 5 & -1 \end{array}$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -154 & 112 & -28 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -154 & 55 & -11 \end{array} \quad | -1 \cdot 2. \text{ Zeile}$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 5 & -2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -154 & 112 & -28 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -57 & 17 \end{array}$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Zeile} & \quad \Rightarrow \quad 0x + 0y - 57z = 17 \\ & \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{17}{57} \\ 2. \text{ Zeile} & \quad \Rightarrow \quad 0x - 154y + 112 \cdot \left(-\frac{17}{57}\right) = -28 \\ & \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{2}{57} \\ 1. \text{ Zeile} & \quad \Rightarrow \quad 1x + 5 \cdot \left(-\frac{2}{57}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{17}{57}\right) = 1 \\ & \quad \Rightarrow \quad x = \frac{33}{57} \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{33}{57} - \frac{2}{57} + \frac{17}{57} &= 2 \\ 2 \cdot \frac{33}{57} + \frac{2}{57} - 4 \cdot \frac{17}{57} &= 0 \\ \frac{33}{57} - 5 \cdot \frac{2}{57} + 2 \cdot \frac{17}{57} &= 1 \end{aligned}$$

(b) CRAMERSche Regel

Ausgangsgleichungen:

$$3x + y - z = 2$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x + 5y - 2z = 1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Als Nebenrechnung werden die Determinanten getrennt berechnet. Dabei kann bei

dreireihigen Determinanten auf die Methode der Unterdeterminanten verzichtet werden und über die fiktive Wiederholung der beiden ersten Spalten das Produkt der "Hauptdiagonalen" um das Produkt der "Unterdeterminanten" subtrahiert werden (Regel von SARRUS).

$$D = \det \mathbf{A} = \det \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6 + 4 - 10 - 1 - 60 + 4$$

$$D = -57$$

$$D_x = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 0 - 1 - 40 - 0$$

$$D_x = -33$$

$$D_y = \det \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 8 - 2 - 0 - 12 + 8$$

$$D_y = 2$$

$$D_z = \det \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3 + 0 + 20 + 2 - 0 - 2$$

$$D_z = 17$$

Daraus ergeben sich die Unbekannten des Gleichungssystems:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-33}{-57} = \frac{33}{57};$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{2}{-57} = -\frac{2}{57}$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{17}{-57} = -\frac{17}{57}$$

(c) Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$

Ausgangsgleichungen:

$$3x + y - z = 2$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x + 5y - 2z = 1$$

Die Berechnung der Determinante von $\mathbf{A}$ erfolgt wie bei II) (s. S. 27) beschrieben und liefert

$$\det \mathbf{A} = -57$$

Daran anschließend müssen die neun Unterdeterminanten berechnet werden, damit anschließend die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnet werden kann.

Die Unterdeterminanten ergeben sich entsprechend der Rechenregeln für Determinanten zu

$$U_{11} = (-1) \cdot (-2) - 5 \cdot 4 = -18$$

$$U_{12} = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 = -8$$

$$U_{13} = 2 \cdot 5 - (-1) \cdot 1 = 11$$

$$U_{21} = 1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 5 = 3$$

$$U_{22} = 3 \cdot (-2) - (-1) \cdot 1 = -5$$

$$U_{23} = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 1 = 14$$

$$U_{31} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot (-1) = 3$$

$$U_{32} = 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 = 14$$

$$U_{33} = 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 = -5$$

Entsprechend den Regeln zur Bildung der inversen Matrix (s.auch S. 14ff) ergibt sich die Inverse zu

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{18}{57} & \frac{3}{57} & \frac{-3}{57} \\ \frac{-8}{57} & \frac{5}{57} & \frac{14}{57} \\ \frac{-11}{57} & \frac{14}{57} & \frac{5}{57} \end{bmatrix}$$

und die Lösung des Gleichungssystems lautet

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \frac{18}{57} & \frac{3}{57} & \frac{-3}{57} \\ \frac{-8}{57} & \frac{5}{57} & \frac{14}{57} \\ \frac{-11}{57} & \frac{14}{57} & \frac{5}{57} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{36}{57} + 0 - \frac{3}{57} \\ \frac{-16}{57} + 0 + \frac{14}{57} \\ \frac{-22}{57} + 0 + \frac{5}{57} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{33}{57} \\ \frac{-2}{57} \\ \frac{-17}{57} \end{bmatrix}$$

bzw., aufgelöst in die einzelnen Unbekannten,

$$x = \frac{33}{57} \quad y = -\frac{2}{57} \quad z = -\frac{17}{57}$$

(d) LU-Zerlegung

(e) CHOLESKY-Verfahren

Ausgangsgleichungen:

$$3x + y - z = 2$$

$$2x - y + 4z = 0$$

$$x + 5y - 2z = 1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix **A**. Dies ist hier nicht gegeben.
Damit ist das CHOLESKY-Verfahrens nicht anwendbar.

- zu Aufgabe 3 (s. S. 17)

(a) GAUSSsches Eliminationsverfahren

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2x - z = 1$$

$$2x + 4y - z = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 0$$

$$-x + 8y + 3z = 2$$

$$1 \quad -8 \quad -3 \quad -2$$

$$2 \quad 4 \quad -1 \quad 1 \quad | \quad -2 \cdot 1. \text{ Zeile}$$

$$2 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad | \quad -2 \cdot 1. \text{ Zeile}$$

$$\Downarrow$$

$$1 \quad -8 \quad -3 \quad -2$$

$$0 \quad 20 \quad 5 \quad 5$$

$$0 \quad 16 \quad 5 \quad 5$$

$$3. \text{ Zeile} \quad \Rightarrow \quad 0y + 5z = 5$$

$$\Rightarrow z = 1$$

$$1. \text{ Zeile} \quad \Rightarrow \quad x - 3 = -2$$

$$\Rightarrow x = 1$$

(b) CRAMERSche Regel

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Als Nebenrechnung werden die Determinanten getrennt berechnet. Dabei kann bei dreireihigen Determinanten auf die Methode der Unterdeterminanten verzichtet werden und über die fiktive Wiederholung der beiden ersten Spalten das Produkt der "Hauptdiagonalen" um das Produkt der "Unterdeterminanten" subtrahiert werden (Regel von SARRUS)

$$\det \mathbf{A} = D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 8 & 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D = 2 \cdot 4 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \cdot 8 - (-1) \cdot 4 \cdot (-1) + \\ + 2 \cdot (-1) \cdot 8 + 0 \cdot 2 \cdot 3$$

$$D = 20$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D_x = 20$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D_y = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 8 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$D_z = 20$$

Daraus ergeben sich die Unbekannten des Gleichungssystems:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{20}{20} = 1$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{20} = 0$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{20}{20} = 1$$

(c) Verwendung der Inversen $A^{-1} \cdot R = X$

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = R$$

Die Berechnung der Determinante von $\mathbf{A}$ erfolgt wie bei b) (s.S. ??) beschrieben und liefert $\det \mathbf{A} = 20$

Daran anschließend müssen die neun Unterdeterminanten berechnet werden, damit anschließend die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ berechnet werden kann.

Die Unterdeterminanten ergeben sich entsprechend der Rechenregeln für Determinanten zu

$$U_{11} : (4 \cdot 3) - (8 \cdot (-1)) = 20$$

$$U_{12} : (2 \cdot 3) - ((-1) \cdot (-1)) = 5$$

$$U_{13} : (2 \cdot 8) - ((-1) \cdot 4) = 20$$

$$U_{21} : (0 \cdot 3) - (8 \cdot (-1)) = 8$$

$$U_{22} : (2 \cdot 3) - ((-1) \cdot (-1)) = 5$$

$$U_{23} : (2 \cdot 8) - ((-1) \cdot 0) = 16$$

$$U_{31} : (0 \cdot (-1)) - (4 \cdot (-1)) = 4$$

$$U_{32} : (2 \cdot (-1)) - (2 \cdot (-1)) = 0$$

$$U_{33} : (2 \cdot 4) - (2 \cdot 0) = 8$$

Entsprechend der Regeln zur Bildung der inversen Matrix (s.auch S. 14ff) ergibt sich die Inverse zu

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 20 & -8 & 4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 20 & -16 & 8 \end{bmatrix}$$

und die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
\mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 \\ 1 - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

bzw. aufgelöst in die einzelnen Unbekannten.

$$x = 1; \quad y = 0; \quad z = 1$$

(d) LU-Zerlegung

(e) CHOLESKY-Verfahren

Ausgangsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$. Dies ist hier nicht gegeben. Damit ist das CHOLESKY-Verfahrens nicht anwendbar

• zu Aufgabe 4 (s. S. 17)

(a) GAUSSsches Eliminationsverfahren

Ausgangsgleichungen:

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 4y + 8z = 13$$

$$3x + 9y + 27z = 34$$

In einer Matrix ähnlichen Form kann man schreiben:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 8 & 13 \end{array} \quad | -2 \cdot 1. \text{ Zeile}$$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 9 & 27 & 34 \end{array} \quad | -3 \cdot 1. \text{ Zeile}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 6 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 6 & 24 & 25 \end{array} \quad | -3 \cdot 2. \text{ Zeile}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 6 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 6 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3. \text{ Zeile} & 6z = 4, \implies z = \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 2. \text{ Zeile} & 2y + 6 \cdot \frac{2}{3} = 7, \implies y = \frac{3}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1. \text{ Zeile} & x + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = 3, \implies x = \frac{5}{6} \end{array}$$

(b) CRAMERSche Regel

Ausgangsgleichungen:

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 4y + 8z = 13$$

$$3x + 9y + 27z = 34$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Als Lösungsweg wird die Entwicklung nach der 1. Zeile ($\implies$ Unterdeterminanten) gewählt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$$

$$D = \det A = 1 \cdot (4 \cdot 27 - 9 \cdot 8) - 1 \cdot (2 \cdot 27 - 3 \cdot 8) + 1 \cdot (2 \cdot 9 - 3 \cdot 4)$$

$$D = 12$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 13 & 4 & 8 \\ 34 & 9 & 27 \end{vmatrix}$$

$$D_x = 3 \cdot 4 \cdot 27 - 3 \cdot 8 \cdot 9 - 1 \cdot 13 \cdot 27 + 1 \cdot 8 \cdot 34 - 1 \cdot 4 \cdot 34 + 1 \cdot 13 \cdot 9$$

$$D_x = 10$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 13 & 8 \\ 3 & 34 & 27 \end{vmatrix}$$

$$D_y = 18$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 13 \\ 3 & 9 & 34 \end{vmatrix}$$

$$D_z = 8$$

Daraus ergeben sich die Unbekannten des Gleichungssystems mit

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6};$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2};$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

(c) Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$

Ausgangsgleichungen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = 12; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{bmatrix}$$

$$U_{11} : (27 \cdot 4) - (8 \cdot 9) = 36$$

$$U_{12} : (2 \cdot 27) - (3 \cdot 8) = 30$$

$$U_{13} : (2 \cdot 9) - (3 \cdot 4) = 6$$

$$U_{21} : (1 \cdot 27) - (1 \cdot 9) = 18$$

$$U_{22} : (1 \cdot 27) - (1 \cdot 3) = 24$$

$$U_{23} : (1 \cdot 9) - (1 \cdot 3) = 6$$

$$U_{31} : (1 \cdot 8) - (1 \cdot 4) = 4$$

$$U_{32} : (1 \cdot 8) - (1 \cdot 2) = 6$$

$$U_{33} : (1 \cdot 4) - (1 \cdot 2) = 2$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 36 & -18 & 4 \\ -30 & 24 & -6 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - \frac{39}{2} + \frac{34}{3} \\ -\frac{15}{2} + 26 - 17 \\ \frac{3}{2} - \frac{13}{2} + \frac{34}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(d) LU-Zerlegung**(e) CHOLESKY-Verfahren**

Ausgangsgleichungen:

$$x + y + z = 3$$

$$2x + 4y + 8z = 13$$

$$3x + 9y + 27z = 34$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ 34 \end{bmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix **A**. Dies ist hier nicht gegeben.

Damit ist das CHOLESKY-Verfahrens nicht anwendbar

- zu Aufgabe 5 (s. S. 17)

(a) GAUSSsches Eliminationsverfahren

Ausgangsgleichungen:

$$2x - 4y + 9w = 25$$

$$3x - 3y - 3z + 11w = 27$$

$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$

$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

In einer Matrix ähnlichen Form kann man schreiben:

$$\begin{array}{ccccc|l} 2 & -4 & 0 & 9 & 25 & \text{vertauschen} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 3 & -3 & -3 & 11 & 27 & \text{vertauschen} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 4 & 6 & -15 & 5 & -5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 3 & 1 & -4 & 12 & 32 & \cdot 3 \end{array}$$

⇓

$$\begin{array}{ccccc|l} 3 & -3 & -3 & 11 & 27 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 2 & -4 & 0 & 9 & 25 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 4 & 6 & -15 & 5 & -5 & -5 \cdot 1. \text{ Zeile} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|l} 9 & 3 & -12 & 36 & 96 & -4 \cdot 1. \text{ Zeile} \end{array}$$

⇓

$$\begin{array}{ccccc}
 3 & -3 & -3 & 11 & 27 \\
 2 & -4 & 0 & 9 & 25 \\
 -11 & 21 & 0 & -50 & -140 & | & + 5,5 \cdot 2. \text{ Zeile} \\
 9 & 3 & -12 & 36 & 96 & | & + 1,5 \cdot 2. \text{ Zeile}
 \end{array}$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{ccccc}
 3 & -3 & -3 & 11 & 27 \\
 2 & -4 & 0 & 9 & 25 \\
 0 & -1 & 0 & -0,5 & -2,5 \\
 0 & 9 & 0 & 5,5 & 25,5 & | & + 9 \cdot 3. \text{ Zeile}
 \end{array}$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{ccccc}
 3 & -3 & -3 & 11 & 27 \\
 2 & -4 & 0 & 9 & 25 \\
 0 & -1 & 0 & -0,5 & -2,5 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & \implies & w = 3
 \end{array}$$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{lcl}
 -y - 0,5 \cdot 3 & = & -2,5 \implies y = 1 \\
 2x - 4 + 27 & = & 25 \implies x = 1 \\
 3 - 3 - 3z + 33 & = & 27 \implies z = 2
 \end{array}$$

(b) CRAMERSche Regel

Ausgangsgleichungen:

$$2x - 4y + 9w = 25$$

$$3x - 3y - 3z + 11w = 27$$

$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$

$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{D_{xi}}{D}$$

$$\begin{aligned}
 D = \det A &= \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & 11 \\ 6 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & 11 \\ 6 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & 11 \\ 6 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} \\
 &= 2 \cdot (540 - 15 - 264 + 165 - 60 + 216) + \\
 &\quad + 4 \cdot (-540 - 45 - 176 + 495 + 60 + 144) - \\
 &\quad - 9 \cdot (-72 + 135 - 12 + 54 + 45 - 48) \\
 D &= -2
 \end{aligned}$$

$$D_x = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & 11 \\ 6 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 27 & -3 & 11 \\ -5 & -15 & 5 \\ 32 & -4 & 12 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 27 & -3 & -3 \\ -5 & 6 & -15 \\ 32 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$D_x = -2$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$D_y = 2 \cdot \begin{vmatrix} 27 & -3 & 11 \\ -5 & -15 & 5 \\ 32 & -4 & 12 \end{vmatrix} - 25 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & -15 & 5 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 27 & -3 \\ 4 & -5 & -15 \\ 3 & 32 & -4 \end{vmatrix}$$

$$D_y = -2$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$D_z = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 27 & 11 \\ 6 & -5 & 5 \\ 1 & 32 & 12 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 27 & 11 \\ 4 & -5 & 5 \\ 3 & 32 & 12 \end{vmatrix} + 25 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix}$$

$$D_z = -4$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$D_w = 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -3 & 27 \\ 6 & -15 & -5 \\ 1 & -4 & 32 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & 27 \\ 4 & -15 & -5 \\ 3 & -4 & 32 \end{vmatrix} + 25 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -15 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$D_w = -6$$

$$w = \frac{D_w}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$

(c) Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$

Ausgangsgleichungen:

$$2x - 4y + 9w = 25$$

$$3x - 3y - 3z + 11w = 27$$

$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$

$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

$$D = \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{array}{ll} U_{11} & \det \begin{vmatrix} -3 & -3 & 11 \\ 6 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 582 \\ U_{12} & \det \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & -15 & 5 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} = -62 \\ U_{13} & \det \begin{vmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 146 \\ U_{14} & \det \begin{vmatrix} 3 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -15 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 102 \end{array}$$

$$U_{21} \quad \det \begin{vmatrix} -4 & 0 & 9 \\ 6 & -15 & 5 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 559 \quad U_{22} \quad \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 4 & -15 & 5 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} = -59$$

$$U_{23} \quad \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 140 \quad U_{24} \quad \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 6 & -15 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 98$$

$$U_{31} \quad \det \begin{vmatrix} -4 & 0 & 9 \\ -3 & -3 & 11 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = 103 \quad U_{32} \quad \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & 11 \\ 3 & -4 & 12 \end{vmatrix} = -11$$

$$U_{33} \quad \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 3 & -3 & 11 \\ 3 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 26 \quad U_{34} \quad \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 18$$

$$U_{41} \quad \det \begin{vmatrix} -4 & 0 & 9 \\ -3 & -3 & 11 \\ 6 & -15 & 5 \end{vmatrix} = -33 \quad U_{42} \quad \det \begin{vmatrix} 2 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & 11 \\ 4 & -15 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

$$U_{43} \quad \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -8 \quad U_{44} \quad \det \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \\ 4 & 6 & -15 \end{vmatrix} = -6$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 582 & -559 & 103 & 33 \\ 62 & -59 & 11 & 3 \\ 146 & -140 & 26 & 8 \\ -102 & 98 & -18 & -6 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 582 & -559 & 103 & 33 \\ 62 & -59 & 11 & 3 \\ 146 & -140 & 26 & 8 \\ -102 & 98 & -18 & -6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 25 \cdot 582 - 559 \cdot 27 - 5 \cdot 103 + 32 \cdot 33 \\ 25 \cdot 62 - 59 \cdot 27 - 5 \cdot 11 + 32 \cdot 3 \\ 25 \cdot 146 - 140 \cdot 27 - 5 \cdot 26 + 32 \cdot 8 \\ -25 \cdot 102 + 98 \cdot 27 + 5 \cdot 18 - 32 \cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix};$$

Daraus folgt die Lösung des Gleichungssystems:

$$x = 1; \quad y = 3; \quad z = 2.$$

(d) LU-Zerlegung

Ausgangsgleichungen:

$$2x - 4y + 9w = 25$$

$$3x - 3y - 3z + 11w = 27$$

$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$

$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R};$$

Grundgedanke der LU-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen **L** (Lower) und **U** (Upper).

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A};$$

Dabei wird aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonale der unteren Dreiecksmatrix **L** zu Eins gesetzt.

$$\begin{aligned}\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{bmatrix};\end{aligned}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ und anschließendem Elementevergleich mit der $\mathbf{A}$ -Matrix erhält man folgende Gleichungen.

$$1 \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{11} = 2 \Rightarrow u_{11} = 2;$$

$$1 \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{12} = -4 \Rightarrow u_{12} = -4;$$

$$1 \cdot u_{13} + 0 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} + 0 \cdot 0 = a_{13} = 0 \Rightarrow u_{13} = 0;$$

$$1 \cdot u_{14} + 0 \cdot u_{24} + 0 \cdot u_{34} + 0 \cdot u_{44} = a_{14} = 9 \Rightarrow u_{14} = 9;$$

$$l_{21} \cdot u_{11} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{21} = 3 \Rightarrow l_{21} = \frac{3}{2};$$

$$l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{22} = -3 \Rightarrow u_{22} = 3;$$

$$l_{21} \cdot u_{13} + 1 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} + 0 \cdot 0 = a_{23} = -3 \Rightarrow u_{23} = -3;$$

$$l_{21} \cdot u_{14} + 1 \cdot u_{24} + 0 \cdot u_{34} + 0 \cdot u_{44} = a_{24} = 11 \Rightarrow u_{24} = -\frac{5}{2};$$

$$l_{31} \cdot u_{11} + l_{32} \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{31} = 4 \Rightarrow l_{31} = 2;$$

$$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{32} = 6 \Rightarrow l_{32} = \frac{14}{3};$$

$$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} + 0 \cdot 0 = a_{33} = -15 \Rightarrow u_{33} = -1;$$

$$l_{31} \cdot u_{14} + l_{32} \cdot u_{24} + 1 \cdot u_{34} + 0 \cdot u_{44} = a_{34} = 5 \Rightarrow u_{34} = -\frac{4}{3};$$

$$l_{41} \cdot u_{11} + l_{42} \cdot 0 + l_{43} \cdot 0 + 1 \cdot 0 = a_{41} = 3 \Rightarrow l_{41} = \frac{3}{2};$$

$$l_{41} \cdot u_{12} + l_{42} \cdot u_{22} + l_{43} \cdot 0 + 1 \cdot 0 = a_{42} = 1 \Rightarrow l_{42} = \frac{7}{3};$$

$$l_{41} \cdot u_{13} + l_{42} \cdot u_{23} + l_{43} \cdot u_{33} + 1 \cdot 0 = a_{43} = -4 \Rightarrow l_{43} = -3;$$

$$l_{41} \cdot u_{14} + l_{42} \cdot u_{24} + l_{43} \cdot u_{34} + 1 \cdot u_{44} = a_{44} = 12 \Rightarrow l_{43} = \frac{1}{3};$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{14}{3} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Über die Zwischenlösung $\mathbf{Y}$ lässt sich der Lösungsvektor $\mathbf{X}$ berechnen:
Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} \cdot \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{Y}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{R}$ erhält man:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{14}{3} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 = 25$$

$$\frac{3}{2} \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 = 27$$

$$2 \cdot y_1 + \frac{14}{3} \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 = -5$$

$$\frac{3}{2} \cdot y_1 + \frac{7}{3} \cdot y_2 - 3 \cdot y_3 + 1 \cdot y_4 = 32$$

$$y_1 = 25$$

$$y_2 = -\frac{21}{2}$$

$$y_3 = -6$$

$$y_4 = 1$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{X}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{Y}$ erhält man:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 25 \\ -\frac{21}{2} \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot x - 4 \cdot y + 9 \cdot w = 25$$

$$0 \cdot x + 3 \cdot y - 3 \cdot z - \frac{5}{2}w = -\frac{21}{2}$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y - 1 \cdot z - \frac{4}{3}w = -6$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + \frac{1}{3}w = 1$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$2x - 4y + 9w = 25$$

$$3x - 3y - 3z + 11w = 27$$

$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$

$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Bei der LU - Zerlegung wird versucht, die quadratische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ in zwei Dreiecksmatrizen, die L- (lower) und die U- (upper) -Matrix zu zerlegen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

wird zerlegt in: $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Laut Definition gilt: $l_{11} = 1$

$$l_{22} = 1$$

$$l_{33} = 1$$

$$l_{44} = 1$$

Berechnung der übrigen Koeffizienten:

$$l_{11} \cdot u_{11} + l_{12} \cdot u_{21} + l_{13} \cdot u_{31} + l_{14} \cdot u_{41} = a_{11}$$

$$1 \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2 \quad \implies \quad u_{11} = 2$$

$$l_{11} \cdot u_{12} + l_{12} \cdot u_{22} + l_{13} \cdot u_{32} + l_{14} \cdot u_{42} = a_{12}$$

$$1 \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -4 \quad \implies \quad u_{12} = -4$$

$$l_{11} \cdot u_{13} + l_{12} \cdot u_{23} + l_{13} \cdot u_{33} + l_{14} \cdot u_{43} = a_{13}$$

$$1 \cdot u_{13} + 0 \cdot (-3) + 0 \cdot u_{33} + 0 \cdot 0 = 0 \quad \implies \quad u_{13} = 0$$

$$l_{11} \cdot u_{14} + l_{12} \cdot u_{24} + l_{13} \cdot u_{34} + l_{14} \cdot u_{44} = a_{14}$$

$$1 \cdot u_{14} + 0 \cdot u_{14} + 0 \cdot u_{34} + 0 \cdot u_{44} = 9 \quad \implies \quad u_{14} = 9$$

$$l_{21} \cdot u_{11} + l_{22} \cdot u_{21} + l_{23} \cdot u_{31} + l_{24} \cdot u_{41} = a_{21}$$

$$l_{21} \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 3 \quad \implies \quad l_{21} = \frac{3}{2}$$

$$l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \cdot u_{22} + l_{23} \cdot u_{32} + l_{24} \cdot u_{42} = a_{22}$$

$$\frac{3}{2} \cdot (-4) + 1 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -3 \quad \implies \quad u_{22} = 3$$

$$l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} + l_{23} \cdot u_{33} + l_{24} \cdot u_{43} = a_{23}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 0 + 1 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} + 0 \cdot 0 = -3 \quad \implies \quad u_{23} = -3$$

$$l_{21} \cdot u_{14} + l_{22} \cdot u_{24} + l_{23} \cdot u_{34} + l_{24} \cdot u_{44} = a_{24}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 9 + 1 \cdot u_{24} + 0 \cdot u_{34} + 0 \cdot u_{44} = 11 \quad \implies \quad u_{24} = -\frac{5}{2}$$

$$l_{31} \cdot u_{11} + l_{32} \cdot u_{21} + l_{33} \cdot u_{31} + l_{34} \cdot u_{41} = a_{31}$$

$$l_{31} \cdot 2 + l_{32} \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 4 \quad \implies \quad l_{31} = 2$$

$$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} + l_{33} \cdot u_{32} + l_{34} \cdot u_{42} = a_{32}$$

$$2 \cdot (-4) + l_{32} \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 6 \quad \implies \quad l_{32} = \frac{14}{3}$$

$$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \cdot u_{33} + l_{34} \cdot u_{43} = a_{33}$$

$$2 \cdot 0 + \frac{14}{3} \cdot (-3) + 1 \cdot u_{33} + 0 \cdot 0 = -15 \quad \implies \quad u_{33} = -1$$

$$l_{31} \cdot u_{14} + l_{32} \cdot u_{24} + l_{33} \cdot u_{34} + l_{34} \cdot u_{44} = a_{34}$$

$$2 \cdot 9 + \frac{14}{3} \cdot (-\frac{5}{2}) + 1 \cdot u_{34} + 0 \cdot u_{44} = 5 \quad \implies \quad u_{34} = -\frac{4}{3}$$

$$l_{41} \cdot u_{11} + l_{42} \cdot u_{21} + l_{43} \cdot u_{31} + l_{44} \cdot u_{41} = a_{41}$$

$$l_{41} \cdot 2 + l_{42} \cdot 0 + l_{43} \cdot 0 + l_{44} \cdot 0 = 3 \quad \implies \quad l_{41} = \frac{3}{2}$$

$$l_{41} \cdot u_{12} + l_{42} \cdot u_{22} + l_{43} \cdot u_{32} + l_{44} \cdot u_{42} = a_{42}$$

$$\frac{3}{2} \cdot (-4) + l_{42} \cdot 3 + l_{43} \cdot 0 + l_{44} \cdot 0 = 1 \quad \implies \quad l_{42} = \frac{7}{3}$$

$$l_{41} \cdot u_{13} + l_{42} \cdot u_{23} + l_{43} \cdot u_{33} + l_{44} \cdot u_{43} = a_{43}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 0 + \frac{7}{3} \cdot (-3) + l_{43} \cdot (-1) + l_{44} \cdot 0 = -4 \quad \implies \quad l_{43} = -3$$

$$l_{41} \cdot u_{14} + l_{42} \cdot u_{24} + l_{43} \cdot u_{34} + l_{44} \cdot u_{44} = a_{44}$$

$$\frac{3}{2} \cdot 9 + \frac{7}{3} \cdot (-\frac{5}{2}) + (-3) \cdot (-\frac{4}{3}) + 1 \cdot u_{44} = 12 \quad \implies \quad u_{44} = \frac{1}{3}$$

Damit lauten die Dreiecksmatrizen:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{14}{3} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Über die Zwischenlösung $\mathbf{Y}$ lässt sich der Lösungsvektor $\mathbf{X}$ berechnen:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{X}$$

$$\text{ergibt sich} \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & \frac{14}{3} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$l_{11} \cdot y_1 = r_1$$

$$1 \cdot y_1 = 25 \implies y_1 = 25$$

$$l_{21} \cdot y_1 + l_{22} \cdot y_2 = r_2$$

$$\frac{3}{2} \cdot 25 + 1 \cdot y_2 = 27 \implies y_2 = -\frac{21}{2}$$

$$l_{31} \cdot y_1 + l_{32} \cdot y_2 + l_{33} \cdot y_3 = r_3$$

$$2 \cdot 25 + \frac{14}{3} \cdot \left(-\frac{21}{2}\right) + 1 \cdot y_3 = -5 \implies y_3 = -6$$

$$l_{41} \cdot y_1 + l_{42} \cdot y_2 + l_{43} \cdot y_3 + l_{44} \cdot y_4 = r_4$$

$$\frac{3}{2} \cdot 25 + \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{21}{2}\right) - 3 \cdot (-6) + 1 \cdot y_4 = 32 \implies y_4 = 1$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 25 \\ -\frac{21}{2} \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & -3 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ -\frac{21}{2} \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_{44} \cdot x_4 = y_4$$

$$\frac{1}{3} \cdot x_4 = 1 \quad \Rightarrow x_4 = 3$$

$$u_{33} \cdot x_3 + u_{34} \cdot x_4 = y_3$$

$$-1 \cdot x_3 + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot 3 = -6 \quad \Rightarrow x_3 = 2$$

$$u_{22} \cdot x_2 + u_{23} \cdot x_3 + u_{24} \cdot x_4 = y_2$$

$$3 \cdot x_2 + (-3) \cdot 2 + \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot 3 = -\frac{21}{2} \quad \Rightarrow x_2 = 1$$

$$u_{11} \cdot x_1 + u_{12} \cdot x_2 + u_{13} \cdot x_3 + u_{14} \cdot x_4 = y_1$$

$$2 \cdot x_1 + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 25 \quad \Rightarrow x_1 = 1$$

Damit hat man die gleiche Lösung erhalten wie bei den anderen Verfahren:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(e) CHOLESKY-Verfahren

Ausgangsgleichungen:

$$2x - 4y + 9w = 25$$

$$3x - 3y - 3z + 11w = 27$$

$$4x + 6y - 15z + 5w = -5$$

$$3x + y - 4z + 12w = 32$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 9 \\ 3 & -3 & -3 & 11 \\ 4 & 6 & -15 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & 12 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 25 \\ 27 \\ -5 \\ 32 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$. Dies ist hier nicht gegeben.

Damit ist das CHOLESKY-Verfahrens nicht anwendbar.

- zu Aufgabe 6 (s. S.17)

(a) GAUSSsches Eliminationsverfahren

Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right|$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} | -2 \cdot 1. \text{Zeile} \\ | 2 \cdot 1. \text{Zeile} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -4 & -11 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \end{array} \right|$$

$$3.\text{Zeile:} \quad 3 \cdot y = 9; \implies y = 3$$

$$2.\text{Zeile:} \quad -1 \cdot y - 4 \cdot z = -11; \implies z = 2$$

$$1.\text{Zeile:} \quad x + y + z = 6; \implies x = 1$$

Probe

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 1$$

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 6$$

$$-2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -3$$

(b) CRAMERSche Regel

Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{D_{xi}}{D}$$

$$D = \det A = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 2 - 2 - 4 - 2 + 2 = -12$$

$$D = -12$$

$$D_x = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 3 - 12 - 6 - 1 + 12 = -12$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-12}{-12} = 1;$$

$$D_y = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -24 - 2 + 6 - 24 + 6 + 2 = -36$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-36}{-12} = 3$$

$$D_z = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 12 + 1 + 2 - 12 + 3 = -24$$

$$z = \frac{D_z}{D} = \frac{-24}{-12} = 2$$

(c) Verwendung der Inversen $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{X}$

Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$D = \det \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -12;$$

$$U_{11} = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -3$$

$$U_{12} = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) = 0$$

$$U_{13} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 3$$

$$U_{21} = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) = 0$$

$$U_{22} = 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$U_{23} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 4$$

$$U_{31} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 3$$

$$U_{32} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 4$$

$$U_{33} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1$$

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{R} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} -3 + 0 - 9 \\ 0 - 48 + 12 \\ 3 - 24 - 3 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix};$$

Daraus folgt die Lösung des Gleichungssystems:

$$x = 1; \quad y = 3; \quad z = 2.$$

(d) LU-Zerlegung

Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

Grundgedanke der LU-Zerlegung ist die Bildung der beiden Dreiecksmatrizen $\mathbf{L}$ (Lower) und $\mathbf{U}$ (Upper).

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A}$$

Dabei wird aus Gründen der Eindeutigkeit und der Vereinfachung die Elemente der Hauptdiagonale der unteren Dreiecksmatrix $\mathbf{L}$ zu Eins gesetzt.

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes $\mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$ und anschließendem Elementevergleich mit der $\mathbf{A}$ -Matrix erhält man folgende Gleichungen.

$$1 \cdot u_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{11} = 2 \Rightarrow u_{11} = 2$$

$$1 \cdot u_{12} + 0 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 = a_{12} = 1 \Rightarrow u_{12} = 1$$

$$1 \cdot u_{13} + 0 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} = a_{13} = -2 \Rightarrow u_{13} = -2$$

$$l_{21} \cdot u_{11} + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{21} = 1 \Rightarrow l_{21} = \frac{1}{2}$$

$$l_{21} \cdot u_{12} + 1 \cdot u_{22} + 0 \cdot 0 = a_{22} = 1 \Rightarrow u_{22} = \frac{1}{2}$$

$$l_{21} \cdot u_{13} + 1 \cdot u_{23} + 0 \cdot u_{33} = a_{23} = 1 \Rightarrow u_{23} = 2$$

$$l_{31} \cdot u_{11} + l_{32} \cdot 0 + 1 \cdot 0 = a_{31} = -2 \Rightarrow l_{31} = -1$$

$$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} + 1 \cdot 0 = a_{32} = 1 \Rightarrow l_{32} = 4$$

$$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} = a_{33} = 1 \Rightarrow u_{33} = -12$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Über die Zwischenlösung $\mathbf{Y}$ lässt sich der Lösungsvektor $\mathbf{X}$ berechnen:
Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{U}$$

$$\mathbf{L} \cdot \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{X}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{L}$ und $\mathbf{Y}$ und dem Elementevergleich mit der

rechten Seite $\mathbf{R}$ erhält man:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 6$$

$$-1 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 = -3$$

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = \frac{11}{2}$$

$$y_3 = -24$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{X}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{Y}$ erhält man:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{11}{2} \\ -24 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot x + 1 \cdot y - 2 \cdot z = 1$$

$$0 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot y + 2 \cdot z = \frac{11}{2}$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y - 12 \cdot z = -24$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(e) CHOLESKY-Verfahren

Ausgangsgleichungen:

$$2x + y - 2z = 1$$

$$x + y + z = 6$$

$$-2x + y - 2z = -3$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Die Voraussetzung für die Anwendung des CHOLESKY-Verfahrens ist eine symmetrische Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{A};$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T &= \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix};\end{aligned}$$

Nach Ausmultiplizieren des Matrizenproduktes $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T$ und anschließendem Elementvergleich mit der $\mathbf{A}$ -Matrix erhält man folgende Gleichungen.

$$b_{11} \cdot b_{11} + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = a_{11} = 2 \Rightarrow b_{11} = \sqrt{2}$$

$$b_{11} \cdot b_{21} + 0 \cdot b_{22} + 0 \cdot 0 = a_{12} = 1 \Rightarrow b_{21} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b_{11} \cdot b_{31} + 0 \cdot b_{32} + 0 \cdot b_{33} = a_{13} = -2 \Rightarrow b_{31} = -\sqrt{2} = \frac{-2}{\sqrt{2}}$$

$$b_{21}^2 + b_{22}^2 + 0 \cdot 0 = a_{22} = 1 \Rightarrow b_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b_{21} \cdot b_{31} + b_{22} \cdot b_{32} + 0 \cdot b_{33} = a_{23} = 1 \Rightarrow b_{32} = 2\sqrt{2};$$

$$b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 = a_{33} = -2 \Rightarrow b_{33} = 2\sqrt{-3} = \sqrt{-12}$$

Damit lauten die beiden Dreiecksmatrizen:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{-3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{-3} \end{bmatrix}$$

Über die Zwischenlösung $\mathbf{Y}$ lässt sich der Lösungsvektor $\mathbf{X}$ berechnen:
Allgemein gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T$$

$$\mathbf{B} \cdot \underbrace{\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{X}}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{R}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{Y}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{R}$ erhält man:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{-3} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{2} \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 = 6$$

$$-\sqrt{2} \cdot y_1 + 2\sqrt{2} \cdot y_2 + 2\sqrt{-3} \cdot y_3 = -3$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_2 = \frac{11}{\sqrt{2}}$$

$$y_3 = -\frac{12}{\sqrt{-3}}$$

Laut Definition gilt:

$$\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

Nach der Multiplikation der Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{X}$ und dem Elementevergleich mit der rechten Seite $\mathbf{Y}$ erhält man:

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{-3} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{11}{\sqrt{2}} \\ -\frac{12}{\sqrt{-3}} \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{2} \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y - \sqrt{2} \cdot z = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$0 \cdot x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot y + 2\sqrt{2} \cdot z = \frac{11}{\sqrt{2}};$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 2\sqrt{-3} \cdot z = -\frac{12}{\sqrt{-3}};$$

Daraus folgt die Lösung:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1.4 Vektoralgebra und Analysis

1.4.1 Aufgaben

1. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind durch ihre Koordinaten gegeben:

$$a_x = 5 \quad b_x = 3 \quad c_x = -6$$

$$a_y = 7 \quad b_y = -4 \quad c_y = -9$$

$$a_z = 8 \quad b_z = 6 \quad c_z = -5$$

Bestimmen Sie die Länge des Vektors $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (Lösung s. S. 77).

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ und $\vec{b} = 3\vec{i} - w\vec{j} + 2\vec{k}$. Berechnen Sie w so, dass die Vektoren senkrecht zueinander stehen (Lösung s. S. 79).

3. Berechnen Sie für $\varphi = xy + yz + zx$ und $\vec{A} = x^2y\vec{i} + y^2z\vec{j} + z^2x\vec{k}$: (Lösung s.S.80)

(a) $\vec{A} \cdot \nabla \varphi$

(b) $\varphi \nabla \cdot \vec{A}$ und

(c) $(\nabla \varphi) \times \vec{A}$

4. Ein Partikel bewegt sich entlang einer Raumkurve mit den Koordinaten $x = t^3 + 2t$, $y = -3e^{-2t}$, $z = 2 \sin 5t$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Partikels für eine beliebige Zeit t . Geben Sie ihren Betrag sowie auch den zurückgelegten Abstand für $t = 0$ und $t = 1$ an. (Lösung s.S.82)
5. Gegeben ist das skalare Potentialfeld in einem Filter $h = xy + yz + xz$. (Lösung s. S. 84)

(a) Bestimmen Sie die Filtergeschwindigkeit (Vektor und Betrag)

(b) Gibt es Quellen- und Senkenaktivität im Filter?

(c) Ist die Strömung im Filter wirbelfrei?

Gegeben sind $k = 10^{-4} \text{ms}^{-1}$ und $\text{grad}(-k) = 0$.

6. Eine Schadstofffahne hat sich im Untergrund ausgebreitet. Die Verteilung des Schadstoffes entspricht im Wertebereich $x ::= 0$ bis 10 und $y ::= 0$ bis 10 folgender geometrischen Figur: (Lösung s. S. 87)

$$C(x, y) = 50 - ((x - 5)^2 + (y - 5)^2)$$

- (a) Skizzieren Sie die Äquipotentiallinien für die Konzentrationswerte im Bereich von $C(x, y) = 0mg$ bis $50mg$ mit einer Schrittweite $\Delta C(x, y) = 10$.
 - (b) Berechnen Sie den Gradienten am Punkt $P(3, 4)$ und bestimmen Sie den Betrag und den Richtungswinkel.
7. Eine Schadstofffahne hat sich im Untergrund ausgebreitet. Die Verteilung des Schadstoffes entspricht im Wertebereich $x ::= 0$ bis 10 und $y ::= 0$ bis 10 folgender geometrischen Figur: (Lösung s. S. 89)

$$C(x, y) = 125 - ((2x - 10)^2 + (y - 5)^2)$$

- (a) Skizzieren Sie die Äquipotentiallinien für die Konzentrationswerte im Bereich von $C(x, y) = 0mg$ bis $125mg$ mit einer Schrittweite $\Delta C(x, y) = 25$.
 - (b) Berechnen Sie den Gradienten am Punkt $P(5, 10)$ und bestimmen Sie den Betrag und den Richtungswinkel.
8. Der Grundwasserstand eines einseitig durch eine Barriere begrenzten Grundwasserleiters und eines Brunnens soll durch folgende geometrische Figur beschrieben werden: (Lösung s. S. 91)

$$z_R = \frac{1}{2} \frac{(y - 10)^2}{x}$$

- (a) Skizzieren Sie die Hydroisohypsen im Bereich von $z_R = 1m$ bis $z_R = 5m$ mit einer Schrittweite $\Delta z_R = 1m$ für die Koordinaten $0 \leq x \leq 10$
 - (b) Berechnen Sie die Filtergeschwindigkeit mit $k = 0,0001ms^{-1}$ am Punkt $P(5, 5)$; bestimmen Sie den Betrag und den Richtungswinkel α .
 - (c) Ist dieses Feld quell- und senkenfrei?
9. Der Grundwasserstand einer Grabenanströmung im Grundwasserleiters soll durch folgende geometrische Figur beschrieben werden.

$$z_R = y + 3x$$

- (a) Skizzieren Sie die Hydroisohypsen im Bereich von $z_R = 1m$ bis $5m$ mit einer Schrittweite $\Delta z_R = 1m$.
- (b) Berechnen Sie die Filtergeschwindigkeit mit $k = 0,0001ms^{-1}$ am Punkt $P(5, 5)$; bestimmen Sie den Betrag und den Richtungswinkel
- (c) Ist dieses Feld quell- und senkenfrei?

1.4.2 Lösungen

- zu Aufgabe 1 (s. S. 75)

Es sind zwei Schreibweisen möglich:

Koordinatenschreibweise:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= (a_x + b_x + c_x) \vec{i} + (a_y + b_y + c_y) \vec{j} + (a_z + b_z + c_z) \vec{k} \\
 &= (5 + 3 - 6) \vec{i} + (7 - 4 - 9) \vec{j} + (8 + 6 - 5) \vec{k} \\
 \vec{d} &= 2 \vec{i} - 6 \vec{j} + 9 \vec{k}
 \end{aligned}$$

Matrizenschreibweise:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \vec{i} + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} \vec{j} + \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ -5 \end{bmatrix} \vec{k} \\
 &= \begin{bmatrix} 5 + 3 - 6 & 7 - 4 - 9 & 8 + 6 - 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \\
 \vec{d} &= \begin{bmatrix} 2 & -6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \\
 \vec{d} &= 2 \vec{i} - 6 \vec{j} + 9 \vec{k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \vec{d} \right| &= \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 9^2} \\ &= \sqrt{121} \end{aligned}$$

$$\left| \vec{d} \right| = 11$$

- zu Aufgabe 2 (s. S. 75)

Wenn zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen, ist ihr Skalarprodukt gleich Null.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{wenn } (\vec{a} \perp \vec{b})$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren errechnet sich aus:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{!}{=} a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \stackrel{!}{=} 0$$

Da das Skalarprodukt eine skalare Größe ist, wird aus der Vektorgleichung eine skalare Größengleichung.

Mit den beiden Vektoren erhält man:

$$\vec{a} = 2 \vec{i} - 3 \vec{j} + 5 \vec{k}$$

$$\vec{b} = 3 \vec{i} - w \vec{j} + 2 \vec{k}$$

$$2 \cdot 3 + (-3 \cdot -w) + 5 \cdot 2 = 0$$

$$6 + 3w + 10 = 0$$

$$w = -\frac{16}{3}$$

Damit erhält der Vektor $\vec{b}$ folgende Gestalt

$$\vec{b} = 3 \vec{i} + \frac{16}{3} \vec{j} + 2 \vec{k}$$

• zu Aufgabe 3 (s. S. 75)

(a)

Berechnung des Skalarprodukts der Vektoren $\vec{A}$ und $\nabla\varphi$:

$$\begin{aligned}\nabla\varphi &= \frac{\partial(xy + yz + zx)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(xy + yz + zx)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(xy + yz + zx)}{\partial z} \vec{k} \\ &= (y + z) \vec{i} + (x + z) \vec{j} + (x + y) \vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{A} \cdot \nabla\varphi = (x^2y) \cdot (y + z) + (y^2z) \cdot (x + z) + (z^2x) \cdot (x + y)$$

(b)

Berechnung des Produkts der Skalarfelder $\nabla\vec{A}$ und φ Dazu wird zuerst der Gradient $\nabla\vec{A} = \text{div}\vec{A}$ gebildet:

$$\nabla\vec{A} = \frac{\partial(x^2y)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2z)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2x)}{\partial z}$$

$$\nabla\vec{A} = 2xy + 2yz + 2zx$$

und dann die skalare Multiplikation ausgeführt:

$$\varphi \cdot \nabla\vec{A} = (xy + yz + zx) \cdot (2xy + 2yz + 2zx)$$

$$\varphi \cdot \nabla\vec{A} = 2 \cdot (x^2y^2 + 2xy^2z + x^2z + y^2z^2 + 2xyz^2 + x^2yz + x^2z^2)$$

(c)

Berechnung des Kreuzproduktes der Vektoren $\nabla\varphi$ und $\vec{A}$:

Das Kreuzprodukt ist definiert zu:

$$\nabla\varphi \times \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y + z & x + z & y + x \\ x^2y & y^2z & z^2x \end{bmatrix}$$

Nach den Regeln der Determinantenberechnung wird eine dreireihige Determinante

zerlegt in die Summe der Elemente der ersten Zeile, multipliziert mit den dazugehörigen Unterdeterminanten.

$$\nabla\varphi \times \vec{A} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (x+z)(z^2x) - (y+x)(y^2z) \\ -((y+z)(z^2x) - (y+x)(x^2y)) \\ (y+z)(y^2z) - (x+z)(x^2y) \end{bmatrix}$$

• zu Aufgabe 4 (s. S. 75)

Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist die Ortsänderung pro Zeiteinheit:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left((t^3 + 2t) \vec{i} - 3e^{-2t} \vec{j} + 2 \sin(5t) \vec{k} \right) \\ \vec{v} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\begin{bmatrix} t^3 + 2t & -3e^{-2t} & 2 \sin(5t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \right) \\ \vec{v} &= \begin{bmatrix} 3t^2 + 2 & 6e^{-2t} & 10 \cos(5t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Betrag der Geschwindigkeit zu:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(3t^2 + 2)^2 + (6e^{-2t})^2 + (10 \cos(5t))^2}$$

Die Beschleunigung $\vec{a}$ ist die Änderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left((3t^2 + 2) \vec{i} + 6e^{-2t} \vec{j} + 10 \cos(5t) \vec{k} \right) \\ \vec{a} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\begin{bmatrix} 3t^2 + 2 & 6e^{-2t} & 10 \cos(5t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \right) \\ \vec{a} &= \begin{bmatrix} 6t & -12e^{-2t} & -50 \sin(5t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich der Betrag der Beschleunigung zu:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(6t)^2 + (-12e^{-2t})^2 + (-50 \sin(5t))^2}$$

Für die Punkte $t = 0$ und $t = 1$ ergeben sich folgende Werte:

t	$\vec{v}$	$ \vec{v} $	$\vec{a}$	$ \vec{a} $
0	$2\vec{i} + 6\vec{j} + 10\vec{k}$	11,8322	$-12\vec{j}$	12
1	$5\vec{i} + 0,812\vec{j} + 2,837\vec{k}$	5,80567	$6\vec{i} - 1,624\vec{j} + 47,95\vec{k}$	48,35

Der zurückgelegte Weg s ergibt sich aus dem Integral der Geschwindigkeit über den entsprechenden Zeitraum

$$\begin{aligned}
 s &= \int_{t=0}^1 |\vec{v}| dt \\
 s &= \int_{t=0}^1 \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} dt \\
 s &= \int_{t=0}^1 \sqrt{(3t^2 + 2)^2 + (6e^{-2t})^2 + (10 \cos(5t))^2} dt
 \end{aligned}$$

- zu Aufgabe 5 (s. S. 75)

(a)

Laut Aufgabenstellung ist:

$$h = xy + yz + xz$$

und

$$\text{grad}(-k) = 0$$

$$\vec{v} = \text{grad}(-k \cdot h)$$

$$= \nabla (-k \cdot h)$$

$$= \nabla (-k) \cdot h - k \cdot (\nabla h)$$

Da gilt:

$$\nabla k = 0$$

folgt:

$$\vec{v} = -k \cdot (\nabla h)$$

$$\vec{v} = -k \cdot \nabla (xy + yz + xz)$$

Mit

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

erhält man:

$$\begin{aligned}\nabla h &= \frac{\partial(xy + yz + xz)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(xy + yz + xz)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(xy + yz + xz)}{\partial z} \vec{k} \\ \vec{v} &= -k \cdot \begin{bmatrix} y+z & x+z & y+x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \\ |\vec{v}| &= k \cdot \sqrt{(y+z)^2 + (x+y)^2 + (y+x)^2}\end{aligned}$$

(b)

Ein skalarfeld besitzt dann keine Quellen und Senken, wenn die Divergenz gleich Null ist. Die Bilanzgleichung am repräsentativen Einheitsvolumen sagt in diesem Fall aus, dass die Summe der Volumenströme hinein- und herausfließend gleich groß ist.

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} &= \nabla \cdot \vec{v} \stackrel{?}{=} 0 \\ \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial(y+z)}{\partial x} + \frac{\partial(x+z)}{\partial y} + \frac{\partial(y+x)}{\partial z} = 0\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass das Feld keine Quellen und Senken besitzt.

(c)

Ein Vektorfeld besitzt dann keine Wirbel, wenn die Rotation gleich null ist.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{v} &= \nabla \times \vec{v} \stackrel{?}{=} \vec{0} \\ \operatorname{rot} \vec{v} &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x+z & y+x \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(y+x) - \frac{\partial}{\partial z}(x+z) \\ -\left(\frac{\partial}{\partial x}(y+x) - \frac{\partial}{\partial z}(y+z)\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x+z) - \frac{\partial}{\partial y}(y+z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \vec{0} \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass das vorgegebene Potentialfeld auch keine Wirbel besitzt.

• zu Aufgabe 6 (s. S. 75)

(a)

Zur Aufstellung des Hydroisohypsenplanes wird die Ausgangsfunktion als Funktion von $y = f(x)$ dargestellt. Die Konzentration $C(x, y)$ ist dabei als Parameter zu behandeln

(siehe Abbildung 1.1).

$$C(x, y) = 50 - ((x - 5)^2 + (y - 5)^2)$$

$$y = \sqrt{50 - C - (x - 5)^2} + 5$$

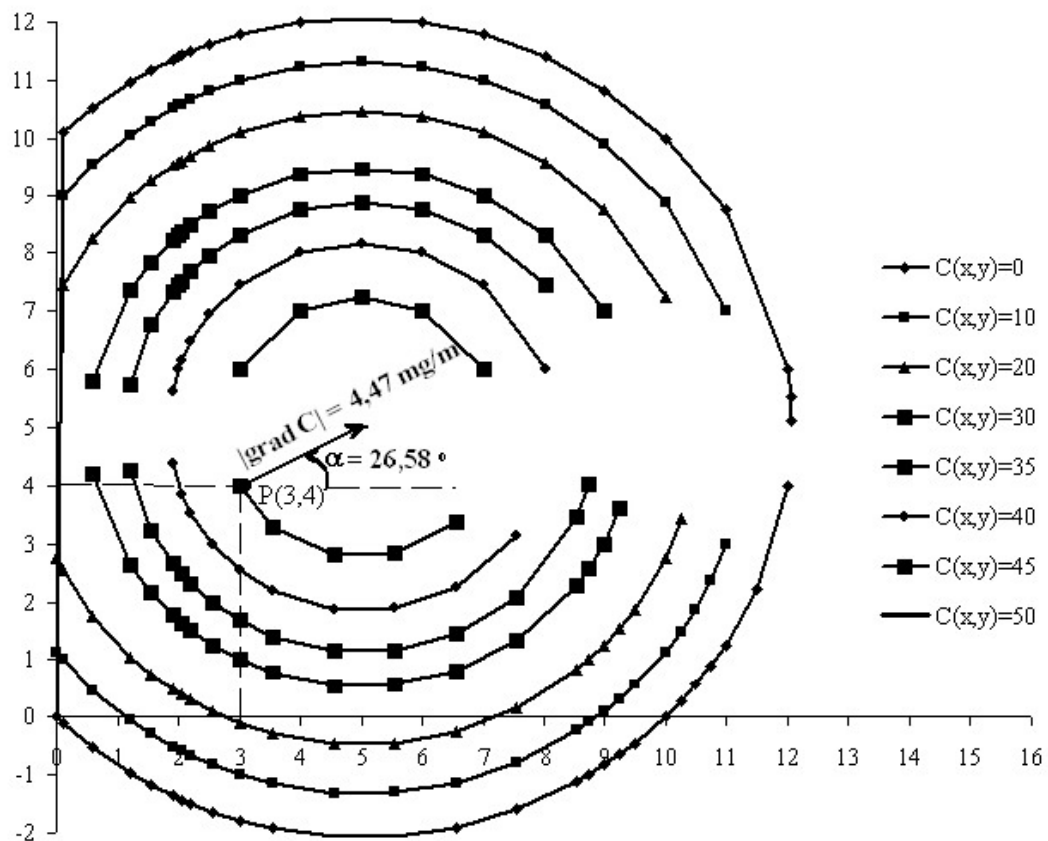


Abbildung 1.1: Darstellung der Konzentrationsverteilung als Äquipotentiallinien

(b)

Mit

$$\text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}\nabla C(x, y) &= \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial C(x, y)}{\partial z} \vec{k} \\ &= \frac{\partial (50 - ((x - 5)^2 + (y - 5)^2))}{\partial x} \vec{i} \\ &\quad + \frac{\partial (50 - ((x - 5)^2 + (y - 5)^2))}{\partial y} \vec{j} \\ &\quad + \frac{\partial (50 - ((x - 5)^2 + (y - 5)^2))}{\partial z} \vec{k} \\ \nabla C(x, y) &= -2(x - 5) \vec{i} - 2(y - 5) \vec{j}\end{aligned}$$

Für den Punkt $P(3, 4)$ ergibt sich ein Konzentrationsgradient von:

$$\begin{aligned}\nabla C(3, 4) &= -2(3 - 5) \vec{i} - 2(4 - 5) \vec{j} \\ \nabla C(3, 4) &= 4 \vec{i} + 2 \vec{j}\end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Werte für den Betrag und den Richtungswinkel (siehe auch Abbildung 1.1):

$$\begin{aligned}|\nabla C(3, 4)| &= \left| 4 \vec{i} + 2 \vec{j} \right| \\ &= \sqrt{16 + 4}\end{aligned}$$

$$|\nabla C(3, 4)| = 4,47$$

$$\alpha = \arctan \frac{2}{4} = \arctan \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 0,46364 \triangleq 26,58^\circ$$

- zu Aufgabe 7 (s. S. 75)

(a)

Zur Aufstellung des Hydroisohypsenplanes wird die Ausgangsfunktion als Funktion von $y = f(x)$ dargestellt. Die Konzentration $C(x, y)$ ist dabei als Parameter zu behandeln (siehe Abbildung 1.2).

$$C(x, y) = 125 - ((2x - 10)^2 + (y - 5)^2)$$

$$y = \sqrt{125 - C - (2x - 10)^2} + 5$$

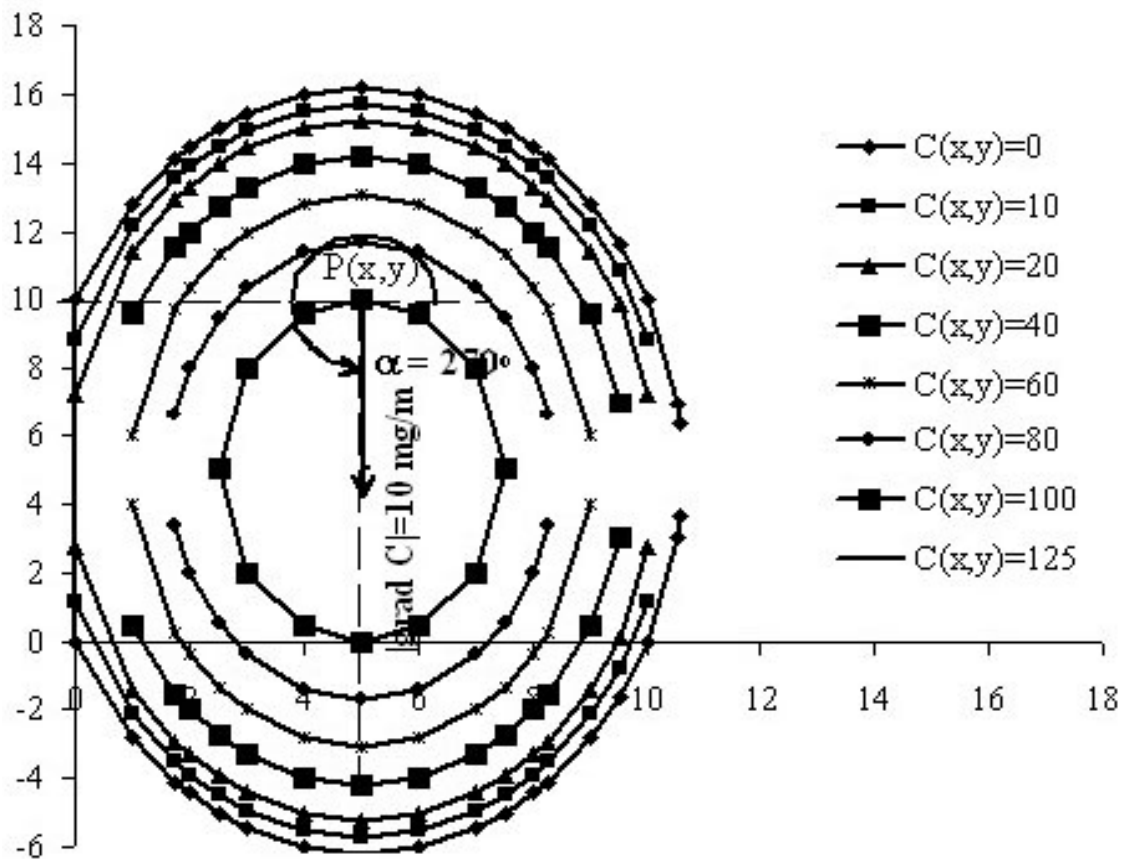


Abbildung 1.2: Darstellung der Äquipotentiallinien der Konzentrationsverteilung

(b)

Mit

$$\text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}\nabla C(x, y) &= \frac{\partial C(x, y)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial C(x, y)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial C(x, y)}{\partial z} \vec{k} \\&= \frac{\partial (125 - ((2x - 10)^2 + (y - 5)^2))}{\partial x} \vec{i} \\&\quad + \frac{\partial (125 - ((2x - 10)^2 + (y - 5)^2))}{\partial y} \vec{j} \\&\quad + \frac{\partial (125 - ((2x - 10)^2 + (y - 5)^2))}{\partial z} \vec{k} \\ \nabla C(x, y) &= -4(2x - 10) \vec{i} - 2(y - 5) \vec{j}\end{aligned}$$

Für den Punkt $P(5, 10)$ ergibt sich ein Konzentrationsgradient von:

$$\begin{aligned}\nabla C(5, 10) &= -4(2 \cdot 5 - 10) \vec{i} - 2(10 - 5) \vec{j} \\ \nabla C(5, 10) &= -10 \vec{j}\end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Werte für den Betrag und den Richtungswinkel (siehe Abbildung 1.2):

$$\begin{aligned}|\nabla C(x, y)| &= \left| -10 \vec{j} \right| \\ |\nabla C(x, y)| &= 10 \frac{mg}{m} \\ \alpha &= \arctan \frac{\nabla C(x, y)_y}{\nabla C(x, y)_x} = \arctan \frac{-10}{0} \\ \alpha &= -\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi \triangleq 270^\circ\end{aligned}$$

- zu Aufgabe 8 (s. S. 75)

(a)

Zur Aufstellung des Hydroisohypsenplanes wird die Ausgangsfunktion als Funktion von $y = f(x)$ dargestellt. Die Wasserhöhe $z_R(x, y)$ ist dabei als Parameter zu behandeln (siehe Abbildung 1.3).

$$z_R = \frac{1}{2} \frac{(y - 10)^2}{x}$$

$$y = \sqrt{2 \cdot x \cdot z_R} + 10$$

Wertetabelle für Abbildung 1.3:

x	$z_R=1$	$z_R=2$	$z_R=3$	$z_R=4$	$z_R=5$
10	14,47	16,32	17,75	18,94	20,00
5	13,16	14,47	15,48	16,32	17,07
0	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00
5	6,84	5,53	4,52	3,68	2,93
10	5,53	3,68	2,25	1,06	0,00

(b)

Die Filtergeschwindigkeit berechnet sich nach dem DARCY-Gesetz zu:

$$\vec{v} = -k \cdot \text{grad}(z_R)$$

Laut Aufgabenstellung ist:

$$z_R = \frac{1}{2} \frac{(y - 10)^2}{x}$$

Mit

$$\text{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

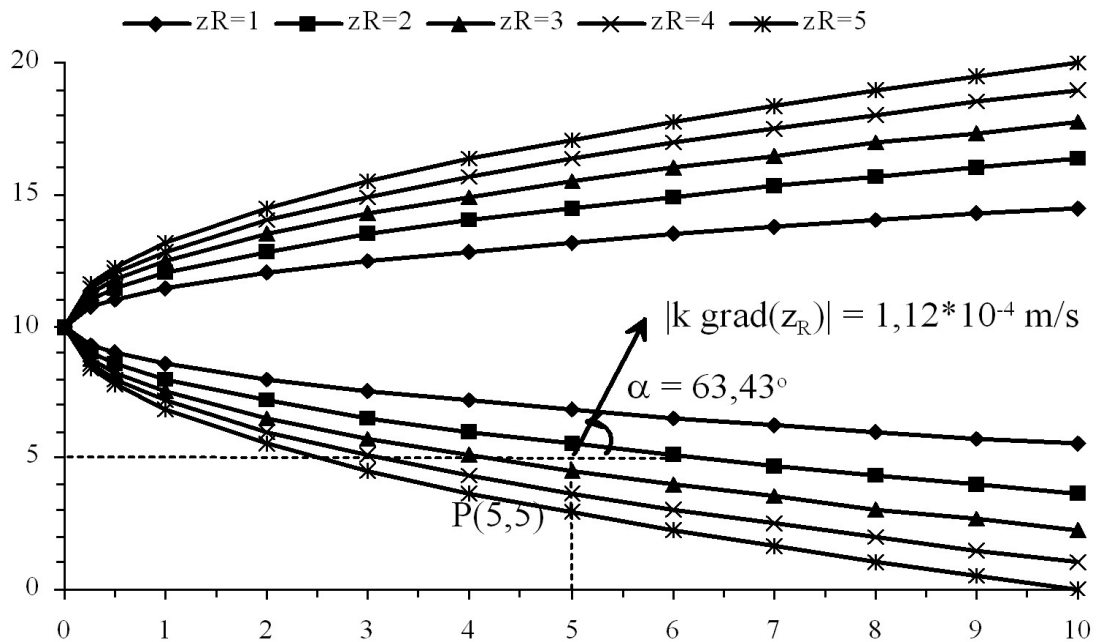


Abbildung 1.3: Darstellung der Hydroisohypsen

ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= -k \cdot \left(\frac{\partial z_R}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z_R}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial z_R}{\partial z} \vec{k} \right) \\ \vec{v} &= -k \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{(y-10)^2}{x^2} \vec{i} + \frac{(y-10)}{x} \vec{j} \right)\end{aligned}$$

Für den angegebenen Punkt $P(5,5)$ ergibt sich die Filtgergeschwindigkeit zu:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{P(5,5)} &= -k \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{(5-10)^2}{5^2} \vec{i} + \frac{(5-10)}{5} \vec{j} \right) \\ \vec{v}_{P(5,5)} &= -k \cdot \left(-\frac{1}{2} \vec{i} + 1 \vec{j} \right)\end{aligned}$$

Der Geschwindigkeitsvektor liegt im 1. Quadrant (siehe Abbildung 1.3). Der Betrag

der Filtergeschwindigkeit beträgt:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{P(5,5)} &= -k \cdot \left(-\frac{1}{2} \vec{i} - 1 \vec{j} \right) \\ &= 0,0001 \frac{m}{s} \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{2} \right)^2 + (-1)^2} \\ |\vec{v}_{P(5,5)}| &= 0,0001 \frac{m}{s} \cdot 1,12 = 0,000112 \frac{m}{s}\end{aligned}$$

Der Betrag des Richtungsvektor $\vec{\alpha}$ beträgt:

$$\begin{aligned}|\vec{\alpha}| &= \arctan \frac{v_y}{v_x} = \arctan \frac{-1}{-\frac{1}{2}} \\ &= \arctan(2) \\ |\vec{\alpha}| &= 1,107 \triangleq 63,43^\circ\end{aligned}$$

(c)

Die Quell- / Senkenfreiheit wird an Hand der Divergenz geprüft.

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} (-k \cdot \operatorname{grad}(z_R)) = \nabla \cdot (-k \cdot \nabla z_R) \stackrel{?}{=} 0$$

Entsprechend der Lösung zu Aufgabe 9b ist:

$$\nabla z_R = \left(-\frac{1}{2} \frac{(y-10)^2}{x^2} \vec{i} + \frac{(y-10)}{x} \vec{j} \right)$$

Da hier laut Aufgabenstellung nur geprüft werden soll, ob Divergenz vorliegt oder

nicht, kann formal durch k dividiert werden ($k = \text{const.}$) und damit ergibt sich:

$$\nabla \cdot (-k \cdot \nabla z_R) \stackrel{?}{=} 0$$

$$-k \cdot \nabla \cdot \nabla z_R \stackrel{?}{=} 0$$

$$\nabla \cdot \nabla z_R \stackrel{?}{=} 0$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad}(z_R)) &= \nabla \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{(y-10)^2}{x^2} \vec{i} + \frac{(y-10)}{x} \vec{j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{2} \frac{(y-10)^2}{x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{(y-10)}{x} \right) \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(z_R)) = \frac{(y-10)^2}{x^3} + \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \Rightarrow \infty} \left(\frac{(y-10)^2}{x^3} + \frac{1}{x} \right) = 0$$

Da dieser Ausdruck nur für $x \Rightarrow \infty$ verschwindet, besitzt das Feld Quell- bzw. Senkenaktivitäten.

1.5 Interpolationsverfahren

1.5.1 Aufgaben

1. Für die Funktion der Normalverteilung $y(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, die auszugsweise tabelliert ist:

x	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
y	0,2420	0,1942	0,1497	0,1109	0,0790	0,0540

wird der Wert $y(x)$ für $x = 1,5$ gesucht.
(Lösung s.S. 96)

2. Interpolieren Sie die Funktion $y=\sqrt{x}$ für die Werte $x = 1,03$ und $x = 1,26$ an Hand der Tabelle.

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30
y = $\sqrt{x}$	1,00000	1,02470	1,04881	1,07238	1,09544	1,11803	1,14017

(Lösung s.S. 107)

3. Durch die drei Stützpunkte $(1, -2)$; $(2, 3)$; $(3, 1)$ ist eine ganze rationale Funktion möglichst niedrigen Grades zu legen.
Wie ändert sich diese Interpolationsfunktion, wenn man auch noch den Stützpunkt $(4, 4)$ dazunimmt?
(Lösung s.S. 119)

Interpolieren Sie oben stehende Aufgaben mittels der Verfahren:

- (a) analytische Potenzfunktion
- (b) LAGRANGESche Interpolationsformel
- (c) NEWTONSche Interpolationsformel
- (d) Spline-Funktion

1.5.2 Lösungen

- zu Aufgabe 1 (s. S. 95)

(a) analytische Potenzfunktion

Der Wert $y_{1,50}$ liegt zwischen $x = 1,4$ und $x = 1,6$

x	1,40	1,60	1,80
y	0,1497	0,1109	0,0790

$$P(1,4) \approx y(1,4) = 0,1497 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,4 + a_2 \cdot 1,4^2$$

$$P(1,6) \approx y(1,6) = 0,1109 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,6 + a_2 \cdot 1,6^2$$

$$P(1,8) \approx y(1,8) = 0,0790 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,8 + a_2 \cdot 1,8^2$$

$$X \cdot A = R$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1,4 & 1,96 \\ 1 & 1,6 & 2,56 \\ 1 & 1,8 & 3,24 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} 0,1497 \\ 0,1109 \\ 0,0790 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det X = D &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1,6 & 2,56 \\ 1,8 & 3,24 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1,4 & 1,96 \\ 1,8 & 3,24 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1,4 & 1,96 \\ 1,6 & 2,56 \end{vmatrix} \\ &= 0,576 - 1,008 + 0,448 \\ &= 0,016 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det A_0 = D_0 &= \begin{vmatrix} 0,1497 & 1,4 & 1,96 \\ 0,1109 & 1,6 & 2,56 \\ 0,0790 & 1,8 & 3,24 \end{vmatrix} \\ &= 0,1497 \cdot 1,6 \cdot 3,24 + 1,4 \cdot 2,56 \cdot 0,079 + +0,1109 \cdot 1,8 \cdot 1,96 \\ &\quad - 0,079 \cdot 1,6 \cdot 1,96 - 1,8 \cdot 2,56 \cdot 0,1497 - 1,4 \cdot 0,1109 \cdot 3,24 \\ &= 0,009832\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det A_1 = D_1 &= \begin{vmatrix} 1 & 0,1497 & 1,96 \\ 1 & 0,1109 & 2,56 \\ 1 & 0,0790 & 3,24 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0,1109 & 2,56 \\ 0,0790 & 3,24 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0,1497 & 1,96 \\ 0,0790 & 3,24 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0,1497 & 1,96 \\ 0,1109 & 2,56 \end{vmatrix} \\ &= 0,157076 - 0,330188 + 0,165868 \\ &= -0,007244\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det A_2 = D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1,4 & 0,1497 \\ 1 & 1,6 & 0,1109 \\ 1 & 1,8 & 0,0790 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1,6 & 0,1109 \\ 1,8 & 0,0790 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1,4 & 0,1497 \\ 1,8 & 0,0790 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1,4 & 0,1497 \\ 1,6 & 0,1109 \end{vmatrix} \\ &= -0,07322 + 0,15886 - 0,08426 \\ &= 0,00138\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{D_0}{D} = \frac{0,009832}{0,016} = 0,6145 \\ a_1 &= \frac{D_1}{D} = -\frac{0,007244}{0,016} = -0,45275 \\ a_2 &= \frac{D_2}{D} = \frac{0,00138}{0,016} = 0,08625\end{aligned}$$

$$P(x) = 0,6145 - 0,45275 \cdot x + 0,08625 \cdot x^2$$

$$\begin{aligned}P(1,50) &= 0,6145 - 0,45275 \cdot 1,5 + 0,08625 \cdot 1,5^2 \\ &= \mathbf{0,1294375}\end{aligned}$$

Probe:

$$y(1,5) = \frac{e^{-1,5^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \mathbf{0,1295175}$$

(b) LAGRANGESche Interpolationsformel**Lineare Interpolation**

$$P(x) = \frac{1}{2} \cdot (y_0 + y_1);$$

$x_0 = 1,4$	$x_1 = 1,6$
$y_0 = 0,1497$	$y_1 = 0,1109$

$$P(1,5) = \frac{1}{2} \cdot (0,1497 + 0,1109) = \mathbf{0,1303};$$

Quadratische Interpolation

$$P(x) = \frac{3}{8} \cdot y_0 + \frac{3}{4} \cdot y_1 - \frac{1}{8} \cdot y_2;$$

$x_0 = 1,40$	$x_1 = 1,60$	$x_2 = 1,80$
$y_0 = 0,1497$	$y_1 = 0,1109$	$y_2 = 0,0790$

$$P(1,5) = \frac{3}{8} \cdot 0,1497 + \frac{3}{4} \cdot 0,1109 - \frac{1}{8} \cdot 0,079 = \mathbf{0,1294375};$$

Kubische Interpolation

$$P(x) = -\frac{1}{16} \cdot y_{-1} + \frac{9}{16} \cdot y_0 + \frac{9}{16} \cdot y_1 - \frac{1}{16} \cdot y_2;$$

$x_{-1} = 1,2$	$x_0 = 1,4$	$x_1 = 1,6$	$x_2 = 1,8$
$y_{-1} = 0,1942$	$y_0 = 0,1497$	$y_1 = 0,1109$	$y_2 = 0,0790$

$$P(1,5) = -\frac{1}{16} \cdot 0,1942 + \frac{9}{16} \cdot 0,1497 + \frac{9}{16} \cdot 0,1109 - \frac{1}{16} \cdot 0,0790 = \mathbf{0,1295125};$$

(c) NEWTONsche Interpolationsformel

$$\begin{array}{llllll}
 x_0 = 1,2 & y_0 = 0,1942 & & & & \\
 & & \Delta y_0 = -0,0445 & & & \\
 x_1 = 1,4 & y_1 = 0,1497 & & \Delta^2 y_0 = 0,0057 & & \\
 & & \Delta y_1 = -0,0388 & & \Delta^3 y_0 = 0,0012 & \\
 x_2 = 1,6 & y_2 = 0,1109 & & \Delta^2 y_1 = 0,0069 & & \Delta^4 y_0 = -0,0012 \\
 & & \Delta y_2 = -0,0319 & & \Delta^3 y_1 = 0 & \\
 x_3 = 1,8 & y_3 = 0,0790 & & \Delta^2 y_2 = 0,0069 & & \\
 & & \Delta y_3 = -0,025 & & & \\
 x_4 = 2,0 & y_4 = 0,0540 & & & &
 \end{array}$$

Der Wert $x = 1,50$ liegt zwischen x_1 und x_2 , $h_i = x_{i+1} - x_i = 0,2$

Lineare Interpolation

$$P_1(x) = y_1 + \frac{\Delta y_1}{h} \cdot (x - x_1) = 0,1497 - \frac{0,0388}{0,2} \cdot (1,5 - 1,4) = \mathbf{0,1303};$$

Quadratische Interpolation

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= y_1 + \frac{\Delta y_1}{h} \cdot (x - x_1) + \frac{\Delta^2 y_1}{2! \cdot h^2} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2); \\
 P_2(1,5) &= 0,1497 - \frac{0,0388}{0,2} \cdot (1,5 - 1,4) + \frac{0,0069}{2 \cdot 0,04} \cdot (1,5 - 1,4) \cdot (1,5 - 1,6) = 0,1294375
 \end{aligned}$$

Kubische Interpolation

$$\Delta^3 y_1 = 0 \quad \implies \quad P_2(x) = P_3(x)$$

(d) Spline-Funktion

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
y_i	0,242	0,1942	0,1497	0,1109	0,0790	0,0540

$$h_i = x_{i+1} - x_i = 0,2$$

$$h_i + h_{i+1} = 0,4$$

$$a_i = y_i$$

$$c_0 = c_5 = 0$$

$$P_i(x) := a_i + b_i \cdot (x - x_i) + c_i \cdot (x - x_i)^2 + d_i \cdot (x - x_i)^3$$

$$A \cdot C = R;$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 \cdot (h_0 + h_1) & h_1 & 0 & 0 \\ h_1 & 2 \cdot (h_1 + h_2) & h_2 & 0 \\ 0 & h_2 & 2 \cdot (h_2 + h_3) & h_3 \\ 0 & 0 & h_3 & 2 \cdot (h_3 + h_4) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$r_i = \frac{3}{h_i} \cdot (a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}} \cdot (a_i - a_{i-1}) = 15 \cdot (a_{i+1} - 2 \cdot a_i + a_{i-1})$$

$$r_1 = 15 \cdot (0,1497 - 2 \cdot 0,1942 + 0,242) = 0,0495$$

$$r_2 = 15 \cdot (0,1109 - 2 \cdot 0,1497 + 0,1942) = 0,0855$$

$$r_3 = 15 \cdot (0,079 - 2 \cdot 0,1109 + 0,1497) = 0,1035$$

$$r_4 = 15 \cdot (0,054 - 2 \cdot 0,079 + 0,1109) = 0,1035$$

$$R = \begin{bmatrix} 0,0495 \\ 0,0855 \\ 0,1035 \\ 0,1035 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A = D &= 0,8 \cdot \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} - 0,2 \cdot \begin{vmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} \\ &= 0,8 \cdot (0,512 - 0,032 - 0,032) - 0,2 \cdot (0,128 - 0,009) \\ &= 0,3344 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det A_1 = D_1 &= \begin{vmatrix} 0,0495 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0,0855 & 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,1035 & 0,2 & 0,8 & 0,2 \\ 0,1035 & 0 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} \\
&= 0,0495 \cdot \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} - 0,2 \cdot \begin{vmatrix} 0,0855 & 0,2 & 0 \\ 0,1035 & 0,8 & 0,2 \\ 0,1035 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} \\
&= 0,022176 - 0,007776 \\
&= 0,0144
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det A_2 = D_2 &= \begin{vmatrix} 0,8 & 0,0495 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,0855 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,1035 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,1035 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} \\
&= 0,8 \cdot \begin{vmatrix} 0,0855 & 0,2 & 0 \\ 0,1035 & 0,8 & 0,2 \\ 0,1035 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} - 0,0495 \cdot \begin{vmatrix} 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,8 \end{vmatrix} \\
&= 0,8 \cdot 0,03888 - 0,0495 \cdot 0,12 \\
&= 0,025164
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det A_3 = D_3 &= \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,0495 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0,0855 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,1035 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,1035 & 0,8 \end{vmatrix} \\ &= 0,8 \cdot \begin{vmatrix} 0,8 & 0,0855 & 0 \\ 0,2 & 0,1035 & 0,2 \\ 0 & 0,1035 & 0,8 \end{vmatrix} - 0,2 \cdot \begin{vmatrix} 0,2 & 0,0495 & 0 \\ 0,2 & 0,1035 & 0,2 \\ 0 & 0,1035 & 0,8 \end{vmatrix} \\ &= 0,8 \cdot 0,036 - 0,2 \cdot 0,045 \\ &= 0,0279\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det A_4 = D_4 &= \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 & 0,0495 \\ 0,2 & 0,8 & 0,2 & 0,0855 \\ 0 & 0,2 & 0,8 & 0,1035 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,1035 \end{vmatrix} \\ &= 0,8 \cdot \begin{vmatrix} 0,8 & 0,2 & 0,0855 \\ 0,2 & 0,8 & 0,1035 \\ 0 & 0,2 & 0,1035 \end{vmatrix} - 0,2 \cdot \begin{vmatrix} 0,2 & 0 & 0,0495 \\ 0,2 & 0,8 & 0,1035 \\ 0 & 0,2 & 0,1035 \end{vmatrix} \\ &= 0,8 \cdot 0,04896 - 0,2 \cdot 0,01242 \\ &= 0,036684\end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{0,0144}{0,3344} = 0,0430622$$

$$c_2 = 0,0752511$$

$$c_3 = 0,083433;$$

$$c_4 = 0,1097009$$

$$b_i = \frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} - 2 \cdot c_i)$$

$$b_0 = \frac{1}{0,2}(0,1942 - 0,242) - \frac{0,2}{3}(0,0430622 - 2 \cdot 0) = -0,2418708$$

$$b_1 = \frac{1}{0,2}(0,1497 - 0,1942) - \frac{0,2}{3}(0,0752511 - 2 \cdot 0,0430622) = -0,2217751$$

$$b_2 = \frac{1}{0,2}(0,1109 - 0,1497) - \frac{0,2}{3}(0,083433 - 2 \cdot 0,0752511) = -0,1895287$$

$$b_3 = \frac{1}{0,2}(0,0790 - 0,1109) - \frac{0,2}{3}(0,1097009 - 2 \cdot 0,083433) = -0,1556889$$

$$b_4 = \frac{1}{0,2}(0,0540 - 0,0790) - \frac{0,2}{3}(0 - 2 \cdot 0,1097009) = -0,1103732$$

$$d_i = \frac{1}{3 \cdot h_i}(c_{i+1} - c_i)$$

$$d_0 = \frac{1}{0,6}(0,0430622 - 0) = 0,0717703$$

$$d_1 = \frac{1}{0,6}(0,0752511 - 0,0430622) = 0,0536481$$

$$d_2 = \frac{1}{0,6}(0,083433 - 0,0752511) = 0,0136365$$

$$d_3 = \frac{1}{0,6}(0,1097009 - 0,083433) = 0,0422848$$

$$d_4 = \frac{1}{0,6}(0 - 0,1097009) = -0,1828349$$

$$P_0(x) = 0,242 - 0,2418708 \cdot (x - 1) + 0,0717703 \cdot (x - 1)^3$$

$$1,0 \leq x \leq 1,2;$$

$$P_1(x) = 0,1942 - 0,2217751 \cdot (x - 1,2) + 0,0430622 \cdot (x - 1,2)^2 + 0,0536481 \cdot (x - 1,2)^3$$

$$1,2 \leq x \leq 1,4$$

$$P_2(x) = 0,1497 - 0,1895287 \cdot (x - 1,4) + 0,0752511 \cdot (x - 1,4)^2 + 0,0136365 \cdot (x - 1,4)^3$$

$$1,4 \leq x \leq 1,6$$

$$P_3(x) = 0,1109 - 0,1556889 \cdot (x - 1,6) + 0,083433 \cdot (x - 1,6)^2 + 0,0422848 \cdot (x - 1,6)^3$$

$$1,6 \leq x \leq 1,8$$

$$P_4(x) = 0,0790 - 0,1103732 \cdot (x - 1,8) + 0,1097009 \cdot (x - 1,8)^2 - 0,1828349 \cdot (x - 1,8)^3$$

$$1,8 \leq x \leq 2,0$$

- zu Aufgabe 2 (s.S. 95)

(a) analytische Potenzfunktion

I) Interpolation von $\sqrt{1,03}$

Der Wert 1,03 liegt zwischen $x = 1,0$ und $x = 1,05$

x	1,00	1,05	1,10
y	1,00	1,0247	1,04881

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

$$P(1,00) \approx y(1,00) = 1,00 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,00 + a_2 \cdot 1,00^2$$

$$P(1,05) \approx y(1,05) = 1,0247 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,05 + a_2 \cdot 1,05^2$$

$$P(1,10) \approx y(1,10) = 1,04881 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,10 + a_2 \cdot 1,10^2$$

$$X \cdot A = R$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1,05 & 1,1025 \\ 1 & 1,1 & 1,21 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} 1,00 \\ 1,0247 \\ 1,04881 \end{bmatrix}$$

$$\det X = D = 0,00025$$

$$\det X_0 = D_0 = \begin{vmatrix} 1,00 & 1 & 1 \\ 1,0247 & 1,05 & 1,1025 \\ 1,04881 & 1,1 & 1,21 \end{vmatrix}$$
$$= 0,0000955$$

$$\det X_1 = D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1,00 & 1 \\ 1 & 1,0247 & 1,1025 \\ 1 & 1,04881 & 1,21 \end{vmatrix}$$
$$= 0,000183975$$

$$\det X_2 = D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1,00 \\ 1 & 1,05 & 1,0247 \\ 1 & 1,1 & 1,04881 \end{vmatrix}$$
$$= -0,0000295$$

$$a_0 = \frac{D_0}{D} = 0,382$$

$$a_1 = \frac{D_1}{D} = 0,7356$$

$$a_2 = \frac{D_2}{D} = -0,118$$

$$P(x) = 0,382 + 0,7356 \cdot x - 0,118 \cdot x^2$$

$$x = 1,03$$

$$P(1,03) = \mathbf{1,0144818}$$

Probe:

$$\sqrt{1,03} = 1,0148892$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0,9996 \approx 1;$$

II) Interpolation von $\sqrt{1,26}$

Der Wert 1,26 liegt zwischen $x = 1,25$ und $x = 1,30$.

x	1,20	1,25	1,30
y	1,09544	1,11803	1,14017

$$P(1,20) \approx y(1,20) = 1,09544 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,20 + a_2 \cdot 1,20^2$$

$$P(1,25) \approx y(1,25) = 1,11803 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,25 + a_2 \cdot 1,25^2$$

$$P(1,30) \approx y(1,30) = 1,14017 \implies a_0 + a_1 \cdot 1,30 + a_2 \cdot 1,30^2$$

$$X \cdot A = R$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1,2 & 1,44 \\ 1 & 1,25 & 1,5625 \\ 1 & 1,3 & 1,69 \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} 1,09544 \\ 1,11803 \\ 1,14017 \end{bmatrix}$$

$$\det X = D = 0,00025;$$

$$\det X_0 = D_0 = 0,00010457$$

$$\det X_1 = D_1 = 0,000168075$$

$$\det X_2 = D_2 = -0,0000225$$

$$a_0 = \frac{D_0}{D} = 0,4184$$

$$a_1 = \frac{D_1}{D} = 0,6724$$

$$a_2 = \frac{D_2}{D} = -0,09$$

$$P(x) = 0,4184 + 0,6724 \cdot x - 0,09 \cdot x^2$$

$$x = 1,26$$

$$P(1,26) = \mathbf{1,12274}$$

Probe:

$$\sqrt{1,26} = \mathbf{1,1224972}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = 1,0008 \approx 1$$

(b) LAGRANGESche Interpolationsformel

I) Interpolation von $\sqrt{1,03}$

$x_0 = 1,00$	$x_1 = 1,05$	$x_2 = 1,10$
$y_0 = 1,00$	$y_1 = 1,0247$	$y_2 = 1,04881$

$$L_0(x) = \frac{(x - 1,05) \cdot (x - 1,1)}{(1 - 1,05) \cdot (1 - 1,1)} = \frac{(x - 1,05) \cdot (x - 1,1)}{0,005}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - 1) \cdot (x - 1,1)}{(1,05 - 1) \cdot (1,05 - 1,1)} = -\frac{(x - 1) \cdot (x - 1,1)}{0,0025}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - 1) \cdot (x - 1,05)}{0,005}$$

$$P(x) = L_0(x) \cdot y_0 + L_1(x) \cdot y_1 + L_2(x) \cdot y_2$$

$$P(x) = \frac{(x - 1,05) \cdot (x - 1,1)}{0,005} + \left(-\frac{(x - 1) \cdot (x - 1,1)}{0,0025} \right) \cdot 1,0247 + \\ + \frac{(x - 1) \cdot (x - 1,05)}{0,005} \cdot 1,04881$$

$$P(1,03) = \mathbf{1,0148908}$$

$$\sqrt{1,03} = \mathbf{1,0148892}$$

II) Interpolation von $\sqrt{1,26}$

$x_0 = 1,20$	$x_1 = 1,25$	$x_2 = 1,30$
$y_0 = 1,09544$	$y_1 = 1,11803$	$y_2 = 1,14017$

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{(x-1,25) \cdot (x-1,3)}{(1,2-1,25) \cdot (1,2-1,3)} = \frac{(x-1,25) \cdot (x-1,3)}{0,005} \\
L_1(x) &= \frac{(x-1,2) \cdot (x-1,3)}{(1,25-1,2) \cdot (1,25-1,3)} = -\frac{(x-1,2) \cdot (x-1,3)}{0,0025} \\
L_2(x) &= \frac{(x-1,2) \cdot (x-1,25)}{(1,3-1,2) \cdot (1,3-1,25)} = \frac{(x-1,2) \cdot (x-1,25)}{0,005} \\
P(x) &= \frac{(x-1,25) \cdot (x-1,3)}{0,005} \cdot 1,09544 - \frac{(x-1,2) \cdot (x-1,3)}{0,0025} \cdot 1,11803 + \\
&\quad + \frac{(x-1,2) \cdot (x-1,25)}{0,005} \cdot 1,14017
\end{aligned}$$

$$P(1,26) = \mathbf{1,122494}$$

$$\sqrt{1,26} = \mathbf{1,1224972};$$

(c) NEWTONsche Interpolationsformel

$x_0 = 1,00$	$y_0 = 1,00$			
		$\Delta y_0 = 0,0247$		
$x_1 = 1,05$	$y_1 = 1,0247$		$\Delta^2 y_0 = -0,00059$	
		$\Delta y_1 = 0,02411$		$\Delta^3 y_0 = 0,00005$
$x_2 = 1,10$	$y_2 = 1,04881$		$\Delta^2 y_1 = -0,00054$	
		$\Delta y_2 = 0,02357$		$\Delta^3 y_1 = 0,00003$
$x_3 = 1,15$	$y_3 = 1,07238$		$\Delta^2 y_2 = -0,00051$	
		$\Delta y_3 = 0,02306$		$\Delta^3 y_2 = 0,00004$
$x_4 = 1,20$	$y_4 = 1,09544$		$\Delta^2 y_3 = -0,00047$	
		$\Delta y_4 = 0,02259$		$\Delta^3 y_3 = 0,00002$
$x_5 = 1,25$	$y_5 = 1,11803$		$\Delta^2 y_4 = -0,00045$	
		$\Delta y_5 = 0,02214$		
$x_6 = 1,30$	$y_6 = 1,14017$			

I) Interpolation von $\sqrt{1,03}$

Der Wert $x = 1,03$ liegt zwischen x_0 und x_1 , $h_i = x_{i+1} - x_i = 0,05$

Lineare Interpolation

$$\begin{aligned}
 P_1(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot (x - x_0); \\
 P_1(1,03) &= 1 + \frac{0,0247}{0,05} \cdot (1,03 - 1) \\
 &= \mathbf{1,01482};
 \end{aligned}$$

Quadratische Interpolation

$$\begin{aligned}
 P_2(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} \cdot (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! \cdot h^2} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1); \\
 P_2(1,03) &= P_1(1,03) - \frac{0,00059}{0,005} \cdot (1,03 - 1) \cdot (1,03 - 1,05) \\
 &= \mathbf{1,0148271};
 \end{aligned}$$

Kubische Interpolation

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= P_2(x) + \frac{\Delta^3 y_0}{3! \cdot h^3} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2); \\
 P_3(1,03) &= P_2(1,03) + \frac{0,00005}{6 \cdot 0,05^3} \cdot (1,03 - 1) \cdot (1,03 - 1,05) \cdot (1,03 - 1,1) \\
 &= \mathbf{1,01482738};
 \end{aligned}$$

Probe:

$$\sqrt{1,03} = \mathbf{1,0148892};$$

II) Interpolation von $\sqrt{1,26}$

Der Wert $x = 1,26$ liegt zwischen x_3 , x_4 , x_5 und x_6 .

Lineare Interpolation

Für lineare Interpolation benutzen wir die Punkte x_5 und x_6 .

$$P_1(x) = y_5 + \frac{\Delta y_5}{h} \cdot (x - x_5);$$

$$\begin{aligned} P_1(1,26) &= 1,11803 + \frac{0,02214}{0,05} \cdot (1,26 - 1,25) \\ &= \mathbf{1,122458}; \end{aligned}$$

Quadratische Interpolation

$$P_2(x) = y_4 + \frac{\Delta y_4}{h} \cdot (x - x_4) + \frac{\Delta^2 y_4}{2! \cdot h^2} \cdot (x - x_4) \cdot (x - x_5);$$

$$\begin{aligned} P_2(1,26) &= 1,09544 + \frac{0,02259}{0,05} \cdot (1,26 - 1,2) - \frac{0,00045}{0,005} \cdot (1,26 - 1,2) \cdot (1,26 - 1,25) \\ &= \mathbf{1,122494}; \end{aligned}$$

Kubische Interpolation

$$\begin{aligned} P_3(x) &= y_3 + \frac{\Delta y_3}{h} \cdot (x - x_3) + \frac{\Delta^2 y_3}{2! \cdot h^2} \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) + \\ &+ \frac{\Delta^3 y_3}{3! \cdot h^3} \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) \cdot (x - x_5); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3(1,26) &= 1,07238 + \frac{0,02306}{0,05} \cdot (1,26 - 1,15) - \frac{0,00047}{0,005} \cdot (1,26 - 1,15) \cdot (1,26 - 1,2) + \\ &+ \frac{0,00002}{6 \cdot 0,05^3} \cdot (1,26 - 1,15) \cdot (1,26 - 1,2) \cdot (1,26 - 1,25) \\ &= \mathbf{1,1224934}; \end{aligned}$$

Probe:

$$\sqrt{1,26} = \mathbf{1,1224972};$$

(d) Spline-Funktion

$$y(x) = \sqrt{x}$$

i	0	1	2	3	4
x_i	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20
y_i	1,00	1,0247	1,04881	1,07238	1,09544

$$h_i = x_{i+1} - x_i = 0,05; \quad h_i + h_{i+1} = 0,1;$$

$$a_i = y_i; \quad c_0 = c_4 = 0;$$

$$P_i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_i) + c_i \cdot (x - x_i)^2 + d_i \cdot (x - x_i)^3$$

$$A \cdot C = R$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 \cdot (h_0 + h_1) & h_1 & 0 \\ h_1 & 2 \cdot (h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & h_2 & 2 \cdot (h_2 + h_3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,2 & 0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,2 & 0,05 \\ 0 & 0,05 & 0,2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$r_i = \frac{3}{h_i} \cdot (a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}} \cdot (a_i - a_{i-1}) = 60 \cdot (a_{i+1} - 2 \cdot a_i + a_{i-1})$$

$$r_1 = 60 \cdot (1,04881 - 2 \cdot 1,0247 + 1) = -0,0354$$

$$r_2 = 60 \cdot (1,07238 - 2 \cdot 1,04881 + 1,0247) = -0,0324$$

$$r_3 = 60 \cdot (1,09544 - 2 \cdot 1,07238 + 1,04881) = -0,0306$$

$$R = \begin{bmatrix} -0,0354 \\ -0,0324 \\ -0,0306 \end{bmatrix}$$

$$\det A = D = \begin{vmatrix} 0,2 & 0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,2 & 0,05 \\ 0 & 0,05 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,008 - 0,0005 - 0,0005 = 0,007$$

$$\begin{aligned} \det A_1 = D_1 &= \begin{vmatrix} -0,0354 & 0,05 & 0 \\ -0,0324 & 0,2 & 0,05 \\ -0,0306 & 0,05 & 0,2 \end{vmatrix} \\ &= -0,0354 \cdot \begin{vmatrix} 0,2 & 0,05 \\ 0,05 & 0,2 \end{vmatrix} - 0,05 \cdot \begin{vmatrix} -0,0324 & 0,05 \\ -0,0306 & 0,2 \end{vmatrix} \\ &= -0,00108 \end{aligned}$$

$$\det A_2 = D_2 = \begin{vmatrix} 0,2 & -0,0354 & 0 \\ 0,05 & -0,0324 & 0,05 \\ 0 & -0,0306 & 0,2 \end{vmatrix} = -0,000636$$

$$\det A_3 = D_3 = \begin{vmatrix} 0,2 & 0,05 & -0,0354 \\ 0,05 & 0,2 & -0,0324 \\ 0 & 0,05 & -0,0306 \end{vmatrix} = -0,000912$$

$$c_1 = \frac{D_1}{D} = -0,1542857$$

$$c_2 = -0,0908571$$

$$c_3 = -0,1302857$$

$$b_i = \frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} - 2 \cdot c_i)$$

$$b_0 = \frac{1}{0,05}(1,0247 - 1) - \frac{0,05}{3}(-0,1542857 - 2 \cdot 0)$$

$$= 0,4965714$$

$$b_1 = \frac{1}{0,05}(1,04881 - 1,0247) - \frac{0,05}{3}(-0,0908571 - 2 \cdot (-0,1542857))$$

$$= 0,4785714$$

$$b_2 = \frac{1}{0,05}(1,07238 - 1,04881) - \frac{0,05}{3}(-0,1302857 - 2 \cdot (-0,0908571))$$

$$= 0,4705428$$

$$b_3 = \frac{1}{0,05}(1,09544 - 1,07238) - \frac{0,05}{3}(0 + 2 \cdot 0,1302857)$$

$$= 0,4568571$$

$$d_i = \frac{1}{3 \cdot h_i}(c_{i+1} - c_i)$$

$$d_0 = \frac{1}{0,15}(-0,1542857 - 0) = -1,0285713$$

$$d_1 = \frac{1}{0,15}(-0,0908571 + 0,1542857) = 0,4228573$$

$$d_2 = \frac{1}{0,15}(-0,1302857 + 0,0908571) = -0,2628573$$

$$d_3 = \frac{1}{0,15}(0 + 0,1302857) = 0,8685713$$

$$P_0(x) = 1 + 0,4965714 \cdot (x - 1) - 1,0285713 \cdot (x - 1)^3;$$

$$1,0 \leq x \leq 1,05;$$

$$P_1(x) = 1,0247 + 0,4785714 \cdot (x - 1,05) - 0,1542857 \cdot (x - 1,05)^2 + \\ + 0,4228573 \cdot (x - 1,05)^3;$$

$$1,05 \leq x \leq 1,1;$$

$$P_2(x) = 1,04881 + 0,4705428 \cdot (x - 1,1) - 0,0908571 \cdot (x - 1,1)^2 - \\ - 0,2628573 \cdot (x - 1,1)^3$$

$$1,1 \leq x \leq 1,15;$$

$$P_3(x) = 1,07238 + 0,4568571 \cdot (x - 1,15) - 0,1302857 \cdot (x - 1,15)^2 + \\ + 0,86857134 \cdot (x - 1,15)^3$$

$$1,15 \leq x \leq 1,20;$$

- zu Aufgabe 3 (s.S. 95)

Gegeben sind die Stützpunkte:

$x_0 = 1$	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$
$y_0 = -2$	$y_1 = 3$	$y_2 = 1$	$y_3 = 4$

Für drei Punkte: x_0, x_1, x_2 . gilt:

$$P(x) = L_0(x) \cdot y_0 + L_1(x) \cdot y_1 + L_2(x) \cdot y_2;$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} = \frac{(x - 2) \cdot (x - 3)}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} = -(x - 1) \cdot (x - 3)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1) \cdot (x - 2)}{2}$$

$$P(x) = -\frac{2}{3} \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) - 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) + \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2);$$

Für vier Punkte: x_0, x_1, x_2, x_3 . gilt:

$$P(x) = L_0(x) \cdot y_0 + L_1(x) \cdot y_1 + L_2(x) \cdot y_2 + L_3(x) \cdot y_3$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_3)} = -\frac{1}{6} \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3)} = \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_3)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)} = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_3 - x_0) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)} = \frac{1}{6} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1}{3} \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) + \frac{3}{2} \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 4) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 4) + \frac{2}{3} \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3) \end{aligned}$$

1.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.6.1 Analytische Methoden - DGL erster Ordnung

1.6.1.1 Aufgaben

1. Geben Sie die allgemeine Lösung folgender DGL an:

(a) $y' = (y - 3) \cos x$ (Lösung s. S. 124)

(b) $y' = e^{x+y}$ (Lösung s. S. 124)

(c) $y' \sin x = y \ln y$ (Lösung s. S. 125)

(d) $2xy' + \frac{y^2}{x} = 0$ (Lösung s. S. 126)

(e) $y' + y + e^x = 0$ (Lösung s. S. 126)

(f) $y' + \frac{y}{x} = \sin x$ (Lösung s. S. 127)

(g) $\frac{dx}{dt} + t^2 \cdot x = 2t^2$ (Lösung s. S. 127)

(h) $y' = -xy^2$ mit $y(0) = 2$ (Lösung s. S. 132)

(i) $\frac{dx}{dt} + t^2 x = 0$ mit $x(0) = 3$ (Lösung s. S. 132)

(j) $t \frac{dx}{dt} - x = t^2 \cos t$ mit $x(\pi/2) = \pi$ (Lösung s. S. 133)

Für die Aufgabe g ist ein ausführlicher Lösungsweg beschrieben.

2. Für ein System mit einfacher Speicherwirkung gilt die DGL

$$T\dot{x}_a + x_a = Kx_e$$

(x_a Ausgangsgröße, x_e Eingangsgröße, T Zeitkonstante, K proportionaler Übertragungsfaktor).

Wie ändert sich die Ausgangsgröße x_a in Abhängigkeit von der Zeit t , wenn gilt $x_e = c \cdot t$ ($c = \text{const.}$)?

3. Bestimmen Sie jeweils die allgemeine und die durch Anfangsbedingungen festgelegte spezielle Lösung:

(a) $y' = xy + 2x$ mit $y(0) = 2$

(b) $y' + x^2 y = x^2$ mit $y(2) = 1$

4. Für das hydraulische Schema (siehe Abbildung 1.4) mit zugehörigem Blockschaltbild gilt die Differentialgleichung:

$$h_{Fl} = R \cdot C \frac{dz_R}{dt} + z_R$$

Dabei ist von linearisierten Verhältnissen und einem homogenen, isotropen Grundwasserleiter mit folgenden Parametern $k = 5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}$; $n_0 = 0,2$; $z_{Rmittel} = 20m$; $l = 50m$ ausgegangen worden.

Berechnen Sie die Änderung des Wasserstandes, wenn sich der Flusswasserespiegel

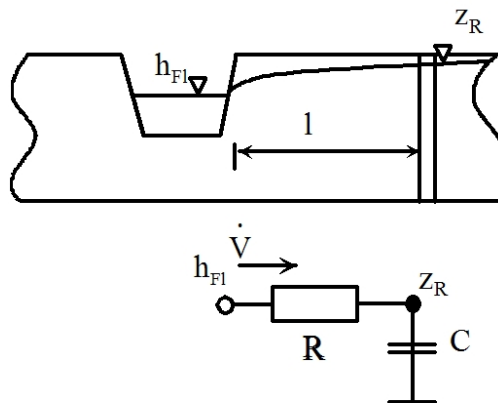


Abbildung 1.4: Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels

in erster Näherung wie folgt ändert:

- (a) sprunghaft ($h_{Fl} = h_{FL} \cdot \mathbf{1}(t)$) und
 - (b) sinusförmig ($h_{Fl} = h_{FLm} \sin(\omega \cdot t) + h_{FL0}$, mit $\omega = 2\pi/\tau$ und $\tau = 7$ Tage)
(Lösung s. S. 137)
5. Für die Konzentrations C durch Sorption von Schadstoffen an der Bodenmatrix soll folgende DGL gelten:

$$T_1 \dot{C} + C = K$$

wobei T_1 eine Zeitkonstante und K eine Konstante sein sollen.

$$T_1 = 1d^{-1}, K = 100mg/l$$

Die Konzentrationsänderung zum Zeitpunkt $t = 0$ soll $C(0) = 0$ sein.

- (a) Lösen Sie die DGL mittels der analytischen Methoden und berechnen Sie die Konzentrationsänderung für den Zeitpunkt $t = 1d$.
- (b) Skizzieren Sie den prinzipiellen Zeitverlauf der Konzentrationsänderung.
(Lösung s. S. 147)

6. Der Grundwasserwiederanstieg und damit die Auffüllung der Restlöcher in den ehemaligen Braunkohlentagebauen dauert unter natürlichen Bedingungen zu lange. Deshalb wird mit einer konstanten Fremdeinspeisung der Auffüllvorgang ($h_{t=0} = 0$) beschleunigt.
(siehe Abbildung 1.5)

$$A \frac{dh}{dt} = \dot{V}_{Zustr}$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung mittels analytischer Methoden

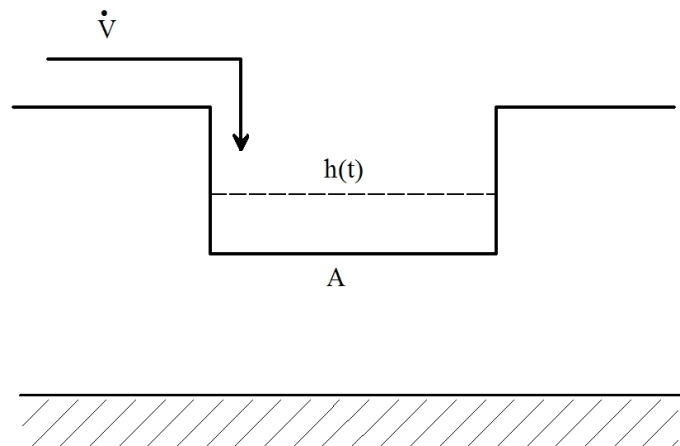


Abbildung 1.5: Füllvorgang eines Restloches

(Lösung s. S. 149).

7. Es ist folgende Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g \quad \text{mit} \quad h_{t=0} = 0$$

$g = 0,015 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ und $k = 0,01 \text{ s}^{-1}$

Lösen Sie die Differentialgleichung mittels analytischer Methoden (Lösung s. S. 150).

1.6.1.2 Lösungen

• zu Aufgabe 1 (s. S. 121)

(a)

Ausgangsgleichung: $y' = (y - 3) \cos x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (y - 3) \cos x \implies \frac{1}{y - 3} = \cos x dx \\ \int \frac{1}{y - 3} dy &= \int \cos x dx \implies \ln |y - 3| - \ln C = \sin x \\ \ln \frac{|y - 3|}{C} &= \sin x \implies C \cdot e^{\sin x} = y - 3 \\ y &= C \cdot e^{\sin x} + 3\end{aligned}$$

Probe:

$$y' = (y - 3) \cos x; \quad y = C \cdot e^{\sin x} + 3$$

$$y' = C \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}$$

$$C \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} \stackrel{?}{=} (y - 3) \cos x$$

$$(y - 3) \cos x = ((C \cdot e^{\sin x} + 3) - 3) \cos x = C \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}$$

$$y' \stackrel{!}{=} (y - 3) \cos x$$

(b)

Ausgangsgleichung: $y' = e^{x+y}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= e^x \cdot e^y \\ \int \frac{dy}{e^y} &= \int e^x dx \implies \int e^{-y} dy = e^x - C \\ -e^{-y} &= e^x - C \implies e^{-y} = C - e^x \\ -y &= \ln(C - e^x) \\ y &= \ln \frac{1}{C - e^x}\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}y' &= e^{x+y}; & y &= \ln \frac{1}{C - e^x} \\y' &= \frac{e^x}{C - e^x} \\e^{x+y} &= e^{x + \ln \frac{1}{C - e^x}} = e^x \cdot e^{\ln \frac{1}{C - e^x}} \\&= e^x \cdot \frac{1}{C - e^x} = \frac{e^x}{C - e^x} \\y' &\stackrel{!}{=} e^{x+y}\end{aligned}$$

(c)

Ausgangsgleichung: $y' \sin x = y \cdot \ln y$

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y \ln y} &= \int \frac{dx}{\sin x} \Rightarrow \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \ln C = \ln \left(C \cdot \left| \tan \frac{x}{2} \right| \right) \\ \int \frac{d \ln y}{\ln y} &= \ln(C \cdot \left| \tan \frac{x}{2} \right|) \Rightarrow \ln |\ln y| = \ln(C \cdot \left| \tan \frac{x}{2} \right|) \\ \ln y &= C \cdot \left| \tan \frac{x}{2} \right| \\ y &= e^{C \cdot \left| \tan \frac{x}{2} \right|}\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}y' &= \sin x \cdot y \ln y; & y &= e^{C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \\y' &= C \cdot e^{C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\y \cdot \ln y &= e^{C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \ln e^{C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)} = C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot e^{C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \\y' \cdot \sin x &= C \cdot e^{C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{\sin x}{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \\&= C \cdot e^{C \cdot \tan\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = C \cdot e^{C \cdot \tan \frac{x}{2}} \cdot \tan \frac{x}{2} \\y' \sin x &\stackrel{!}{=} y \ln y\end{aligned}$$

(d)Ausgangsgleichung: $2xy' + \frac{y^2}{x} = 0$

$$\begin{aligned}2xy' &= -\frac{y^2}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y^2}{2x^2} \implies \int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{2x^2} + C \\ -\frac{1}{y} &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{x} \right) + C = \frac{1}{2x} + C \\ y &= -\frac{2x}{1 + 2Cx}\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}2xy' + \frac{y^2}{x} &= 0; \quad y = -\frac{2x}{1 + 2Cx} \\ y' &= -2 \frac{(1 + 2Cx) - x \cdot 2C}{(1 + 2Cx)^2} = -\frac{2}{(1 + 2Cx)^2} \\ y^2 &= \frac{4x^2}{(1 + 2Cx)^2} \\ 2xy' + \frac{y^2}{x} &= -\frac{2 \cdot 2x}{(1 + 2Cx)^2} + \frac{4x^2}{x(1 + 2Cx)} = 0\end{aligned}$$

(e)Ausgangsgleichung: $y' + y + e^x = 0$

$$\begin{aligned}y' + y &= -e^x \\ y' + y = 0 &\implies \frac{dy}{dx} = -y \implies \frac{dy}{y} = -dx \\ \int \frac{dy}{y} - \ln C &= \int dx \implies \ln \frac{|y|}{C} = -x \implies y = C \cdot e^{-x} \\ y' &= C' \cdot e^{-x} - C \cdot e^{-x} \implies C' \cdot e^{-x} - C \cdot e^{-x} + C \cdot e^{-x} = -e^x \\ C' &= -e^{2x} \implies dC = -\int e^{2x} dx + C_1 \implies C = -\frac{1}{2}e^{2x} + C_1 \\ y &= \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C_1 \right) e^{-x}\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(-\frac{1}{2} \cdot 2e^{2x}\right) e^{-x} - \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C_1\right) e^{-x} + \left(-\frac{1}{2} \cdot e^{2x} + C_1\right) e^{-x} \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{2x} \cdot e^{-x} = -e^x
 \end{aligned}$$

(f)Ausgangsgleichung: $y' + \frac{y}{x} = \sin x$

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \\
 \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{dx}{x} + \ln C \\
 \ln |y| &= \ln \frac{C}{|x|} \\
 y &= \frac{C}{x} \implies y = \frac{C(x)}{x} \implies y' = \frac{Cx - C}{x^2} \\
 \frac{Cx - C}{x^2} + \frac{C}{x^2} &= \sin x \implies \frac{Cx}{x^2} = \sin x \implies \frac{dC}{dx} = x \sin x \\
 C &= \int x \sin x dx + C_1 = \sin x - x \cos x + C_1 \\
 y &= \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{C_1}{x}
 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
 y' + \frac{y}{x} &= \sin x; \quad y = \frac{\sin x}{x} - \cos x + \frac{C}{x} \\
 y' &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + \sin x - \frac{C}{x^2} \\
 y' + \frac{y}{x} &= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} + \sin x - \frac{C}{x^2} + \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} + \frac{C}{x^2} \\
 &= \sin x
 \end{aligned}$$

(g)Gegeben ist die inhomogene DGL $\frac{dx}{dt} + t^2 \cdot x = 2t^2$ Variante 1

Zuerst wird die Lösung der homogenen DGL gesucht:

$$\frac{dx_h}{dt} + t^2 \cdot x_h = 0$$

Mittels der Methode der Trennung der Variablen erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{dx_h}{dt} &= -t^2 \cdot x_h \\ \frac{dx_h}{x_h} &= -t^2 \cdot dt \\ \int \frac{1}{x_h} dx_h &= \int -t^2 \cdot dt \\ \ln x_h &= -\frac{1}{3}t^3 + \ln C \\ x_h &= C \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}\end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung wird mittels der Variation der Konstanten erzielt:

$$\begin{aligned}x_{p(t)} &= u(t) \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} \\ \frac{dx_p}{dt} &= \frac{du}{dt} \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} + u \cdot (-t^2) \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}\end{aligned}$$

Wird dieser Ausdruck in die inhomogene DGL eingesetzt, so erhält man eine DGL bezüglich der variierten Konstanten $u(t)$, die mittels der Methode der Trennung der Variablen gelöst wird.

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} + u \cdot (-t^2) \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} &= 2t^2 \\ \frac{du}{dt} &= 2t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} \\ du &= 2t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} dt \\ \int du &= \int 2t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} dt\end{aligned}$$

Hier kann der Produktansatz (Variante 1.1) oder die Substitutionsmethode für die Integration (Variante 1.2) genutzt werden.

Variante 1.1

Der Produktansatz (partielle Integration) lautet in allgemeiner Form:

$$\int w \cdot \frac{dv}{dt} dt = w \cdot v - \int v \cdot \frac{dw}{dt} dt$$

Vergleicht man die beiden Integralgleichungen

$$\int du = \int 2t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} dt$$

so kann Folgendes gesetzt werden:

$$w = 1$$

$$\frac{dv}{dt} = t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3}$$

$$\implies v = e^{\frac{t^3}{3}}$$

Damit, und unter Beachtung von

$$\frac{d\left(e^{\frac{1}{3}t^3}\right)}{dt} = t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int du &= 2 \int \left(t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3}\right) \cdot 1 dt \\ &= 2 \cdot \left(1 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} - \int \left(e^{\frac{1}{3}t^3} \cdot 0\right) dt\right) \end{aligned}$$

Mit

$$\int (v') \cdot w dt = w \cdot v - \int (v \cdot w') dt$$

folgt:

$$u(t) = 2e^{\frac{1}{3}t^3}$$

Dieser Ausdruck, in die partikuläre Lösung eingesetzt, ergibt:

$$x_p = u(t) 2e^{\frac{1}{3}t^3}$$

$$x_p = 2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

$$x_p = 2$$

Variante 1.2

Das Integral

$$\int du = \int 2t^2 \cdot e^{\frac{1}{3}t^3} dt$$

kann auch mittels Substitution zur Vereinfachung des Integrals gelöst werden:

$$z = e^{\frac{1}{3}t^3}$$

$$\frac{dz}{dt} = t^2 e^{\frac{1}{3}t^3}$$

$$\int du = 2 \int \frac{dz}{dt} dt$$

$$\int du = 2 \int dz$$

$$u = 2z + C_{lp}$$

$$u = 2e^{\frac{1}{3}t^3} + C_{lp}$$

Auch hier wird die Lösung in den partikulären Ansatz eingefügt, und man erhält:

$$x_p = u(t) \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

$$x_p = 2 + C_{lp} \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

Varianten 1.1 und 1.2

Somit ergibt sich bei beiden Varianten die Gesamtlösung als Addition der homogenen und der partikulären Lösung zu:

$$x(t) = x_{p(t)} + x_{h(t)} = 2 + C \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} \quad (1.1)$$

(für die Variante 1.2 wird C aus $C = C_h + C_{lp}$ gebildet.)

Die Konstante C wird wieder aus der Anfangsbedingung $x_{(t=0)} = x_0$ bestimmt.

$$C = x_0 - 2$$

$$x(t) = 2 + (x_0 - 2) \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} = 2 \left(1 - e^{-\frac{1}{3}t^3}\right) + x_0 \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

Variante 2

Die gegebene DGL

$$\frac{dx}{dt} + t^2 \cdot x = 2t^2$$

wird umgeformt zu:

$$\frac{dx}{dt} + t^2 (x - 2) = 0$$

Damit ist die formal inhomogene DGL eigentlich eine homogene, die entsprechend, z.B. nach der Methode der Trennung der Variablen, gelöst werden kann.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= t^2 (2 - x) \\ \int \frac{dx}{2 - x} &= \int t^2 dt\end{aligned}$$

Das Ergebnis dieser Integrale ist, unter Beachtung, dass $e^{\ln x} = x$ gilt:

$$\begin{aligned}-\ln(2 - x) &= \frac{1}{3}t^3 + \ln C \\ x(t) &= 2 + C \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= C \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) e^{-\frac{1}{3}t^3} \cdot 3t^2 \\ &= -C \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} \\ -C \cdot t^2 \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} + 2t^2 + t^2 \cdot C \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} &= 2t^2\end{aligned}$$

Damit wird das gleiche Ergebnis wie in Variante 1 (siehe Gleichung 1.1) auf wesentlich kürzerem Weg erzielt. Die Bestimmung der Konstante C erfolgt wie bei Variante 1.

(h)

Ausgangsgleichung: $y' = -xy^2$ mit $y(0) = 2$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y^2} &= -x dx \\ \int \frac{dy}{y^2} &= - \int x dx + C \\ -\frac{1}{y} &= -\frac{1}{2}x^2 + C \implies y = \frac{2}{x^2 - 2C} \implies C = -\frac{1}{2} \\ y &= \frac{2}{x^2 + 1}\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}y' &= -xy^2; \quad y = \frac{2}{x^2 + 1} \\ y' &= \frac{-2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \\ -x \cdot y^2 &= -x \frac{4}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \\ y' &\stackrel{!}{=} -xy^2\end{aligned}$$

(i)

Ausgangsgleichung: $\frac{dx}{dt} + t^2x = 0$ mit $x(0) = 3$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -xt^2 \\ \int \frac{dx}{x} + \ln C &= - \int t^2 dt \\ \ln C |x| &= -\frac{1}{3}t^3 \implies -3 \ln C |x| = t^3 \\ \ln \frac{1}{(C|x|)^3} &= t^3 \implies e^{t^3} = \frac{1}{C^3|x|^3} \\ x &= \frac{1}{C} \sqrt[3]{e^{-t^3}} \implies t = 0; C = \frac{1}{3} \\ x(t) &= 3 \sqrt[3]{e^{-t^3}}\end{aligned}$$

Probe:

$$\frac{dx}{dt} + t^2 x = 0; \quad x(t) = 3\sqrt[3]{e^{-t^3}} = 3 \left(e^{-t^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = x' &= 3 \cdot \frac{1}{3} \left(e^{-t^3} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot e^{-t^3} \cdot (-3t^2) \\ &= -3t^2 \cdot e^{\frac{2}{3}t^3 - t^3} = -3t^2 \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3} \end{aligned}$$

$$t^2 x = 3t^2 \left(e^{-t^3} \right)^{\frac{1}{3}} = 3t^2 \cdot e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

$$x' \stackrel{!}{=} t^2 x$$

(j)Ausgangsgleichung: $t \frac{dx}{dt} - x = t^2 \cos t$ mit $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

$$t \frac{dx}{dt} = x \implies \frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} \implies x = Ct$$

$$\dot{x} = \dot{C}t + C \implies t \left(\dot{C}t + C \right) - Ct = t^2 \cos t$$

$$\dot{C}t^2 = t^2 \cos t \implies \frac{dC}{dt} = \cos t \implies C = \sin t + C_1$$

$$x(t) = t(\sin t + C_1)$$

$$\pi = \frac{\pi}{2}C_1 + \frac{\pi}{2} \sin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}(C_1 + 1); \quad C_1 = 1$$

$$x(t) = t(\sin t + 1)$$

Probe:

$$t \frac{dx}{dt} - x = t^2 \cos t; \quad x(t) = t(\sin t + 1)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sin t + 1 + t \cdot \cos t$$

$$t \frac{dx}{dt} = t \cdot \sin t + t + t^2 \cos t = t(\sin t + 1) + t^2 \cos t$$

$$\begin{aligned} t \frac{dx}{dt} - x &= t(\sin t + 1) + t^2 \cos t - t(\sin t + 1) \\ &= t^2 \cos t \end{aligned}$$

• zu Aufgabe 2 (s. S. 121)

Ausgangsgleichung: $T\dot{x}_a + x_a = K \cdot x_e$; mit $x_e = C \cdot t$; $c = \text{const}$

$$T\dot{x}_a + x_a = K \cdot C \cdot t$$

$$T\frac{dx_a}{dt} + x_a = 0 \implies T\frac{dx_a}{dt} = -x_a \implies \frac{dx_a}{x_a} = -\frac{1}{T}dt$$

$$\ln |x_a| - \ln C_1 = -\frac{t}{T}$$

$$x_a = C_1 e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\dot{x}_a = \dot{C}_1 e^{-\frac{t}{T}} + C_1 \left(-\frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

$$T\dot{C}_1 e^{-\frac{t}{T}} - C_1 e^{-\frac{t}{T}} + C_1 \cdot e^{-\frac{t}{T}} = K \cdot C \cdot t$$

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{K \cdot C \cdot t}{T} e^{\frac{t}{T}}$$

$$C_1 = \frac{K \cdot C}{T} \int t \cdot e^{\frac{t}{T}} dt = \frac{K \cdot C}{T} \cdot \frac{\left(\frac{t}{T} - 1\right)}{\frac{1}{T^2}} \cdot e^{\frac{t}{T}}$$

$$C_1 = K \cdot C (t - T) e^{\frac{t}{T}}$$

$$x_a(t) = K \cdot C (t - T)$$

Probe:

$$T\dot{x}_a + x_a = K \cdot x_e; \quad x_e = C \cdot t$$

$$x_a(t) = K \cdot C (t - T)$$

$$\dot{x}_a = K \cdot C$$

$$T\dot{x}_a + x_a = T \cdot C \cdot K + K \cdot C (t - T)$$

$$= K \cdot C \cdot t; \quad \text{mit } C \cdot t = x_e$$

$$= K \cdot x_e$$

• zu Aufgabe 3 (s. S. 121)

(a)

Ausgangsgleichung: $y' = xy + 2x$ mit $y(0) = 2$

$$y' = x(y + 2); \implies \frac{dy}{y + 2} = x dx$$

$$\int \frac{d(y + 2)}{y + 2} - \ln C = \int x dx$$

$$\ln \frac{|y + 2|}{C} = \frac{1}{2}x^2 \implies y = C \cdot e^{\frac{1}{2}x^2} - 2$$

für $x=0$ gilt: $2 = C - 2 \implies C = 4$

$$y = 2 \left(2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1 \right)$$

Probe:

$$y' = xy + 2x; \quad y = 2 \left(2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1 \right)$$

$$y' = 2 \cdot 2e^{\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2x = 4xe^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$xy + 2x = 2x \left(2e^{\frac{1}{2}x^2} - 1 \right) + 2x = 4xe^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$y' \stackrel{!}{=} xy + 2x$$

(b)

Ausgangsgleichung: $y' + x^2y = x^2$ mit $y(2) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = x^2(1 - y)$$

$$\frac{dy}{1 - y} = x^2 dx \implies \frac{d(y - 1)}{y - 1} = -x^2 dx$$

$$\int \frac{d(y - 1)}{y - 1} - \ln C = - \int x^2 dx$$

$$\ln \frac{|y - 1|}{C} = -\frac{1}{3}x^3 \implies C \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} + 1 = y$$

für $x=2$ gilt: $C \cdot e^{-\frac{1}{3}} + 1 = 2 \implies C = e^{\frac{1}{3}}$

$$y = e^{\frac{1}{3}} \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} + 1 = e^{\frac{1}{3}(1-x^3)} + 1$$

Probe:

$$y' + x^2 y = x^2; \quad y = e^{\frac{1}{3}(1-x^3)} + 1$$

$$y' = e^{\frac{1}{3}(1-x^3)} \cdot \frac{1}{3} (-3x^2) = -x^2 e^{\frac{1}{3}(1-x^3)}$$

$$x^2 y = x^2 \left(e^{\frac{1}{3}(1-x^3)} + 1 \right) = x^2 e^{\frac{1}{3}(1-x^3)} + x^2$$

$$y' + x^2 y = -x^2 e^{\frac{1}{3}(1-x^3)} + x^2 e^{\frac{1}{3}(1-x^3)} + x^2$$

$$= x^2$$

- zu Aufgabe 4 (s. S. 121)

Diese inhomogene DGL wird gelöst, indem zuerst die homogene Lösung bestimmt wird, dann eine partikuläre und anschließend diese beiden Lösungen überlagert werden.

$$h_{Fl} = R \cdot C \frac{dz_R}{dt} + z_R$$

Homogene DGL

$$R \cdot C \frac{dz_{Rh}}{dt} + z_{Rh} = 0$$

$$\frac{dz_{Rh}}{dt} = -\frac{z_{Rh}}{RC}$$

Für $R \cdot C$ soll die Abkürzung T_1 eingeführt werden: $R \cdot C = T_1$

T_1 trägt die Bezeichnung der Zeitkonstanten und ist nicht mit der Transmissibilität T zu verwechseln. Diese Bezeichnung wird in automatisierungs- und elektrotechnischer Literatur so verwendet und ist entsprechend genormt. In älteren Literaturquellen wird auch oft die Bezeichnung τ verwendet. Die hier eingeführte Zeitkonstante T_1 ist eng mit der geohydraulischen Zeitkonstanten $a = \frac{S}{T}$ (Speicherkoeffizient/Transmissibilität) verwandt und lässt sich in diese überführen (siehe GRAEBER, Lehrscript Systemanalyse, Abschnitt THEISSche Brunnengleichung).

Nach der Methode der Trennung der Variablen lässt sich diese DGL lösen.

$$\int \frac{dz_{Rh}}{z_{Rh}} = -\frac{1}{T_1} \int dt$$

$$\ln z_{Rh} = -\frac{t}{T_1} + \ln K_1$$

$$z_{Rh} = K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Partikuläre Lösung

Nach der Methode der Variation der Konstanten und der Anwendung der Differentiation auf Produkte (Produktenregel) ergibt sich:

$$z_{Rp} = K_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

$$\frac{dz_{Rp}}{dt} = \frac{dK_1}{dt} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \left(-\frac{1}{T_1}\right) \cdot K_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Dies wird in die ursprüngliche DGL eingesetzt und man erhält:

$$\begin{aligned}h_{Fl} &= R \cdot C \frac{dz_R}{dt} + z_R \\h_{Fl} &= T_1 \cdot \left(\frac{dK_1}{dt} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \left(-\frac{1}{T_1} \right) \cdot K_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \right) + K_1(t) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \\h_{Fl} &= T_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \cdot \frac{dK_1}{dt} \\\frac{dK_1}{dt} &= \frac{h_{Fl}}{T_1} \cdot e^{+\frac{t}{T_1}}\end{aligned}$$

Nach der Methode der Trennung der Variablen erhält man:

$$\begin{aligned}\int dK_1 &= \int h_{Fl} \cdot \frac{1}{T_1} \cdot e^{+\frac{t}{T_1}} dt \\K_1 &= \int h_{Fl} \cdot \frac{1}{T_1} \cdot e^{+\frac{t}{T_1}} dt\end{aligned}$$

Bei der Lösung dieses Integrals müssen jetzt die unterschiedlichen Funktionen des als Randbedingung wirkenden Flusswasserstandes berücksichtigt werden.

Allgemein lässt sich aber die Gesamtlösung der DGL wie folgt entwickeln, wenn beachtet wird, dass sich die allgemeine Lösung aus der Addition der partikulären und der homogenen Lösung ergibt:

$$\begin{aligned}z_{Rp} &= K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \\z_{Rp} &= \left[\int h_{Fl} \cdot \frac{1}{T_1} \cdot e^{+\frac{t}{T_1}} dt \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \\z_{R(t)} &= z_{Rp}(t) + z_{Rh}(t)\end{aligned}$$

Damit lautet die Lösung der DGL:

$$z_{R(t)} = \left[\frac{1}{T_1} \int h_{Fl} \cdot e^{+\frac{t}{T_1}} dt \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

(a) Sprunghafte Änderung des Wasserstandes:

$$h_{Fl} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ h_{Fl} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} z_R &= \left[\frac{h_{Fl}}{T_1} \int e^{\frac{t}{T_1}} dt \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \\ &= h_{Fl} \cdot e^{\frac{t}{T_1}} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \\ &= h_{Fl} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \end{aligned}$$

Wenn man sich den ersten Summanden dieser Gleichung anschaut, welcher der partikulären Lösung entspricht, so erkennt man, dass der Wert $z_{Rp} = h_{Fl}$ dem Wasserstand entspricht, der sich im stationären Fall $t \Rightarrow \infty$ einstellt. Man spricht auch davon, dass dies der so genannte eingeschwungene Zustand ist.

Die Konstante K_1 kann wieder aus der Anfangsbedingung ermittelt werden.

$$z_{R,t=0} = 0$$

$$z_{R,t=0} = h_{Fl} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

$$K_1 = -h_{Fl}$$

$$z_R = h_{Fl} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$

Die grafische Darstellung des Grundwasserstandes für verschiedene geohydraulische und geometrische Verhältnisse ist in Abbildung 1.6 dargestellt. Dies ist die gleiche Formel, die bei der Methode der experimentellen Prozessanalyse als so genanntes Übertragungsverhalten mit Verzögerung 1. Ordnung bezeichnet wurde. Zu diesem gleichen Ergebnis kommt man mit wesentlich geringerem Aufwand, wenn die Methode der LAPLACE-Transformation angewendet wird (siehe Abschnitt LAPLACE-Transformation, Seite 187ff).

Beachtet man, dass die Zeitkonstante T_1 proportional zur Speicherwirkung des betrachteten Gebietes und umgekehrt proportional zur hydraulischen Leitfähigkeit des Grundwasserleiters wächst, so wird die Abhängigkeit der Grundwasserdynamik von den Bodenparametern deutlich. Besonders hervorgehoben werden soll noch die quadratische Abhängigkeit der Zeitkonstanten T_1 von der Entfernung zum Fluss. Der Quotient $a = \frac{S}{T}$ wird auch als geohy-

draulische Zeitkonstante bezeichnet und ist über l^2 mit der Zeitkonstanten T_1 verknüpft:

$$\begin{aligned}T_1 &= R \cdot C \\&= \frac{l}{k \cdot D \cdot b} \cdot (S \cdot l \cdot b) \\T_1 &= \frac{l^2 \cdot S}{k \cdot D} \\T_1 &= a \cdot l^2\end{aligned}$$

- l Abstand des Berechnungspunktes vom Fluss
- D Durchströmte Mächtigkeit des Grundwasserleiters
- S Speichervermögen des durchströmten Grundwasserleiters
- k Durchlässigkeitskoeffizient des betrachteten Grundwasserleiters

(b) Sinusförmige Änderung des Wasserstandes

Man kann auch hier von der allgemeinen Lösung der DGL ausgehen und setzt entsprechend der Aufgabenstellung die Funktion h_{FL} ein:

$$z_R = \left[\frac{1}{T_1} \int h_{FL} \cdot e^{+\frac{t}{T_1}} dt \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Eine sinusförmige Änderung des Flusswasserstandes ergibt sich in erster Näherung bei der Betrachtung des Jahresganges. Auch Hochwasserwellen verlaufen in erster Näherung nach einer Sinusfunktion, wobei meist nur die erste Halbwelle (Intervall von $0 \leq t \leq \pi$) von Interesse ist. Betrachtet man bei dem Jahresgang nur die Änderung des Flusswasserstandes gegenüber einem Mittelwert ($h_{FL0} = 0$), so kann man schreiben:

$$h_{FL} = h_{FLm} \sin(\omega \cdot t)$$

wobei ω die so genannte Kreisfrequenz ist. In unserem Beispiel, bei einer angenommenen Periodizität von 365 Tagen (Jahresgang), wird bei der Untersuchung von Hochwasserwellen die Dauer der Hochwasser(Halb)welle, bezogen auf den halben Kreisbogen (π), angesetzt. Laut Aufgabenstellung wäre dann $\omega = \frac{2\pi}{T}$ mit $T = 7d$ (siehe Abbildung 1.7).

$$z_R = \left[\frac{1}{T_1} \int h_{FL} \cdot e^{+\frac{t}{T_1}} dt \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$
$$z_R = \left[\frac{1}{T_1} \int h_{FLm} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot e^{+\frac{t}{T_1}} dt \right] \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Laut Integrationstabelle (z. B. BRONSTEIN, Seite 327) gilt:

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} ((a) \sin(bx) - b \cos(bx))$$

und damit erhält man:

$$z_R = \frac{h_{FLm}}{T_1} \frac{e^{\frac{t}{T_1}}}{\left(\left(\frac{1}{T_1} \right)^2 + \omega^2 \right)} \left(\frac{1}{T_1} \sin(\omega \cdot t) - \omega \cos(\omega \cdot t) \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}}$$

Auch hier kann K_1 aus der Anfangsbedingung bestimmt werden.

$$z_{R,t=0} = \frac{h_{FLm}}{T_1} \frac{e^{\frac{0}{T_1}}}{\left(\left(\frac{1}{T_1} \right)^2 + \omega^2 \right)} \left(\frac{1}{T_1} \sin(\omega \cdot 0) - \omega \cos(\omega \cdot 0) \right) \cdot e^{-\frac{0}{T_1}} + K_1 \cdot e^{-\frac{0}{T_1}}$$
$$z_{R,t=0} = \frac{h_{FLm}}{T_1} \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{T_1} \right)^2 + \omega^2 \right)} (-\omega) + K_1 = 0$$
$$K_1 = \frac{h_{FLm}}{T_1} \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{T_1} \right)^2 + \omega^2 \right)} (\omega)$$

Damit ergibt sich die Gesamtlösung der DGL zu:

$$\begin{aligned}
z_R &= \frac{h_{FLm}}{T_1} \frac{e^{\frac{t}{T_1}}}{\left(\left(\frac{1}{T_1}\right)^2 + \omega^2\right)} \left(\frac{1}{T_1} \sin(\omega t) - \omega \cos(\omega t) \right) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \\
&\quad + \frac{h_{FLm}}{T_1} \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{T_1}\right)^2 + \omega^2\right)} (\omega) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \\
z_R &= \frac{h_{FLm} \cdot e^{\frac{t}{T_1}}}{(1 + T_1^2 \omega^2)} (\sin(\omega \cdot t) - T_1 \cdot \omega \cos(\omega \cdot t)) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{h_{FLm} \cdot T_1 \cdot \omega}{(1 + T_1^2 \omega^2)} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \\
z_R &= \frac{h_{FLm} \cdot e^{\frac{t}{T_1}}}{(1 + T_1^2 \omega^2)} \left((\sin(\omega \cdot t) - T_1 \cdot \omega \cos(\omega \cdot t)) + (T_1 \cdot \omega) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \\
z_R &= \frac{h_{FLm}}{\sqrt{(1 + T_1^2 \omega^2)}} \left(\frac{1}{\sqrt{(1 + T_1^2 \omega^2)}} \sin(\omega t) - \frac{T_1 \cdot \omega}{\sqrt{(1 + T_1^2 \omega^2)}} \cos(\omega t) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(T_1 \cdot \omega)}{\sqrt{(1 + T_1^2 \omega^2)}} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \right)
\end{aligned}$$

Die Umformung in der letzten Zeile erfolgt in Vorbereitung der Anwendung bekannter trigonometrischer Relationen.

Setzt man hier $T_1 \cdot \omega = \tan \varphi$, so kann man folgende trigonometrischen Beziehungen verwenden:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} &= \cos \varphi \\
\frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} &= \sin \varphi
\end{aligned}$$

Dies oben eingesetzt führt zu:

$$z_R = \frac{h_{FLm}}{\sqrt{(1 + T_1^2 \omega^2)}} \left((\cos \varphi \cdot \sin(\omega \cdot t) - \sin \varphi \cdot \cos(\omega \cdot t)) + \sin \varphi \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$$

Dies kann man entsprechend den trigonometrischen Beziehungen (z. B. BRONSTEIN, Seite 155ff) entsprechend umformen:

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\beta - \alpha)$$

Damit erhält man

$$z_R = \frac{h_{FLm}}{\sqrt{(1 + T^2 \omega^2)}} \left(\sin(\omega \cdot t - \varphi) + \sin \varphi \cdot e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

$$\text{mit} \quad \varphi = \arctan(\omega \cdot t)$$

Aus diesem Ergebnis kann Folgendes abgelesen werden:

Die sinusförmige Änderung des Flusswasserspiegels setzt sich im Grundwasser fort, wobei man wieder einen instationären und einen quasistationären Zustand unterscheiden kann.

Quasistationärer Zustand (eingeschwungener Zustand) ($t \Rightarrow \infty$)

Unter dieser Bedingung verschwindet der zweite Summand. Das Grundwasser folgt der Sinusschwingung mit einer kleineren Amplitude. Man spricht davon, dass die Welle um den Faktor $\frac{h_{FLm}}{\sqrt{(1 + T^2 \omega^2)}}$ gedämpft wird und dass die Welle eine Phasenverschiebung von $\varphi = \arctan(\omega \cdot t)$ aufweist.

Instationärer Zustand (Übergangsverhalten)

Hier ist insbesondere der zweite Summand in der Lösungsgleichung dominant, d.h. es wird zur quasistationären Lösung ein Teil addiert, der zwischen maximal 1 (bei $t = 0$) und 0 (bei $t \Rightarrow \infty$) in Abhängigkeit von $\varphi = \arctan(\omega \cdot t)$ liegt.

Das Produkt $(\omega \cdot t)$ stellt die Relation der Periodizität (hier: Schnelligkeit) der Wasserstandsänderung und der Zeitkonstanten (hier: Trägheit) des Grundwasserleiters dar. Beachtet man, dass die Zeitkonstante T_1 proportional zur Speicherwirkung des betrachteten Gebietes und umgekehrt proportional zur hydraulischen Leitfähigkeit des Grundwasserleiters wächst, so wird die Abhängigkeit der Grundwasserdynamik von den Bodenparametern deutlich. Besonders hervorgehoben werden soll noch die quadratische Abhängigkeit der Zeitkonstanten T_1 von der Entfernung zum Fluss:

$$\begin{aligned} T_1 &= R \cdot C \\ &= \frac{1}{k \cdot D \cdot b} \cdot (S \cdot l \cdot b) \\ T_1 &= \frac{l^2 \cdot S}{k \cdot D} \end{aligned}$$

- l Abstand des Berechnungspunktes vom Fluss
- D Durchströmte Mächtigkeit des Grundwasserleiters
- S Speichervermögen des durchströmten Grundwasserleiters
- k Durchlässigkeitskoeffizient des betrachteten Grundwasserleiters

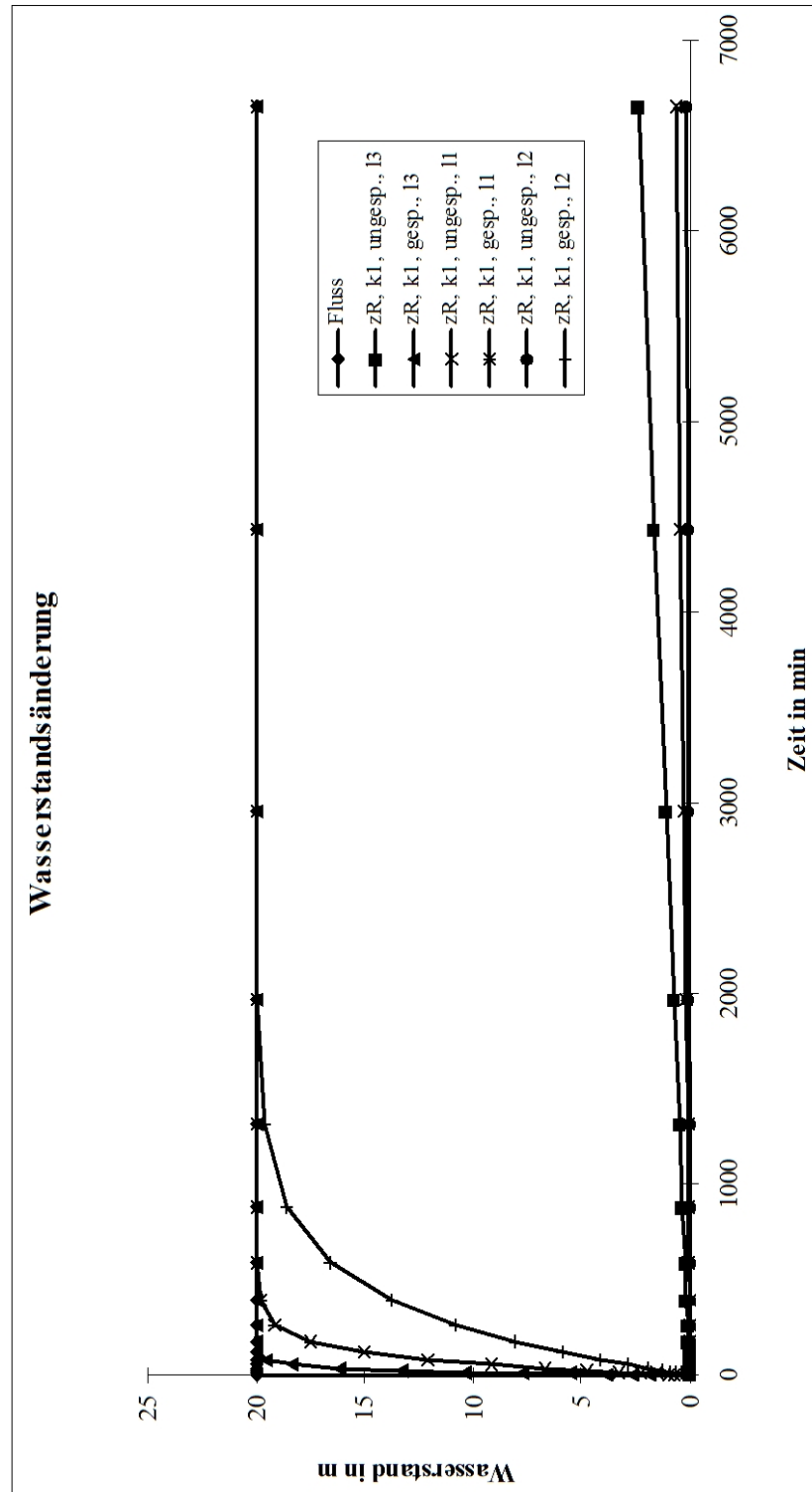


Abbildung 1.6: Abhängigkeit des Grundwasserstandes von geohydraulischen Verhältnissen

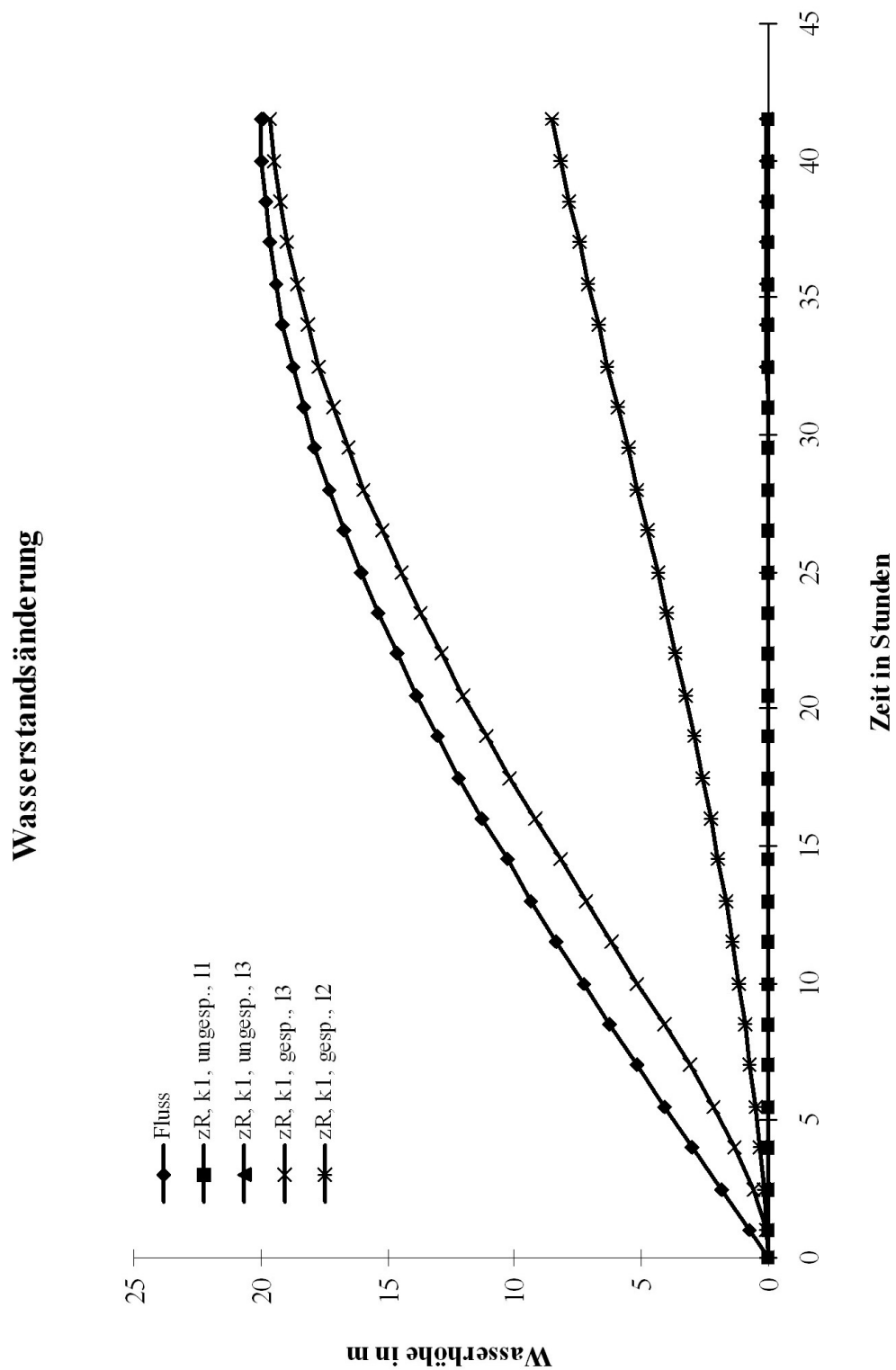


Abbildung 1.7: Grundwasserstandsänderung bei sinusförmiger Hochwasserwelle des Flusses

• zu Aufgabe 5 (s. S. 121)

(a)

Ausgangsgleichung: $T_1 \dot{C} + C = K$ mit $C(0) = 0 \text{ mg/l}$

$$T_1 \frac{dC}{dt} = K - C \implies \frac{dC}{C - K} = -\frac{dt}{T_1}$$

$$\ln \frac{|C - K|}{C_1} = -\frac{t}{T_1}$$

$$C = C_1 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + K; \quad t = 0 \text{ s}, \quad C = 0 \text{ mg/l}$$

$$C_1 = -K \implies C = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

$$T_1 = 1 \text{ d}^{-1}; \quad t = 1 \text{ d}; \quad K = 100 \text{ mg/l}$$

$$C = 100 \text{ mg/l} (1 - e^{-1}) \approx 63,2 \text{ mg/l}$$

Probe:

$$T_1 \cdot \dot{C} + C = K$$

$$C(t) = K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

$$\dot{C} = K \cdot \left(-\frac{1}{T_1}\right) \cdot \left(-e^{-\frac{t}{T_1}}\right) = \frac{K}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}}$$

$$T_1 \cdot \dot{C} + C = K$$

$$T_1 \cdot \frac{K}{T_1} e^{-\frac{t}{T_1}} + K \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) = K$$

$$K = K$$

(b)

Skizze

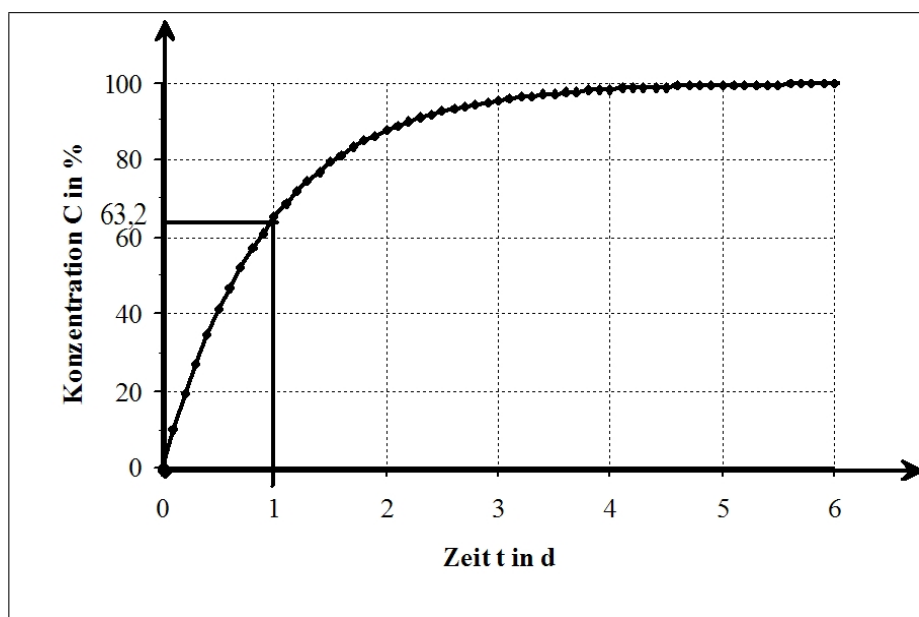


Abbildung 1.8: Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentrationsänderung

- zu Aufgabe 6 (s. S. 121)

Ausgangsgleichung: $A \frac{dh}{dt} = \dot{V}_{Zustr}$ mit $h(0) = 0$; $\dot{V} = const$

$$dh = \frac{\dot{V}}{A} dt \implies h = \frac{\dot{V}t}{A} + C; \quad C = 0$$

$$h(t) = \frac{\dot{V}}{A} \cdot t$$

Probe:

$$A \frac{dh}{dt} = \dot{V} \quad h(t) = \frac{\dot{V}}{A} t$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\dot{V}}{A};$$

$$A \frac{dh}{dt} = A \cdot \frac{\dot{V}}{A} = \dot{V}$$

• zu Aufgabe 7 (s. S. 121)

Ausgangsgleichung: $\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g$ mit $h_{t=0} = 0$; $g = 0,015m \cdot s^{-1}$ und $k = 0,01s^{-1}$

$$\frac{dh}{dt} + kh = 0$$

$$\frac{dh}{h} = -kdt \Rightarrow \ln \frac{|h|}{C} = -k \cdot t$$

$$h = C \cdot e^{-kt} \Rightarrow \dot{h} = \dot{C} \cdot e^{-kt} - C \cdot k \cdot e^{-kt}$$

$$\dot{C} \cdot e^{-kt} = g \Rightarrow dC = g \int \frac{dt}{e^{-kt}} \Rightarrow C = \frac{g}{k} \cdot e^{kt} + C_1$$

$$h = \frac{g}{k} + C_1 \cdot e^{-kt};$$

$$\text{für } t = 0; h = 0 \text{ gilt: } C_1 = -\frac{g}{k}$$

$$h = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) \Rightarrow h = 1,5 (1 - e^{-0,01t})$$

Probe:

$$\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g; \quad h(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{g}{k} (-e^{-kt}) \cdot (-k) = g \cdot e^{-kt}$$

$$\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g \cdot e^{-kt} + k \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

$$= g$$

1.6.2 Analytische Methoden - DGL höherer Ordnung

1.6.2.1 Aufgaben

Die folgenden DGL sind zu lösen:

1. $yy'' = y'^2$
2. $y'' - y' = e^x$
3. $y'' + 4y' + a_0y = 0$ für $a_0 = 3; 4; 5$

1.6.2.2 Lösungen

• zu Aufgabe 1:

$$\begin{aligned}
 y \cdot y'' &= y'^2; \implies y' = z, \quad y'' = z' \cdot z \\
 y \cdot z \cdot z' &= z^2 \implies \frac{dz}{z dy} = \frac{1}{y} \implies \frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \\
 z &= C_1 y \implies \frac{dy}{dx} = C_1 y \implies \frac{dy}{y} = C_1 dx \\
 \ln \frac{|y|}{C_2} &= C_1 x \\
 y &= C_2 \cdot e^{C_1 x}
 \end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
 y \cdot y'' &= y'^2; \quad y = C_2 \cdot e^{C_1 x} \\
 y' &= C_1 \cdot C_2 \cdot e^{C_1 x}; \quad y'' = C_1^2 \cdot C_2 \cdot e^{C_1 x} \\
 y \cdot y'' &= C_2 \cdot e^{C_1 x} \cdot C_1^2 \cdot C_2 \cdot e^{C_1 x} = (C_1 \cdot C_2 \cdot e^{C_1 x})^2 \\
 y'^2 &= (C_1 \cdot C_2 \cdot e^{C_1 x})^2; \quad y \cdot y'' \stackrel{!}{=} y'^2
 \end{aligned}$$

• zu Aufgabe 2

$$y'' - y' = e^x; \quad y' = z, \quad y'' = z'$$

$$z' - z = e^x \implies z = U(x) \cdot V(x)$$

$$z' = U' \cdot V + U \cdot V'$$

$$U' \cdot V + U \cdot V' - U \cdot V = e^x$$

$$U' \cdot V + U(V' - V) = e^x; \quad \text{da } U(V' - V) = 0$$

$$\frac{dV}{dx} = V \implies V = e^x;$$

$$\frac{dU}{dx} \cdot e^x = e^x \implies U = x \cdot C_1$$

$$z = e^x (x + C_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x(x+C_1)}$$

$$y = \int x \cdot e^x dx + \int C_1 \cdot e^x dx + C_2$$

$$y = (x - 1) e^x + C_1 e^x + C_2$$

Probe:

$$y'' - y' = e^x; \quad y = (x - 1) e^x + C_1 e^x + C_2$$

$$y' = e^x + (x - 1) e^x + C_1 e^x$$

$$y'' = e^x + e^x + (x - 1) e^x + C_1 e^x$$

$$\begin{aligned} y'' - y' &= 2e^x + (x - 1) e^x + C_1 e^x - e^x - (x - 1) e^x - C_1 e^x \\ &= e^x \end{aligned}$$

• zu Aufgabe 3

$$y'' + 4y' + a_0 y = 0 \quad \text{für } a_0 = 3; 4; 5$$

$$\text{für } a_0 = 3 : k^2 + 4k + 3 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2};$$

$$k_1 = -3; \quad k_2 = -1$$

$$y = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-x}$$

$$\text{für } a_0 = 4 : k^2 + 4k + 4 = 0 \implies (k + 2)^2 = 0 \implies k_{1,2} = -2$$

$$y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-2x}$$

$$y = e^{-2x} (C_1 + x \cdot C_2)$$

$$\text{für } a_0 = 5 : k^2 + 4k + 5 = 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2};$$

$$k_1 = -2 - i, \quad k_2 = -2 + i$$

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

Probe:

$$\text{für } a_0 = 3 : y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$$

$$y' = -3C_1 e^{-3x} - C_2 e^{-x}$$

$$y'' = 9C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$$

$$y'' + 4y' + 3y = 9C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} - 12C_1 e^{-3x} - 4C_2 e^{-x} + 3C_1 e^{-3x} + 3C_2 e^{-x}$$

$$= 0$$

$$\text{für } a_0 = 4 : y = e^{-2x} + (C_1 + xC_2)$$

$$y' = -2e^{-2x}(C_1 + xC_2) + e^{-2x} \cdot C_2$$

$$y'' = 4e^{-2x}(C_1 + xC_2) - 2e^{-2x} \cdot C_2 - 2C_2e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 4y &= 4e^{-2x}(C_1 + xC_2) - 4C_2e^{-2x} - 8e^{-2x}(C_1 + xC_2) + \\ &\quad + 4e^{-2x}C_2 + 4e^{-2x}(C_1 + xC_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{für } a_0 = 5 : y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

$$y' = -2e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-2x}(C_2 \cos x - C_1 \sin x)$$

$$\begin{aligned} y'' &= 4e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - 2e^{-2x}(C_2 \cos x - C_1 \sin x) + \\ &\quad + (-2e^{-2x})(C_2 \cos x - C_1 \sin x) + e^{-2x}(-C_2 \sin x - C_1 \cos x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 5y &= 3e^{-2x}(C_2 \sin x + C_1 \cos x) - 4e^{-2x}(C_2 \cos x - C_1 \sin x) - \\ &\quad - 8e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 4e^{-2x}(C_2 \cos x - C_1 \sin x) \\ &\quad + 5e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

1.6.3 LAPLACE-Transformation

1.6.3.1 Aufgaben

1. Lösen Sie folgende DGL mittels der LAPLACE-Transformation:

(Lösung s. S. 160)

- | | | | |
|-----|--------------------------------------|-----|--|
| (a) | $y'(x) + y = 0$ | mit | $y(x) = f(0) \cdot e^{-x}$
$f(0) = 1; \rightarrow$ Anfangsbedingung |
| (b) | $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4$ | mit | $y(0) = 1$
$y'(0) = 0$ |
| (c) | $y''(t) + 16y(t) = 32t$ | mit | $y(0) = 3$
$y'(0) = -2$ |
| (d) | $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 6e^{-2t}$ | mit | $y(0) = 3$
$y'(0) = 8$ |
| (e) | $y'''(t) + y'(t) = t + 1$ | mit | $y(0) = 1$
$y'(0) = 1$
$y''(0) = 1$ |

2. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mittels der LAPLACE-Transformation:
(Lösung s. S. 179)

- | | | | |
|-----|---|-----|--------------------------|
| (a) | $y'(t) + x(t) = 0$
$x'(t) + y(t) = 1$ | mit | $x(0) = 0$
$y(0) = 0$ |
| (b) | $2x(t) - y(t) - y'(t) = 4(1 - e^{-t})$
$2x'(t) + y(t) = 2(1 + 3e^{-2t})$ | mit | $x(0) = 0$
$y(0) = 0$ |

3. Für folgendes hydraulisches Schema (siehe Abbildung 1.9) und zugehöriges Blockmodell gilt die Differentialgleichung

$$h_{Fl} = R \cdot C \frac{dz_R}{dt} + z_R$$

Dabei ist von linearisierten Verhältnissen und einem homogenen, isotropen Grundwasserleiter mit folgenden Parametern auszugehen:

$$k = 5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}; n_0 = 0,2; z_{Rmittel} = 20m; l = 50m$$

Es soll hier also nur die Änderung gegenüber dem stationären Zustand berechnet werden.

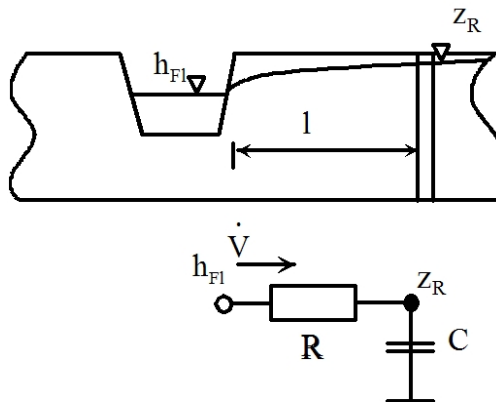


Abbildung 1.9: Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels

Berechnen Sie mit Hilfe der LAPLACE-Transformation die Änderung des Wasserstandes, wenn sich der Flusswasserspiegel in erster Näherung wie folgt ändert:

- (a) sprunghaft ($h_{fl} = h_{fl0} \cdot \mathbf{1}(t)$)
 - (b) sinusförmig ($h_{fl} = h_{fla} \sin(\omega \cdot t)$, mit $\omega = 2\pi/\tau$ und $\tau = 7$ Tage).
(Lösung s. S. 187)
4. Für die Konzentration C durch Sorption von Schadstoffen an der Bodenmatrix soll folgende DGL gelten:

$$T_1 \dot{C} + C = K$$

wobei T_1 eine Zeitkonstante und K eine Konstante sein sollen. $T_1 = 1d^{-1}$, $K = 100$
Die Konzentrationsänderung zum Zeitpunkt $t = 0$ soll $C(0) = 0$ sein.

- (a) Lösen Sie die DGL mittels der Methode der LAPLACE-Transformation und berechnen Sie die Konzentrationsänderung für den Zeitpunkt $t = 1d$.
- (b) Skizzieren Sie den prinzipiellen Zeitverlauf der Konzentrationsänderung.

(Lösung s. S. 202)

5. Der Grundwasserwiederanstieg und damit die Auffüllung der Restlöcher in den ehemaligen Braunkohlentagebauen dauert unter natürlichen Bedingungen zu lange. Deshalb wird der Auffüllvorgang ($h_{t=0} = 0$) mit einer konstanten Fremdeinspeisung beschleunigt (siehe Abbildung 1.10). Die dazugehörige Differentialgleichung lautet:

$$A \frac{dh}{dt} = \dot{V}_{Zustr}$$

Überführen Sie diese Differentialgleichung mittels LAPLACE-Transformation in die Bildebene und lösen Sie diese Gleichung nach der gesuchten Größe auf
(Lösung s. S. 204).

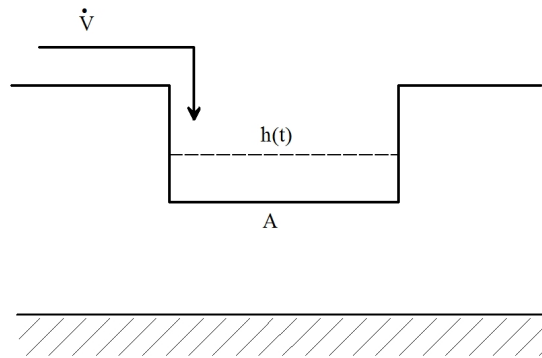


Abbildung 1.10: Füllvorgang eines Restloches

6. Es ist folgende Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g \quad \text{mit} \quad h_{t=0} = 0$$

$$g = 0,015 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ und } k = 0,01 \text{ s}^{-1}$$

Lösen Sie die Differentialgleichung mittels der LAPLACE-Transformation (Lösung s. S. 205).

1.6.3.2 Lösungen

Die Gesetze der LAPLACE-Transformation für die Differentiation lauten:

$$L\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$$

$$L\{f''(t)\} = p^2F(p) - f(0)p - f'(0) \quad (1.2)$$

$$L\{f^n(t)\} = p^nF(p) - f(0)p^{n-1} - f'(0)p^{n-2} - \dots - f^{(n-2)}(0)p - f^{(n-1)}(0)$$

Tabelle 1.1: Korrespondenztabelle

Nr.	$\mathbf{F(p)} = \mathbf{L}\{\mathbf{f(t)}\}$	$\mathbf{f(t)} = \mathbf{L}^{-1}\{\mathbf{F(p)}\}$
1	0	0
2	$\frac{1}{p}$	1
3	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{(p-\alpha)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}$
5	$\frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$	$\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$
6	$\frac{p}{(p-\alpha)(p-\beta)}$	$\beta \frac{e^{\beta t} - \alpha e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$
7	$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$	$\sin \alpha t$
8	$\frac{\alpha \cos \beta + p \sin \beta}{p^2 + \alpha^2}$	$\sin(\alpha t + \beta)$
9	$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$	$\cos \alpha t$
10	$\frac{p \cos \beta - \alpha \sin \beta}{p^2 + \alpha^2}$	$\cos(\alpha t + \beta)$

Tabelle 1.2: Korrespondenztabelle - Fortsetzung

Nr.	$F(p) = L\{f(t)\}$	$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$
11	$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\sinh \alpha t$
12	$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$	$\cosh \alpha t$
13	$\frac{p^2 + 2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}$	$\cos^2 \alpha t$
14	$\frac{2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}$	$\sin^2 \alpha t$
15	$\frac{p^2 - 2\alpha^2}{p(p^2 - 4\alpha^2)}$	$\sinh^2 \alpha t$
16	$\frac{2\alpha^2 p}{p^4 + 4\alpha^4}$	$\sin \alpha t \sinh \alpha t$
17	$\frac{\alpha(p^2 + 2\alpha^2)}{p^4 + 4\alpha^4}$	$\sin \alpha t \cosh \alpha t$
18	$\frac{2\alpha p}{(p^2 + \alpha^2)}$	$t \sin \alpha t$
19	$\frac{p^2 - \alpha^2}{(p^2 + \alpha^2)^2}$	$t \cos \alpha t$
20	$\frac{2\alpha p}{(p^2 - \alpha^2)^2}$	$t \sinh \alpha t$
21	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
22	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$	$2\frac{1}{\sqrt{\frac{t}{\pi}}}$
23	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}}$	$J_0(\alpha t)$ (BESSEL-Funktion der Ordnung 0)
24	$\frac{1}{\sqrt{p^2 - \alpha^2}}$	$I_0(\alpha t)$ (modifizierte BESSEL-Funktion der Ordnung 0)
25	$\arctan \frac{\alpha}{p}$	$\frac{\sin(\alpha t)}{t}$
26	$\arctan \frac{2\alpha p}{p^2 - \alpha^2 + \beta^2}$	$\frac{2}{t} \sin(\alpha t) \cdot \cos(\beta t)$

- zu Aufgabe 1 (s. S. 155)

(a)

Ausgangsgleichung:

$$y'(x) + y = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y(x) &= f(0) \cdot e^{-x} \\ f(0) &= 1; \rightarrow \text{Anfangsbedingung} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + y &= 0 \\ y &= f(x) \end{aligned}$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation:

Die formale Anwendung der LAPLACE-Transformation führt zu:

$$L \left\{ \frac{dy}{dx} + y \right\} = L \{0\}$$

Entsprechend den Rechenregeln, Additions- und Differentiationssatz, bei der LAPLACE-Transformation erhält man:

$$L \{f'(x)\} = pF(p) - f(0)$$

$$L \{f(x)\} = F(p)$$

Daraus folgt:

$$pF(p) - f(0) + F(p) = 0$$

Es ist zu erkennen, dass die Differentialgleichung in eine algebraische Gleichung mit p als unabhängige Variable übergegangen ist.

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p)$:

$$pF(p) + F(p) = f(0)$$

$$F(p)(p+1) = f(0)$$

$$F(p) = f(0) \frac{1}{(p+1)}$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t)$:

$$L^{-1}\{F(p)\} = L^{-1}\left\{f(0) \frac{1}{(p+1)}\right\}$$

$$y = f(x) = f(0) \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)}\right\}$$

Dabei wird $f(0)$ als Konstante betrachtet, da der Anfangswert $f(0)$ zeitunabhängig ist. Die Rücktransformation kann mittels der Korrespondenz- oder der Residuummethode erfolgen.

Variante 1: Korrespondenz-Methode

Entsprechend Nr. 4 der Korrespondenztabelle (siehe Seite 158) gilt:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)^n}\right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{at}$$

Vergleicht man die Funktion $F(p)$ mit der Form in der Korrespondenztabelle, so erhält man:

$$n = 1$$

$$a = -1$$

$$t \Rightarrow x$$

Damit ergibt sich die LAPLACE-Rücktransformierte zu:

$$y(x) = f(0) \frac{x^{1-1}}{(1-1)!} \cdot e^{(-1)x}$$

$$y(x) = f(0) \cdot e^{-x}$$

mit

$$x^0 = 1$$

$$0! = 1$$

Man sieht, dass dies das gleiche Ergebnis ist, welches man auch für die direkte Lösung dieser DGL erhält. Der Faktor $f(0)$ hat hier die gleiche Bedeutung wie die Integrationskonstante C , die sonst über die Anfangsbedingung zu bestimmen ist.

Variante 2: Residuuum-Methode

Die Residuuum-Methode geht davon aus, dass die allgemein gebrochene rationale Funktion von p in eine Summe von Partialbrüchen der Form

$$\frac{K(p)_n}{(p - p_0)^n}$$

zerlegt wird. Für diese Grundform kann die Rücktransformierte mit

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p - p_0)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{p_0 t}$$

angegeben werden. Durch Gleichsetzung der gebrochenen rationalen Funktion $F(p)$ mit der Summe der Partialbrüche und anschließenden Koeffizientenvergleich werden die Funktionen $K(p)_n$ berechnet.

Dabei sind die Polstellen der Partialbrüche die Nullstellen des Nennerpolynomes.

In der vorliegenden Aufgabenstellung besteht die Funktion $F(p)$ bereits aus nur einem Partialbruch, da nur ein Nenner vorhanden ist. Damit kann dieser direkt über die Korrespondenztabelle, wie bereits oben gezeigt, gelöst werden.

Probe:

$$y(0) = C$$

$$y(x) = C \cdot e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = -C \cdot e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} + y = -C \cdot e^{-x} + C \cdot e^{-x}$$

$$= 0$$

(b)

Ausgangsgleichung:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation:

Die formale LAPLACE-Transformation lautet:

$$L\{y''(t) - 3y'(t) + 2y(t)\} = L\{4\}$$

Es gilt:

$$Y = F(p)$$

Unter Beachtung der Korrespondenztabelle (siehe Seite 158, Nr. 2), mit

$$L\{1\} = \frac{1}{p}$$

und des Differentiationssatzes erhält man:

$$p^2Y - y(0)p - y'(0) - 3pY + 3y(0) + 2Y = \frac{4}{p}$$

Nach Einführung der Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$p^2Y - p - 3pY + 3 + 2Y = \frac{4}{p}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p)$:

$$\begin{aligned} Y(p^2 - 3p + 2) - p + 3 &= \frac{4}{p} \\ Y(p^2 - 3p + 2) &= \frac{4}{p} + p - 3 \\ Y &= \frac{\frac{4}{p} + p - 3}{(p^2 - 3p + 2)} \\ Y &= \frac{p^2 - 3p + 4}{p(p^2 - 3p + 2)} \end{aligned}$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t)$:

Zur Rücktransformation wird die Residuum-Methode angewendet. Dabei muss diese gebrochene rationale Funktion mittels der Methode der Partialbruchzerlegung in eine Summe von gebrochenen Polynomen der Nennernullstellen zerlegt werden. Die Nennernullstellen sind:

$$p_1 = 0$$

$$p^2 - 3p + 2 = 0$$

$$p_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$

$$p_2 = 2$$

$$p_3 = 1$$

Damit lautet die Summe der Partialbrüche:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{A}{p} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-1} \\ Y &= \frac{A \cdot (p-2) \cdot (p-1) + B \cdot p \cdot (p-1) + C \cdot p \cdot (p-2)}{p(p^2 - 3p + 2)} \\ Y &= \frac{Ap^2 - 3Ap + 2A + Bp^2 - Bp + Cp^2 - 2Cp}{p(p^2 - 3p + 2)} \end{aligned}$$

Variante 1

Führt man jetzt den Vergleich der Zählerpolynome durch:

$$p^2 - 3p + 4 = Ap^2 - 3Ap + 2A + Bp^2 - Bp + Cp^2 - 2Cp$$

und setzt die Koeffizienten der jeweiligen Polynomglieder, geordnet nach Potenzen von p , gleich, so erhält man:

$$p^2 \quad 1 = A + B + C$$

$$p^1 \quad -3 = -3A - B - 2C$$

$$p^0 \quad 4 = 2A$$

$$A = 2$$

$$B = 1$$

$$C = -2$$

Damit lautet die Partialbruchsumme

$$Y = \frac{2}{p} + \frac{1}{p-2} + \frac{-2}{p-1}$$

Die Rücktransformation kann über die Korrespondenztabelle (siehe Seite 158 Nr. 2 und 4) erfolgen:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} = 1$$
$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p-\alpha} \right\} = e^{\alpha t}$$

Mit $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = 1$ erhält die rücktransformierte Lösung die Form:

$$y(t) = 2 + e^{2t} - 2e^t$$

Variante 2

Dieses Ergebnis kann man auch erzielen, wenn man die komplizierteren Korrespondenzen (siehe Seite 158, Nr. 5 und 6) benutzt. In diesen Fällen kann man folgende teilweise Partialbruchzerlegung durchführen:

$$Y = \frac{A}{p} + \frac{Bp}{(p-2)(p-1)} + \frac{C}{(p-2)(p-1)}$$
$$Y = \frac{A \cdot (p^2 - 3p + 2) + Bp^2 + Cp}{p(p^2 - 3p + 2)}$$

Der Vergleich der Zählerpolynome liefert:

$$p^2 - 3p + 4 = Ap^2 - 3Ap + 2A + Bp^2 + Cp$$

Die Koeffizienten der jeweiligen Polynomglieder, geordnet nach Potenzen von p , lauten:

$$p^2 \quad 1 = A + B$$

$$p^1 \quad -3 = -3A + C$$

$$p^0 \quad 4 = 2A$$

$$A = 2$$

$$B = -1$$

$$C = 3$$

Damit lautet die Partialbruchsumme:

$$Y = \frac{2}{p} - \frac{p}{(p-2)(p-1)} + \frac{3}{(p-2)(p-1)}$$

Die Rücktransformation kann über die Korrespondenztabelle (siehe Seite 158, Nr.2, 5 und 6) erfolgen:

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} &= 1 \\ L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)} \right\} &= \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha} \\ L^{-1} \left\{ \frac{p}{(p-\alpha)(p-\beta)} \right\} &= \beta \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha} \end{aligned}$$

Mit

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 2$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)(p-2)}\right\} &= \frac{e^{2t} - e^t}{2-1} \\L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)(p-2)}\right\} &= e^{2t} - e^t \\L^{-1}\left\{\frac{p}{(p-1)(p-2)}\right\} &= 2\frac{e^{2t} - e^t}{2-1} \\L^{-1}\left\{\frac{p}{(p-1)(p-2)}\right\} &= 2(e^{2t} - e^t)\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Lösung zu

$$\begin{aligned}y(t) &= 2 - 2(e^{2t} - e^t) + 3(e^{2t} - e^t) \\y(t) &= 2 + e^{2t} - e^t\end{aligned}$$

Probe:

Die Lösung und deren Ableitungen

$$\begin{aligned}y(t) &= 2 + e^{2t} - 2e^t \\y'(t) &= 2e^{2t} - 2e^t \\y''(t) &= 4e^{2t} - 2e^t\end{aligned}$$

erfüllen die Randbedingungen und die Ausgangsdifferentialgleichung:

$$\begin{aligned}y(0) &= 2 + e^{2 \cdot 0} - 2 \cdot e^0 \\y(0) &= 2 + 1 - 2 = 1 \\y'(0) &= 2e^{2 \cdot 0} - 2e^0 \\y'(0) &= 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0\end{aligned}$$

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 4$$

$$4e^{2t} - 2e^t - 6e^{2t} + 6e^t + 4 + 2e^{2t} - 4e^t \stackrel{?}{=} 4$$

$$e^{2t}(4 - 6 + 2) + e^t(-2 + 6 - 4) + 4 \stackrel{!}{=} 4$$

(c)

Ausgangsgleichung:

$$y''(t) + 16y(t) = 32t \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} y(0) = 3 \\ y'(0) = -2 \end{matrix}$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation:

$$L\{y''(t) + 16y(t)\} = L\{32t\}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0) = 3$$

$$y'(0) = -2$$

Die Benutzung der Korrespondenztabelle (siehe Seite 158, Nr. 3) zur Transformation führt auf

$$L\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} = \frac{1}{p^n}$$

$$p^2Y - y(0)p - y'(0) + 16Y = 32 \cdot L\left\{\frac{t^{2-1}}{(2-1)!}\right\}$$

$$p^2Y - y(0)p - y'(0) + 16Y = \frac{32}{p^2}$$

Nach Einführung der Anfangsbedingungen folgt:

$$p^2Y - 3p + 2 + 16Y = \frac{32}{p^2}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p)$:

$$\begin{aligned}Y(p^2 + 16) &= \frac{32}{p^2} + 3p - 2 \\Y &= \frac{32}{p^2(p^2 + 16)} + \frac{3p - 2}{(p^2 + 16)} \\Y &= \frac{3p^3 - 2p^2 + 32}{p^2 \cdot (p^2 + 16)}\end{aligned}\tag{1.3}$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t)$:

Zur Rücktransformation wird die Residuum-Methode angewendet. Dabei muss diese gebrochene rationale Funktion mittels der Methode der Partialbruchzerlegung in eine Summe von gebrochenen Polynomen der Nennernullstellen zerlegt werden.

Variante 1

Die Nullstellen des Nennerpolynoms sind:

$$p_{1,2} = 0$$

$$p_{3,4} = \pm\sqrt{-16}$$

Die Zerlegung der gebrochenen Funktion in die Reihe der Partialbrüche ergibt:

$$\begin{aligned}Y &= \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{(p + \sqrt{-16})} + \frac{D}{(p - \sqrt{-16})} \\Y &= \frac{p^3(A + C + D) + p^2(B - C\sqrt{-16} + D\sqrt{-16}) + p^1 16A + p^0 16B}{p^2 \cdot (p^2 + 16)}\end{aligned}$$

Führt man jetzt den Vergleich der Zählerpolynome durch:

$$3p^3 - 2p^2 + 32 = p^3(A + C + D) + p^2(B - C\sqrt{-16} + D\sqrt{-16}) + p^1 16A + p^0 16B$$

und setzt die Koeffizienten der jeweiligen Polynomglieder, geordnet nach Potenzen von p , gleich, so erhält man die Faktoren der Potenzreihe von p :

$$p^3 \quad 3 = (A + C + D)$$

$$p^2 \quad -2 = B - C\sqrt{-16} + D\sqrt{-16}$$

$$p^1 \quad 0 = 16A; \implies A = 0$$

$$p^0 \quad 32 = 16B; \implies B = 2$$

Daraus folgt mit Einführung der komplexen Zahl $\sqrt{-1} = j$:

$$-2 = 2 - 4Cj + 4Dj \implies -4 = 4Cj + 4Dj \implies Cj - Dj = 1$$

$$\begin{array}{lcl} Cj - Dj = 1 & \implies & Cj - Dj = 1 \\ & & + \implies 2Cj = 3j + 1 \\ C + D = 3 \mid \cdot j & \implies & Cj + Dj = 3j \end{array}$$

$$\implies C = \frac{3j+1}{2j}$$

$$D = 3 - C \implies D = 3 - \frac{3j+1}{2j} \implies D = \frac{6j-3j-1}{2j}$$

$$D = \frac{3j-1}{2j}$$

Damit erhält man die Lösung Y in der Bildebene zu:

$$Y = \frac{0}{p} + \frac{2}{p^2} + \frac{\frac{3j+1}{2j}}{(p+4j)} + \frac{\frac{3j-1}{2j}}{(p-4j)}$$

Für die Rücktransformation werden folgende Korrespondenzen (siehe Seite. 158, Nr. 3 und 4) verwendet:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$n = 2$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} \right\} = \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} = t$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-\alpha)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t}$$

$$n = 1$$

$$\alpha_{1,2} = \pm 4j$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-4j)^1} \right\} = \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} e^{4jt} = e^{4jt}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-(-4j))^1} \right\} = \frac{t^{1-1}}{(1-1)!} e^{-4jt} = e^{-4jt}$$

Damit erhält man die Lösung in der Zeitebene:

$$y(t) = 2t + \frac{3j+1}{2j} \cdot e^{-4jt} + \frac{3j-1}{2j} \cdot e^{4jt}$$

$$y(t) = 2t + \frac{3}{2} (e^{4jt} + e^{-4jt}) - \frac{1}{2j} (e^{4jt} - e^{-4jt})$$

Mit der EULER-Formel werden die e -Funktionen mit den komplexen Argumenten in trigonometrische Funktionen umgeformt in:

$$\frac{e^{aj} - e^{-aj}}{2j} = \sin a$$

$$\frac{e^{aj} + e^{-aj}}{2} = \cos a$$

$$y(t) = 2t + 3 \cos(4t) - \sin(4t) \quad (1.4)$$

Variante 2

Die Berechnung kann man sich auch etwas erleichtern, indem man nicht die vollständige Partialbruchzerlegung durchführt, sondern in der Korrespondenztabelle nach komplizierteren Transformationen sucht. So kann man folgende Rücktransformationsskorrespondenzen

(siehe Seite 158, Nr. 7 und 9) finden.

$$L^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \right\} = \sin \alpha t$$
$$L^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2 + \alpha^2} \right\} = \cos \alpha t$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit der Gleichung 1.3, so erhält man folgende Zerlegung:

$$Y = \frac{3p^3 - 2p^2 + 32}{p^2 \cdot (p^2 + 16)}$$
$$Y = \frac{3p - 2}{(p^2 + 16)} + \frac{32}{p^2 \cdot (p^2 + 16)}$$

Dafür kann man folgende Zerlegung ansetzen:

$$Y = \frac{A}{p^2} + \frac{Bp}{(p^2 + 16)} + \frac{C}{(p^2 + 16)} \quad (1.5)$$
$$Y = \frac{A \cdot (p^2 + 16) + Bp^3 + Cp^2}{p^2 \cdot (p^2 + 16)}$$

Der Vergleich der Zählerpolynome ergibt:

$$3p^3 - 2p^2 + 32 = A \cdot (p^2 + 16) + Bp^3 + Cp^2$$

Daraus folgt der Vergleich der Potenzreihenglieder:

$$p^3 \quad 3 = B$$

$$p^2 \quad -2 = A + C$$

$$p^0 \quad 32 = 16A$$

$$A = 2$$

$$B = 3$$

$$C = -4$$

Daraus folgt bei Einsatz in Gleichung 1.5:

$$Y = \frac{2}{p^2} + \frac{3p}{(p^2 + 16)} - \frac{4}{(p^2 + 16)}$$

Hierauf können die Korrespondenzen (siehe Seite 158, Nr. 3, 7 und 9) angewendet werden:

$$\begin{aligned} L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^n} \right\} &= \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ L^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2} \right\} &= \sin \alpha t \\ L^{-1} \left\{ \frac{p}{p^2 + \alpha^2} \right\} &= \cos \alpha t \end{aligned}$$

Mit

$$n = 2$$

$$\alpha = 4$$

ergibt sich:

$$y(t) = 2t + 3 \cos(4t) - \sin(4t)$$

Die ist das gleiche Ergebnis, wie es über die vollständige Partialbruchzerlegung (Gleichung 1.4) erzielt wurde.

Probe:

$$y(t) = 2t + 3 \cos(4t) - \sin(4t)$$

$$y' = 2 + 3(-\sin(4t)) \cdot 4 - 4 \cos 4t$$

$$y'' = -12 \cos(4t) \cdot 4 + 16 \sin(4t)$$

$$- 48 \cos(4t) + 16 \sin(4t) + 32t + 48 \cos(4t) - 16 \sin(4t) \stackrel{!}{=} 32t$$

(d)

Ausgangsgleichung:

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 6e^{-2t} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} y(0) = 3 \\ y'(0) = 8 \end{array}$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation:

Aus der formalen Anwendung der LAPLACE-Transformation und der Differentiationsregel folgt:

$$\begin{aligned} L\{y''(t) + 4y'(t) + 4y(t)\} &= L\{6e^{-2t}\} \\ p^2Y - y(0)p - y'(0) + 4pY - 4 \cdot y(0) + 4Y &= L\{6e^{-2t}\} \end{aligned}$$

Die Benutzung der Korrespondenztabelle (siehe Seite 158, Nr. 4) zur Transformation ergibt:

$$L\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}\right\} = \frac{1}{(p-\alpha)^n}$$

$$\alpha = -2$$

$$n = 1$$

$$\begin{aligned} L\left\{\frac{t^{1-1}}{(1-1)!}e^{-2t}\right\} &= \frac{1}{(p+2)^1} \\ L\{e^{-2t}\} &= \frac{1}{(p+2)} \end{aligned}$$

Nach Einführung der Anfangsbedingungen folgt:

$$p^2Y - 3p - 8 + 4pY - 4 \cdot 3 + 4Y = \frac{6}{(p+2)}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p)$:

$$\begin{aligned} Y(p^2 + 4p + 4) &= \frac{3p^2 + 26p + 46}{p + 2} \\ Y &= \frac{3p^2 + 26p + 46}{(p + 2)^3} \\ &= \frac{A}{p + 2} + \frac{B}{(p + 2)^2} + \frac{C}{(p + 2)^3} \\ &= \frac{A(p + 2)^2 + B(p + 2) + C}{(p + 2)^3} \\ &= \frac{Ap^2 + p(4A + B) + 4A + 2B + C}{(p + 2)^3} \end{aligned}$$

$$p^2 : 3 = A$$

$$p^1 : 26 = 4A + B$$

$$p^0 : 46 = 4A + 2B + C$$

$$B = 14$$

$$C = 46 - 12 - 28 = 6$$

$$Y = \frac{3}{p + 2} + \frac{14}{(p + 2)^2} + \frac{6}{(p + 2)^3}$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t)$:

Die Rücktransformation kann sofort aus den Korrespondenzen (siehe Seite 158, Nr.4) abgelesen werden:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p - \alpha)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t}; \quad \alpha = -2$$

$$n = 1 \implies e^{-2t}$$

$$n = 2 \implies t \cdot e^{-2t}$$

$$n = 3 \implies \frac{t^2}{2} \cdot e^{-2t}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p - (-2))^3} \right\} = \frac{t^{3-1}}{(3-1)!} e^{-2t} = \frac{t^2}{2} \cdot e^{-2t}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p - (-2))^2} \right\} = \frac{t^{2-1}}{(2-1)!} e^{-2t} = t \cdot e^{-2t}$$

$$y(t) = 3e^{-2t} + 14t \cdot e^{-2t} + 3t^2 \cdot e^{-2t}$$

$$y(t) = e^{-2t} (3t^2 + 14t + 3)$$

Probe

Die Lösung und ihre Ableitungen:

$$y(t) = e^{-2t} (3t^2 + 14t + 3)$$

$$y'(t) = -2e^{-2t} (3t^2 + 14t + 3) + e^{-2t} (6t + 14)$$

$$y''(t) = 4e^{-2t} (3t^2 + 14t + 3) - 2e^{-2t} (6t + 14) - 2e^{-2t} (6t + 14) + 6e^{-2t}$$

in die Differentialgleichung eingesetzt, ergibt sich:

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) \stackrel{?}{=} 6e^{-2t}$$

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-2t} [4(3t^2 + 14t + 3) - 2(6t + 14) - 2(6t + 14) + 6$$

$$- 8(3t^2 + 14t + 3) + 4(6t + 14) + 4(3t^2 + 14t + 3)]$$

$$= 6e^{-2t}$$

$$6e^{-2t} \stackrel{!}{=} 6e^{-2t}$$

(e)

Ausgangsgleichung:

$$y'''(t) + y'(t) = t + 1 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \\ y''(0) &= 1 \end{aligned}$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation:

$$L\{y'''(t) + y'(t)\} = L\{t + 1\}$$

Die Benutzung der Differentiationsregeln und der Korrespondenztabelle (siehe Seite 158, Nr. 2 und 3) zur Transformation führt auf:

$$L\{y'''(t)\} = p^3 Y - y(0)p^2 - y'(0)p - y''(0)$$

$$L\{y'(t)\} = pY - y(0)$$

$$p^3 Y - y(0)p^2 - y'(0)p - y''(0) + pY - y(0) = L\{t\} + L\{1\}$$

$$L\{1\} = \frac{1}{p}$$

$$L\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right\} = \frac{1}{p^n}$$

$$n = 2$$

$$t = \frac{t^{2-1}}{(2-1)!}$$

$$L\left\{\frac{t^{2-1}}{(2-1)!}\right\} = \frac{1}{p^2}$$

Nach Einführung der Anfangsbedingungen:

$$p^3 Y - p^2 - p - 1 + pY - 1 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

$$Yp \cdot (p^2 + 1) - (p^2 + p + 2) = \frac{1+p}{p^2}$$

$$Yp \cdot (p^2 + 1) = \frac{(p^2 + p + 2) \cdot p^2 + 1 + p}{p^2}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p)$:

$$Yp(p^2 + 1) = \frac{p^4 + p^3 + 2p^2 + p + 1}{p^2} \Rightarrow Y = \frac{p^4 + p^3 + 2p^2 + p + 1}{p^3(p^2 + 1)}$$

$$Y = \frac{(p^2 + 1)^2 + p(p^2 + 1)}{p^3(p^2 + 1)} = \frac{p^2 + 1}{p^3} + \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^2}$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t)$:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad n=1; \Rightarrow 1 \quad n=2; \Rightarrow t \quad n=3; \Rightarrow \frac{t^2}{2}$$

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + t + 1$$

Probe:

$$y(t) = \frac{t^2}{2} + t + 1; \quad y' = \frac{1}{2}2t + 1 = t + 1; \quad y'' = 1; \quad y''' = 0$$

$$0 + t + 1 \stackrel{!}{=} t + 1$$

- zu Aufgabe 2 (s. S. 155)

(a)

Ausgangsgleichung:

$$\begin{array}{ll} y'(t) + x(t) = 0 & \text{mit} \quad x(0) = 0 \\ x'(t) + y(t) = 1 & y(0) = 0 \end{array}$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation

Die jeweilige Transformation der beiden Gleichungen ergibt:

$$y'(t) + x(t) = 0$$

$$L\{y'(t) + x(t)\} = L\{0\}$$

$$pY - y(0) + X = 0 \quad \text{mit Anfangsbed. } y(0) = 0$$

$$pY + X = 0$$

$$x'(t) + y(t) = 1$$

$$L\{x'(t) + y(t)\} = L\{1\}$$

$$pX - x(0) + Y = \frac{1}{p} \quad \text{mit Anfangsbed. } x(0) = 0$$

$$pX + Y = \frac{1}{p}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p)$:

Damit hat man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten X und Y

$$pY + X = 0$$

$$pX + Y = \frac{1}{p}$$

$$X = -pY$$

$$-p^2Y + Y = \frac{1}{p}$$

und erhält die Lösung in der Bildebene

$$Y = \frac{-1}{p(p^2 - 1)}$$

$$X = \frac{1}{(p^2 - 1)}$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t)$:

Die Rücktransformation soll mittels der Partialbruchzerlegung erfolgen.

$$Y = \frac{-1}{p(p^2 - 1)}$$

$$Y = \frac{-1}{p \cdot (p - 1) \cdot (p + 1)}$$

$$Y = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p - 1)} + \frac{C}{(p + 1)}$$

$$Y = \frac{A(p^2 - 1) + B(p^2 + p) + C(p^2 - p)}{p(p^2 - 1)}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich der Potenzen von p der Zählerpolynome erhält man:

$$p^2 : \quad 0 = A + B + C$$

$$p^1 : \quad 0 = B - C$$

$$p^0 : \quad -1 = -A$$

Daraus folgt:

$$A = 1; \quad B = \frac{1}{2}; \quad C = \frac{1}{2}$$

$$Y = \frac{1}{p} - \frac{1}{2 \cdot (p-1)} - \frac{1}{2 \cdot (p+1)}$$

Unter Ausnutzung der Rücktransformationskorrespondenzen (siehe Seite 158, Nr.7) erhält man

$$L^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} \right\} = \sinh \alpha t$$

$$\alpha = 1$$

$$x(t) = \sinh t$$

$$y(t) = 1 - \cosh t$$

Probe:

$$y' = -\sinh t$$

$$x' = \cosh t$$

$$y' + x = -\sinh t + \sinh t \stackrel{!}{=} 0$$

$$x' + y = \cosh t + 1 - \cosh t \stackrel{!}{=} 1$$

(b)

Ausgangsgleichung:

$$\begin{aligned} 2x(t) - y(t) - y'(t) &= 4(1 - e^{-t}) \\ 2x'(t) + y(t) &= 2(1 + 3e^{-2t}) \end{aligned} \quad ; \text{ mit } \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation

Die Transformation der ersten Gleichung ergibt

$$L\{2x(t) - y(t) - y'(t)\} = L\{4(1 - e^{-t})\}$$

$$2X - Y - pY + y(0) = L\{4(1 - e^{-t})\}$$

Aus der Korrespondenztabelle (siehe Seite 158, Nr. 5) erhält man

$$L\left\{\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}\right\} = \frac{1}{(p - \alpha)(p - \beta)}$$

$$\beta = 0$$

$$\alpha = -1$$

$$L\left\{\frac{e^{0t} - e^{-1t}}{0 - (-1)}\right\} = \frac{1}{(p - (-1))(p - 0)}$$

$$L\{1 - e^{-t}\} = \frac{1}{p \cdot (p + 1)}$$

Nach Einführung der Anfangsbedingungen ergibt sich:

$$2X - Y - pY = \frac{4}{p \cdot (p + 1)}$$

Die Transformation der zweiten Gleichung und die Einführung der Anfangsbedingungen ergibt:

$$L\{2x'(t) + y(t)\} = L\{2(1 + 3e^{-2t})\}$$

$$2pX - 2x(0) + Y = L\{2(1 + 3e^{-2t})\}$$

$$2pX + Y = L\{2\} + L\{6e^{-2t}\}$$

Aus der Korrespondenztabelle (siehe Seite 158, Nr. 2 und 5) erhält man:

$$L\{1\} = \frac{1}{p}$$

$$L\left\{\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}\right\} = \frac{1}{(p-\alpha)^n}$$

$$n = 1$$

$$\alpha = -2$$

$$L\left\{\frac{t^{1-1}}{(1-1)!}e^{-2t}\right\} = \frac{1}{p-(-2)}$$

$$L\{e^{-2t}\} = \frac{1}{p+2}$$

$$2pX + Y = \frac{2}{p} + \frac{6}{p+2}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p)$:

Damit sind die zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten X und Y zu lösen.

$$(1) \quad 2X - Y - pY = \frac{4}{p \cdot (p+1)} \quad | \cdot p$$

$$(2) \quad 2pX + Y = \frac{2}{p} + \frac{6}{p+2}$$

$$(1) \quad 2Xp - pY - p^2Y = \frac{4}{p+1}$$

$\Downarrow$

$$(2) - (1) \quad Y + pY + p^2Y = \frac{2}{p} - \frac{4}{p+1} + \frac{6}{p+2}$$

$$Y(1+p+p^2) = \frac{2(p+1)(p+2) - 4p(p+2) + 6p(p+1)}{p(p+1)(p+2)}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2(p+1)(p+2) - 4p(p+2) + 6p(p+1)}{p(p+1)(p+2)(p^2+p+1)} \\ &= \frac{2p^2 + 6p + 4 - 4p^2 - 8p + 6p^2 + 6p}{p(p+1)(p+2)(p^2+p+1)} = \frac{4p^2 + 4p + 4}{p(p+1)(p+2)(p^2+p+1)} \\ &= \frac{4}{p(p+1)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{p+2} \\ &= \frac{A(p+1)(p+2) + Bp(p+2) + Cp(p+1)}{p(p+1)(p+2)} \\ &= \frac{Ap^2 + 3Ap + 2A + Bp^2 + 2Bp + Cp^2 + Cp}{p(p+1)(p+2)} \\ Y &= \frac{p^2(A+B+C) + p(3A+2B+C) + 2A}{p(p+1)(p+2)} \end{aligned}$$

Daraus erfolgt der Vergleich der Potenzreihenglieder :

$$p^2 \quad A + B + C = 0$$

$$p^1 \quad 3A + 2B + C = 0$$

$$p^0 \quad 2A = 4$$

$$A = 2$$

$$B + C = -2$$

$$2B + C = -6$$

$$B = -4$$

$$C = 2$$

In die Gleichung eingesetzt, ergibt sich:

$$Y = \frac{2}{p} - \frac{4}{p+1} + \frac{2}{p+2}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \right\} = 1; \implies L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p - \alpha)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t}$$

$$\alpha = -2$$

$$n = 1$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t)$:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+2} \right\} = e^{-2t}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+1} \right\} = e^{-t}$$

$$Y = 2e^{-2t} - 4e^{-t} + 2$$

$$y(t) = 2(e^{-2t} - 2e^{-t} + 1)$$

Rücktransformation und Bestimmung von $x(t)$:

$$2Xp + \frac{2}{p} + \frac{2}{p+2} - \frac{4}{p+1} = \frac{2}{p} + \frac{6}{p+2}$$

$$2pX = \frac{4}{p+2} + \frac{4}{p+1}$$

$$X = \frac{2}{p(p+2)} + \frac{2}{p(p+1)}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)} \right\} = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = -2$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p(p+2)} \right\} = \frac{e^{-2t} - 1}{-2}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p(p+1)} \right\} = \frac{e^{-t} - 1}{-2} = 1 - e^{-2t} - 2e^{-t}$$

$$x(t) = 1 - e^{-2t} + 2 - 2e^{-t}$$

$$= 3 - e^{-2t} - 2e^{-t}$$

Probe:

$$y' = 2(-2e^{-2t} + 2e^{-t}) = 4e^{-t} - 4e^{-2t}$$

$$x' = 2e^{-2t} + 2e^{-t}$$

$$2x - y - y' = 6 - 2e^{-2t} - 4e^{-t} - 2e^{-2t} + 4e^{-t} - 2 - 4e^{-t} + 4e^{-2t}$$

$$= 4 - 4e^{-t} = 4(1 - e^{-t})$$

$$2x' + y = 4e^{-2t} + 4e^{-t} + 2e^{-2t} - 4e^{-t} + 2$$

$$= 6e^{-2t} + 2 = 2(1 + 3e^{-2t})$$

- zu Aufgabe 3 (s. S. 155)

Ausgangsgleichung:

$$h_{Fl} = R \cdot C \frac{dz_R}{dt} + z_R, \quad \text{mit} \quad k = 5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}; n_0 = 0,2$$

$$z_{Rmittel} = 20m; l = 50m$$

Dabei ist von linearisierten Verhältnissen und einem homogenen, isotropen Grundwasserleiter mit folgenden Parametern auszugehen:

Variante 1: Aufstellen der Differentialgleichung

Entsprechend der Methoden zur theoretischen Prozessanalyse kann für das hydraulische Schema die Differentialgleichung aufgestellt werden. Der Weg zur Aufstellung dieser Differentialgleichung ist bei den Aufgaben zur theoretischen Prozessanalyse beschrieben (siehe Seite 364).

$$h_{Fl} = R_{hydr} \cdot C \frac{dz_R}{dt} + z_R$$

bzw. umgeformt:

$$\frac{dz_R}{dt} + \frac{z_R}{R_{hydr} \cdot C} = \frac{h_{Fl}}{R_{hydr} \cdot C}$$

Für $R_{hydr} \cdot C$ soll die Abkürzung T_1 eingeführt werden.

T_1 trägt die Bezeichnung der Zeitkonstanten (siehe Abschnitt 5.2.1 Übertragungsfunktionen, Seite 370ff) und ist nicht mit der Transmissibilität T zu verwechseln. Diese Bezeichnung wird in automatisierungs- und elektrotechnischer Literatur so verwendet und ist entsprechend genormt. In älteren Literaturquellen wird auch oft die Bezeichnung τ verwendet. Die hier eingeführte Zeitkonstante T_1 , ist eng mit der geohydraulischen Zeitkonstanten $a = \frac{S}{T}$ (Speicherkoeffizient/Transmissibilität) verwandt und lässt sich in diese überführen (siehe GRÄBER, Lehrscript Systemanalyse, Abschnitt 8.1 THEISSche Brunnengleichung)

$$R_{hydr} \cdot C = \frac{l}{T \cdot b} \cdot S \cdot l \cdot b = \frac{S}{T} \cdot l^2$$

$$\frac{dz_R}{dt} + \frac{z_R}{T_1} = \frac{h_{Fl}}{T_1}$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation:

Diese Differentialgleichung gilt es, mit den Methoden der LAPLACE-Transformation zu lösen. Wendet man die Rechenregeln entsprechend an, erhält man:

$$\begin{aligned} L \left\{ \frac{dz_R}{dt} + \frac{z_R}{T_1} \right\} &= L \left\{ \frac{h_{Fl}}{T_1} \right\} \\ L \left\{ \frac{dz_R}{dt} \right\} + L \left\{ \frac{z_R}{T_1} \right\} &= L \left\{ \frac{h_{Fl}}{T_1} \right\} \end{aligned}$$

Mit dem Gesetz zur Differentiation,

$$L \{ f'(t) \} = pF(p) - f(0)$$

der Variablenzuordnung

$$f(t) = z_R$$

und den Anfangsbedingung soll gelten:

$$f(0) = z_{Rt=0}$$

Damit erhält man:

$$pL \{ z_R \} - z_{Rt=0} + \frac{1}{T_1} L \{ z_R \} = \frac{1}{T_1} L \{ h_{Fl} \}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p) = L \{ z_R \}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} L \{ h_{Fl} \} + z_{Rt=0} &= L \{ z_R \} \cdot \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \\ L \{ z_R \} &= \frac{\frac{1}{T_1} L \{ h_{Fl} \} + z_{Rt=0}}{\left(p + \frac{1}{T_1} \right)} \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass nur die Änderungen gegenüber dem stationären Ausgangszustand berechnet werden sollen, kann man $z_{Rt=0} = 0$ setzen, und man erhält:

$$\begin{aligned} L \{ z_R \} &= \frac{\frac{1}{T_1} L \{ h_{Fl} \}}{\left(p + \frac{1}{T_1} \right)} \\ L \{ z_R \} &= \frac{L \{ h_{Fl} \}}{(pT_1 + 1)} \end{aligned} \tag{1.6}$$

Variante 2: Nutzung der Spannungsteilerregel

Die Gleichung 1.6 kann man auch einfacher erhalten, wenn die aus der Rohrhydraulik oder Elektrotechnik bekannten Regeln wie Maschen- und Knotenpunktsatz sowie Potential- (Spannungs-) -Teilerregel benutzt werden. Auch hier geht man davon aus, dass nur die Änderung gegenüber dem stationären Zustand untersucht wird. Dazu ist es notwendig, neben dem hydraulischen Widerstand

$$R_{hydr} = \frac{l}{k \cdot D \cdot b} = \frac{l}{T \cdot b}$$

und der hydraulischen Kapazität (Speicher)

$$C = S \cdot A$$

einen komplexen kapazitiven Widerstand R_C nach folgenden Gleichungen zu definieren:

$$\begin{aligned} G_C &= \frac{1}{R_C} \\ &= p \cdot S \cdot A \\ &= p \left\{ \begin{array}{ll} S_0 M & \text{gespannter GWL} \\ n_0 & \text{ungespannter GWL} \end{array} \right\} \cdot l \cdot b \\ G_C &= p \cdot C \end{aligned}$$

bzw.

$$R_C = \frac{1}{pC}$$

Dabei wird p als komplexe Frequenz $p = \sigma + j\omega$ bezeichnet. Dies ist dieselbe unabhängige Variable, die als Basis der LAPLACE-Transformation dient.

Anwendung der LAPLACE-Transformation:

Nach der Spannungsteilerregel, die besagt, dass sich der Spannungsabfall (Potential- oder Druckabfall) wie die zugehörigen Widerstände verhält, erhält man nachfolgende Gleichungen. Dabei fällt über der Kapazität C die Spannung $L\{z_R\}$ ab. Der Flusswasserstand wirkt

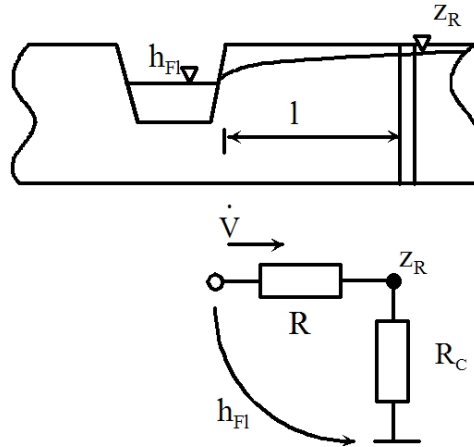


Abbildung 1.11: Schema der Grundwasserverhältnisse

sowohl über den hydraulischen Widerstand R_{hydr} als auch über den kapazitiven Widerstand R_C (Reihenschaltung von Widerständen) (siehe Abbildung 1.11):

$$\frac{L\{z_R\}}{L\{h_{Fl}\}} = \frac{R_C}{R_{hydr} + R_C}$$

$$\frac{L\{z_R\}}{L\{h_{Fl}\}} = \frac{\frac{1}{pC}}{R_{hydr} + \frac{1}{pC}}$$

Lösung der algebraischen Gleichung nach $F(p) = L\{z_R\}$:

$$L\{z_R\} = L\{h_{Fl}\} \frac{\frac{1}{pC}}{R_{hydr} + \frac{1}{pC}} = \frac{L\{h_{Fl}\}}{pR_{hydr}C + 1}$$

Mit $R_{hydr} \cdot C = T_1$ erhält man:

$$L\{z_R\} = \frac{L\{h_{Fl}\}}{pT_1 + 1} \quad (1.7)$$

Dies ist somit die selbe Gleichung, die man mit der Bilanzmethode über die Differentialgleichung (siehe Gleichung 1.6) erhalten hat.

Variante 1 und 2

Rücktransformation und Bestimmung der $y(t) = z_R(t)$:

Bei der Rücktransformation, d.h. der Suche der Funktion $z_R(t)$, muss man die speziellen Randbedingungen, d.h. die Zeitfunktion des Flusswasserspiegels, berücksichtigen.

(a) Sprungförmige Anregung ($h_{Fl} = h_{Fl0} \cdot \mathbf{1}(t)$)

Laut Korrespondenztabelle (siehe Seite 158, Nr. 2) ist die LAPLACE-Transformierte des Sprungsignals:

$$L\{h_{Fl}\} = L\{h_{Fl0} \cdot \mathbf{1}(t)\} = h_{Fl0} \cdot \frac{1}{p}$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass die Sprungfunktion in den Grenzen des LAPLACE-Integrals (0 bis ∞) den konstanten Wert $\mathbf{1}(t) = 1$ hat:

$$L\{\mathbf{1}(t)\} = L\{f(1)\} = \frac{1}{p}$$

Dies wird in die Gleichung 1.7 eingesetzt und man erhält:

$$\begin{aligned} L\{z_R\} &= \frac{L\{h_{Fl}\}}{pT_1 + 1} \\ L\{z_R\} &= h_{Fl0} \cdot \frac{1}{p(pT_1 + 1)} \\ L\{z_R\} &= \frac{h_{Fl0}}{T_1} \cdot \frac{1}{p\left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \end{aligned}$$

Rücktransformation und Bestimmung der $y(t) = z_R(t)$:

Die Rücktransformation kann man hier mittels der Korrespondenztabelle oder der Partialbruchzerlegung durchführen.

Variante 1: Korrespondenztabelle

Aus der Korrespondenztabelle (siehe Seite 158, Nr. 5) erhält man:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p - \alpha)(p - \beta)}\right\} = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$$

Aus dem Vergleich der zu transformierenden Funktion und der Korrespondenztabelle sieht man, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{p\left(p + \frac{1}{T_1}\right)} &= \frac{1}{(p - \alpha)(p - \beta)} \\ \alpha &= 0 \\ \beta &= \frac{1}{T_1} \\ L^{-1}\left\{\frac{1}{p\left(p + \frac{1}{T_1}\right)}\right\} &= \frac{e^{-\frac{1}{T_1}t} - e^{0t}}{-\frac{1}{T_1} - 0} \end{aligned}$$

gesetzt werden kann und man erhält:

$$\begin{aligned}
 L^{-1} \{L\{z_R\}\} &= L^{-1} \left\{ \frac{h_{Fl0}}{T_1} \cdot \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \right\} \\
 z_R &= \frac{h_{Fl0}}{T_1} L^{-1} \left\{ \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \right\} \\
 z_R &= h_{Fl0} \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right)
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Variante 2: Residuummethode

Ziel der Partialbruchzerlegung ist, die gebrochene rationale Funktion in eine Summe von Brüchen der Nennernullstellen, die Partialbrüche, zu zerlegen. Zuerst werden die Nullstellen des Nenners der Gleichung 1.7 gesucht:

$$\begin{aligned}
 L\{z_R\} &= \frac{h_{Fl0}}{T_1} \cdot \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \\
 p_1 &= 0 \\
 p_2 + \frac{1}{T_1} &= 0 \\
 p_2 &= -\frac{1}{T_1} \\
 L\{z_R\} &= \frac{h_{Fl0}}{T_1} \cdot \left(\frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2} \right) \\
 L\{z_R\} &= \frac{h_{Fl0}}{T_1} \cdot \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{T_1}} \right)
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Die Koeffizienten A und B werden durch Vergleich der gebrochenen Funktion und der Summe der Partialbrüche bestimmt:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{T_1}\right)} &= \frac{A}{p} + \frac{B}{p + \frac{1}{T_1}} \\
 \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{T_1}\right)} &= \frac{\left(p + \frac{1}{T_1}\right) \cdot A + pB}{p \left(p + \frac{1}{T_1}\right)}
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich bei Vergleich der Koeffizienten der Polynomglieder (Potenzen von p):

$$p^1 \quad 0 = A + B$$

$$p^0 \quad 1 = \frac{A}{T_1}$$

$$A = T_1$$

$$B = -T_1$$

Wird dies in die LAPLACE-transformierte Gleichung 1.9 eingesetzt, so ergibt sich:

$$L\{z_R\} = \frac{h_{F10}}{T_1} \cdot \left(\frac{T_1}{p} - \frac{T_1}{p + \frac{1}{T_1}} \right)$$

und die LAPLACE-Rücktransformierte:

$$\begin{aligned} L^{-1}\{L\{z_R\}\} &= L^{-1}\left\{ \frac{h_{F10}}{T_1} \cdot \left(\frac{T_1}{p} - \frac{T_1}{p + \frac{1}{T_1}} \right) \right\} \\ z_R &= h_{F10} \cdot \left(L^{-1}\left\{ \frac{1}{p} \right\} - L^{-1}\left\{ \frac{1}{\left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \right\} \right) \end{aligned}$$

Aus der Korrespondenztabelle (siehe Seite 158, Nr. 3) ergibt sich die Rücktransformation:

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{ \frac{1}{p} \right\} &= 1 \\ L^{-1}\left\{ \frac{1}{\left(p - \alpha\right)} \right\} &= \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t} \\ \alpha &= 1 \\ n &= 1 \\ L^{-1}\left\{ \frac{1}{\left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \right\} &= e^{-\frac{t}{T_1}} \end{aligned}$$

Damit erzielt man die Lösung:

$$z_R = h_{F10} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}} \right) \quad (1.10)$$

Das ist die gleiche Lösung, die man auch über den Weg sofortigen Anwendung der Korrespondenztabelle (siehe Gleichung 1.8) erhalten hat.

Varianten Korrespondenztabelle und Residuummethode

Abbildung 1.12 zeigt die zeitliche Änderung des Grundwasserspiegels bei sprunghafter Änderung des Flusswasserspiegels um $h_{Fl0} = 20m$ in Abhängigkeit vom Strömungswiderstand R_{hydr} als Funktion der Länge l und der Transmissibilität T , sowie von der Kapazität C als Funktion der Länge l und des Speicherkoeffizienten S . Die Ergebnisse sind die gleichen, die man bei der direkten analytischen Lösung der Differentialgleichung erhalten hat (siehe Lösung Seite 137).

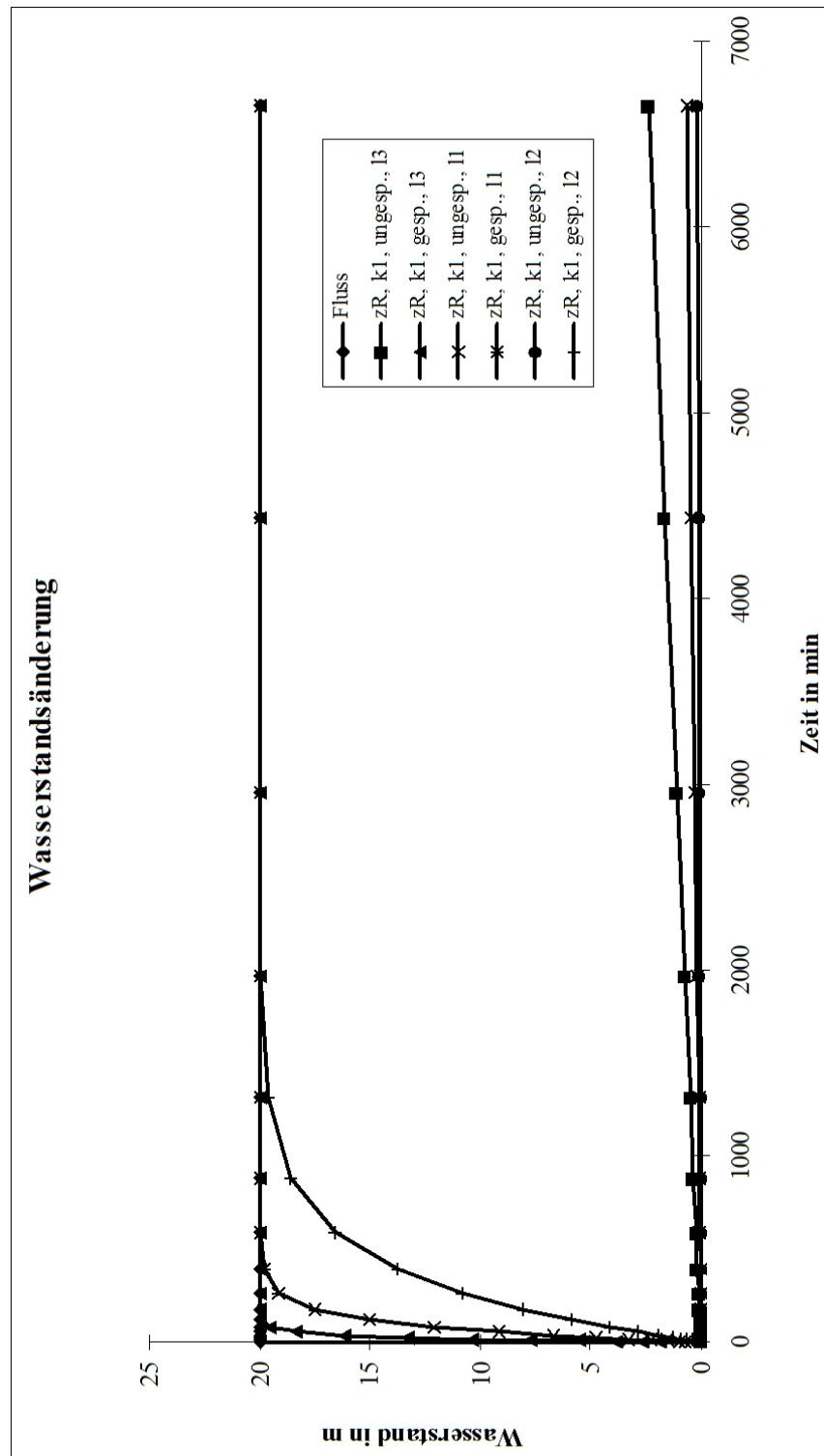


Abbildung 1.12: Änderung des Grundwasserstandes bei sprunghafter Änderung des Flusswasserstandes

(b) **Sinusförmige Anregung** ($h_{Fl} = h_{Fl0} \sin(\omega t)$, mit $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ und $t = 7d$)

Laut Korrespondenztabelle (siehe Seite 158, Nr. 7) ist die LAPLACE-Transformierte der Sinusschwingung:

$$L\{\sin(\alpha t)\} = \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$$

$$L\{h_{Fl}\} = L\{h_{Fl0} \sin(\omega t)\} = h_{Fl0} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

Dies wird in die Gleichung 1.9, Seite 192, eingesetzt, und man erhält:

$$L\{z_R\} = \frac{L\{h_{Fl}\}}{pT + 1}$$

$$L\{z_R\} = \frac{h_{Fl}\omega}{[(p^2 + \omega^2)(pT + 1)]}$$

Rücktransformation und Bestimmung von $y(t) = z_R(t)$

Als Rücktransformation sollen hier die Residuummethode mit der Partialbruchzerlegung benutzt werden. Diese sind einfach zu handhaben, wenn es sich, wie in diesem Falle, um eine rationale Funktion handelt.

Variante Partialbruchmethode

$$L\{z_R\} = \frac{h_{Fl}\omega}{[(p^2 + \omega^2)(pT + 1)]}$$

$$L^{-1}\{L\{z_R\}\} = L^{-1}\left\{\frac{h_{Fl}\omega}{[(p^2 + \omega^2)(pT + 1)]}\right\}$$

$$z_R = L^{-1}\left\{\frac{h_{Fl}\omega}{T} \frac{1}{[(p + j\omega)(p - j\omega)(p - p_1)]}\right\}$$

Mit

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}$$

und

$$(a^2 - b^2) = (a + b) \cdot (a - b)$$

$$\sqrt{(-b^2)} = \sqrt{(-1) \cdot b} = jb$$

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2) &= (a^2 - (-b^2)) \\ &= (a + \sqrt{(-b^2)}) (a - \sqrt{(-b^2)})\end{aligned}$$

$$(a^2 + b^2) = (a + jb)(a - jb)$$

erhält man:

$$z_R = L^{-1} \left\{ h_{Fl} \frac{\frac{\omega}{T_1}}{\left[(p + j\omega)(p - j\omega) \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \right]} \right\}$$

Als Partialbruchsumme geschrieben:

$$z_R = h_{Fl} L^{-1} \left\{ \frac{A_1}{(p + j\omega)} + \frac{A_2}{(p - j\omega)} + \frac{A_3}{\left(p + \frac{1}{T_1} \right)} \right\}$$

Die Koeffizienten A_1 , A_2 und A_3 erhält man durch Multiplikation dieser Summanden mit dem Hauptnenner und anschließendem Koeffizientenvergleich gleichwertiger Potenzen von p :

$$p : A_1 (p - j\omega) \left(p + \frac{1}{T_1} \right) + A_2 (p + j\omega) \left(p + \frac{1}{T_1} \right) + A_3 (p + j\omega) (p - j\omega) = \frac{\omega}{T_1}$$

$$p^2: \quad A_1 \quad \quad \quad + \quad A_2 \quad \quad \quad + \quad A_3 \quad = 0$$

$$p^1: \quad A_1 \left(-j\omega + \frac{1}{T_1} \right) + A_2 \left(+j\omega + \frac{1}{T_1} \right) + 0 \quad = 0$$

$$p^0: \quad A_1 \left(-\frac{j\omega}{T_1} \right) \quad + \quad A_2 \left(+\frac{j\omega}{T_1} \right) \quad + \quad A_3 \omega^2 \quad = \frac{\omega}{T_1}$$

Damit hat man drei Gleichungen für die drei Unbekannten A_1 , A_2 und A_3 . Die erste Gleichung kann nach A_3 aufgelöst werden und in die dritte eingesetzt werden. Dann erhält man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

$$A_1 \left(-j\omega + \frac{1}{T_1} \right) + A_2 \left(+j\omega + \frac{1}{T_1} \right) = 0$$

$$A_1 \left(-\omega^2 - \frac{j\omega}{T_1} \right) + A_2 \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) = \frac{\omega}{T_1}$$

Wird die erste Zeile mit $j\omega$ multipliziert, so erhält man:

$$\begin{aligned} A_1 \left(-j\omega + \frac{1}{T_1} \right) + A_2 \left(+j\omega + \frac{1}{T_1} \right) &= 0 & | \cdot j\omega \\ A_1 \left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) + A_2 \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann mit der oben dargestellten zweiten Gleichung addiert werden:

$$\begin{aligned} A_1 \left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) + A_2 \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) &= 0 \\ -A_1 \left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) + A_2 \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) &= \frac{\omega}{T_1} \end{aligned}$$

und man erhält:

$$\begin{aligned} 2A_2 \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) &= \frac{\omega}{T_1} \\ A_2 &= \frac{\omega}{2T_1} \frac{1}{\left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right)} \end{aligned}$$

Dies in die obere Gleichung eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} A_1 \left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) + A_2 \left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) &= 0 \\ A_1 \left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right) &= -\frac{\omega}{2T_1} \\ A_1 &= -\frac{\omega}{2T_1} \frac{1}{\left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1} \right)} \end{aligned}$$

Damit wird A_3 zu:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

$$A_3 = -A_1 - A_2$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{\omega}{2T_1} \frac{1}{\left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1}\right)} - \frac{\omega}{T_1} \frac{1}{\left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1}\right)} \\ &= \frac{1}{2\omega T_1} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{j}{\omega T_1}\right)} - \frac{1}{\left(-1 + \frac{j}{\omega T_1}\right)} \right) \\ A_3 &= \frac{1}{2\omega T_1} \left(\frac{2}{-\left(\frac{1}{\omega T_1}\right)^2 - 1} \right) = \frac{\omega}{T_1} \frac{1}{\left(\omega^2 + \frac{1}{T_1}\right)} \end{aligned}$$

Diese drei Faktoren A_1 , A_2 und A_3 in die Partialbruchgleichung eingesetzt, ergibt:

$$A_1 = -\frac{\omega}{2T_1} \frac{1}{\left(\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1}\right)}$$

$$A_2 = \frac{\omega}{2T_1} \frac{1}{\left(-\omega^2 + \frac{j\omega}{T_1}\right)}$$

$$A_3 = \frac{\omega}{T_1} \frac{1}{\left(\omega^2 + \frac{1}{T_1}\right)}$$

$$z_R = h_{Fl} L^{-1} \left\{ \frac{A_1}{(p + j\omega)} + \frac{A_2}{(p - j\omega)} + \frac{A_3}{\left(p + \frac{1}{T_1}\right)} \right\}$$

Daraus ergibt sich unter Einbeziehung der EULERSchen Formel:

$$z_{R1}(t) = \frac{h_{Fl0} \cdot \omega_0}{R_{hydr} C} \left[\frac{e^{\frac{t}{RC}}}{\left(\frac{1}{R_{hydr} C}\right)^2 + \omega_0^2} + \frac{1}{\left(\frac{1}{R_{hydr} C}\right)^2 + \omega_0^2} \cos \left(\omega_0 t - \arctan \frac{\omega_0}{R_{hydr} C} \right) \right]$$

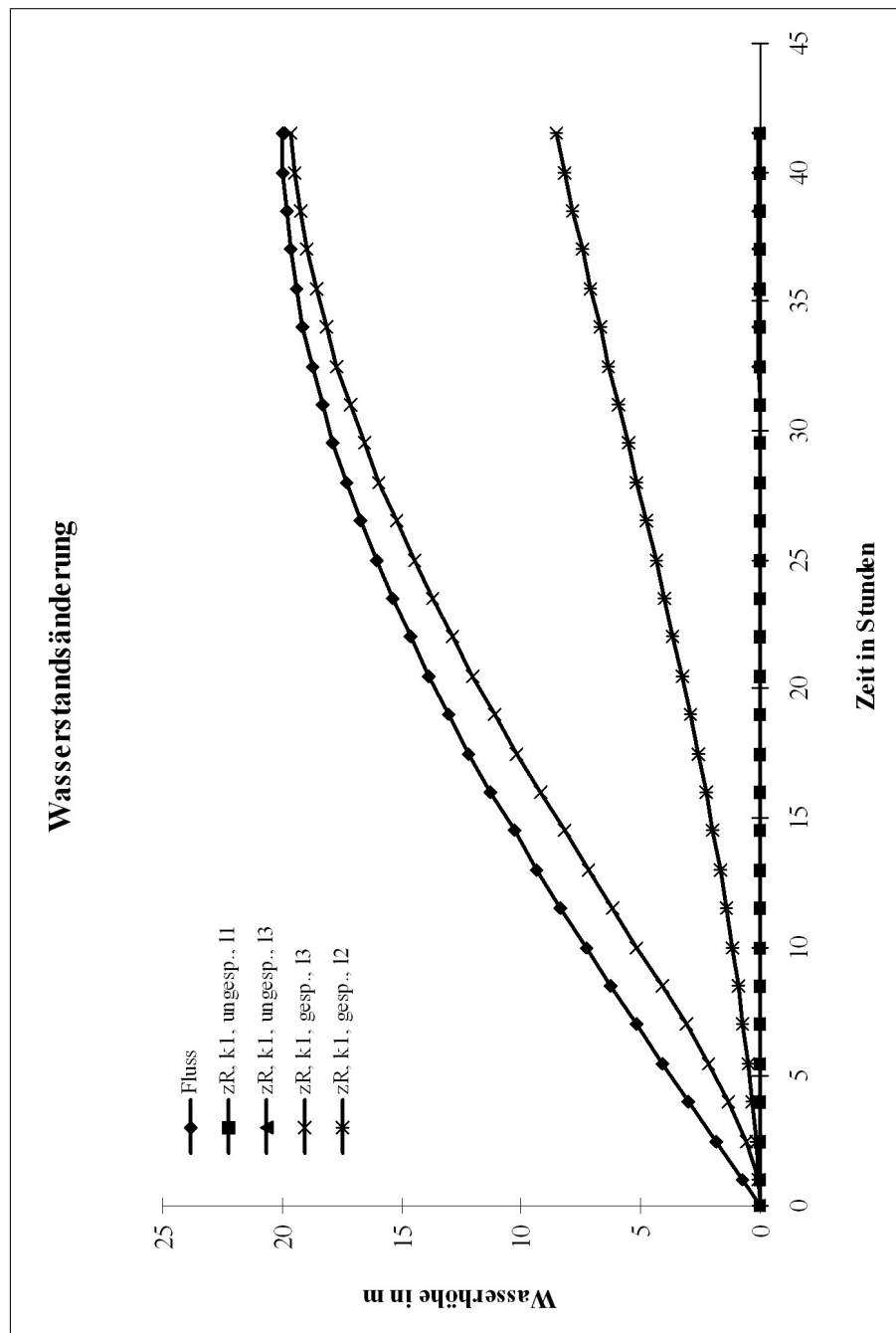
Man erkennt (siehe Abbildung 1.13), dass die Grundwasserhöhe z_R gegenüber der Flusswasserspiegelhöhe h_{Fl} kleiner (gedämpft) sowie phasenverschoben (zeitverschoben) ist.

Dämpfung:
$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R_{hydr} C}\right)^2 + \omega_0^2}}$$

Phasenverschiebung:
$$\arctan \frac{\omega_0}{R_{hydr} C}$$

Allgemein

Dieses Beispiel soll genügen, um zu zeigen, dass die LAPLACE-Transformation für lineare instationäre Probleme sehr gut anwendbar ist. Bei komplizierteren Systemen, bei denen die Anzahl der Polstellen groß wird oder die Erregerfunktion nicht mehr rational ist, ergeben sich rechentechnische Schwierigkeiten. Die LAPLACE-Transformation ist nicht anwendbar, wenn kein geschlossener analytischer Ausdruck für die Erregerfunktion aufgestellt werden kann, z. B. wenn nur einzelne Stichprobenwerte (Abtastwerte) existieren oder wenn die Systemparameter oder die Erregerfunktion nichtlinearen Charakter besitzen.

Abbildung 1.13: Grundwasserhöhe z_R gegenüber der Flusswasserspiegelhöhe h_{Fl}

• zu Aufgabe 4 (s. S. 155)

(a)

Ausgangsgleichung:

$$T_1 \dot{C} + C = K \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} T_1 = 1d^{-1}; K = 100 \\ t = 0; C(0) = 0 \end{array}$$

$$L \left\{ T_1 \dot{C} + C \right\} = L \{ K \}$$

$$L \left\{ \dot{C} \right\} = pY - C(0);$$

$$\text{für } C(0) = C \text{ gilt: } L \{ C \} = Y$$

$$L \{ K \} = \frac{K}{p}$$

$$T_1 pY + Y = \frac{K}{p}; \quad Y(p+1) = \frac{K}{p}$$

$$\text{für } T_1 = 1 \text{ gilt: } Y = \frac{K}{p(p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} = \frac{Ap + A + Bp}{p(p+1)}$$

$$A = K; \quad B = -K$$

$$Y = \frac{K}{p} - \frac{K}{p+1}$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{K}{p} \right\} = K; \quad L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-\alpha)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{\alpha t}$$

$$\alpha = -1; \quad n = 1$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+1} \right\} = e^{-t}$$

$$C(t) = K - K \cdot e^{-t} = K (1 - e^{-t})$$

(b)

Skizze (siehe Abbildung 1.14)

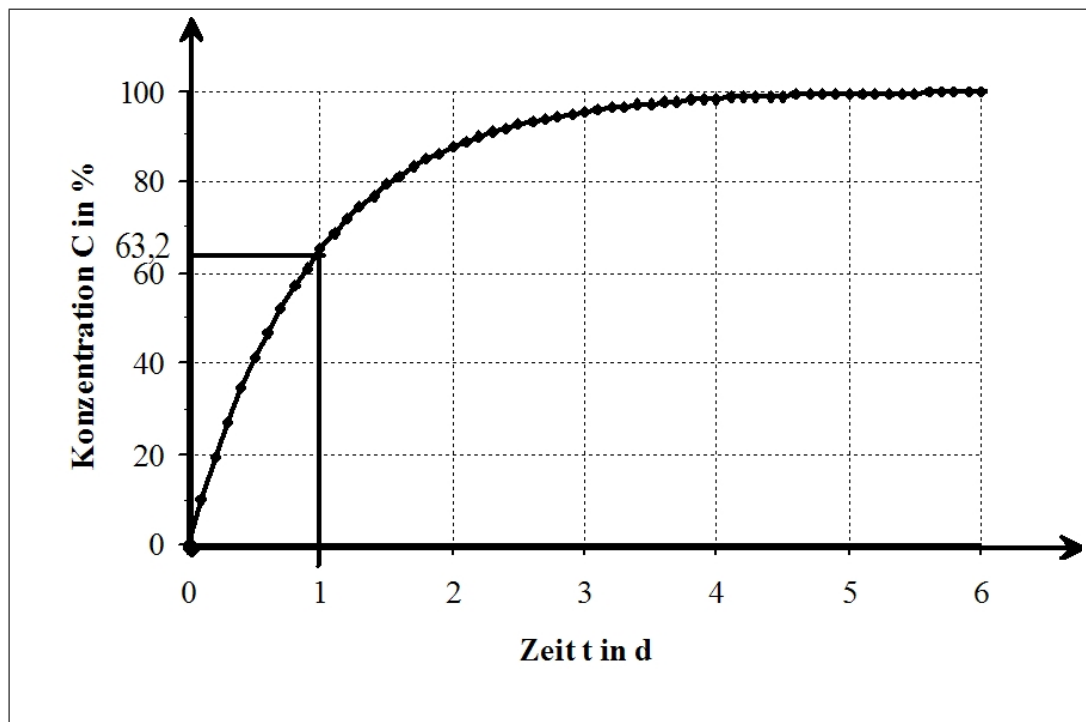


Abbildung 1.14: Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentrationsänderung

• zu Aufgabe 5 (s. S. 155)

Ausgangsgleichung:

$$A = \frac{dh}{dt} = \dot{V}_{Zustr} \quad \text{mit } h_{t=0} = 0; \quad \dot{V} = const$$

$$A \cdot L \left\{ \dot{h} \right\} = L \left\{ \dot{V} \right\}$$

$$L \left\{ \dot{V} \right\} = \frac{\dot{V}}{p}$$

$$L \left\{ \dot{h} \right\} = Yp + h(0) \implies AYp = \frac{\dot{V}}{p} \implies Y = \frac{\dot{V}}{Ap^2}$$

$$L^{-1} = \left\{ \frac{1}{p^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\text{für } n = 2 \text{ gilt: } L^{-1} \left\{ \frac{1}{p^2} \right\} = t$$

$$h = \frac{\dot{V}}{A} t$$

• zu Aufgabe 6 (s. S. 155)

Ausgangsgleichung:

$$\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} h_{t=0} = 0; \quad g = 0,015m \cdot s^{-1} \\ k = 0,01s^{-1} \end{array}$$

$$L \left\{ \dot{h} + kh \right\} = L \{g\}$$

$$L \left\{ \dot{h} \right\} + L \{kh\} = L \{g\}$$

$$L \left\{ \dot{h} \right\} = pY + h(0)$$

$$L \{h\} = Y$$

$$L \{g\} = \frac{g}{p}$$

$$pY + kY = \frac{g}{p} \implies Y = \frac{g}{p(p+k)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+k}$$

$$\frac{Ap + Ak + Bp}{p(p+k)} = \frac{p(A+B) + Ak}{p(p+k)}$$

$$g = A \cdot k \implies A = \frac{g}{k}; \quad B = -\frac{g}{k}$$

$$Y = \frac{g}{k \cdot p} - \frac{g}{k \cdot (p+k)}$$

$$L^{-1} = \left\{ \frac{1}{p} \right\} = 1$$

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(p-2)^n} \right\} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{2t}$$

$$\text{für } n=2 \text{ gilt: } 2 = -k \implies L^{-1} \left\{ \frac{1}{p+k} \right\} = e^{-kt}$$

$$h(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt})$$

1.7 Numerische Verfahren

1.7.1 Integrationsverfahren

1.7.1.1 Aufgaben

1. Berechnen Sie unter Verwendung der Rechteck- und Trapezregel das Integral $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ mit den Schrittweiten $h = 0,1$ und $0,01$ (Lösung s. S. 208)
2. Berechnen Sie folgende Integrale.
Verwenden Sie dabei mindestens zwei numerische Verfahren und zwei unterschiedliche Schrittweiten und vergleichen Sie die Ergebnisse:
(Lösung s. S. 211)
(a) $\int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$ und
(b) $\int_1^2 \frac{e^x}{x} dx$
3. Berechnen Sie das Integral $\int_1^{1,3} \sqrt{x} dx$ mittels Rechteckregel, Trapezregel und der drei NEWTONschen Formeln und vergleichen Sie die Ergebnisse. (Lösung s. S. 217)
4. Berechnen Sie das Integral $I = \int_1^{10} \frac{1}{x} dx$ näherungsweise.
Wählen Sie dazu $h = 1$.
Verwenden Sie für das Intervall $[1, 9]$ die SIMPSONsche Regel und für das Intervall $[9, 10]$ die Trapezregel. (Lösung s. S. 221)
5. Eine Messreihe der Spezifischen Wärme c des Al_2O_3 in Abhängigkeit von der Temperatur T liefert die in der Tabelle aufgeführten Werte.
Ermitteln Sie die Wärmemenge $Q = \int_{-200}^{1000} c(T) \cdot dT$, die man einem Gramm Al_2O_3 zuführen muss, um es von $-200^\circ C$ auf $1000^\circ C$ zu erwärmen. (Lösung s. S. 224)
Die Integration ist numerisch nach
 - (a) der Trapezregel
 - (b) der SIMPSONschen Regel mit der Schrittweite $h = 200^\circ C$ durchzuführen.

$T [^\circ C]$	−260	−200	−100	0	100	200	300	400	600	800	1000
$c \left[\frac{c}{g \cdot K} \right]$	0	0,04	0,012	0,18	0,22	0,24	0,25	0,26	0,27	0,275	0,28

6. Bei einem Pumpversuch wurden folgende Grundwasserstände gemessen (siehe Abbildung 1.15)

Berechnen Sie das Wasserdefizit (Volumen) des Absenkungstrichters, wenn der Grundwasserleiter folgende Kennwerte besitzt:

$$h_n = 16\text{m}, M = 10\text{m}, k = 0,001\text{m} \cdot \text{s}^{-1}, S_0 = 0,0001\text{m}^{-1}, n_0 = 0,20$$

Benutzen Sie dazu die Methode der numerischen Integration! (Lösung s. S. 226)

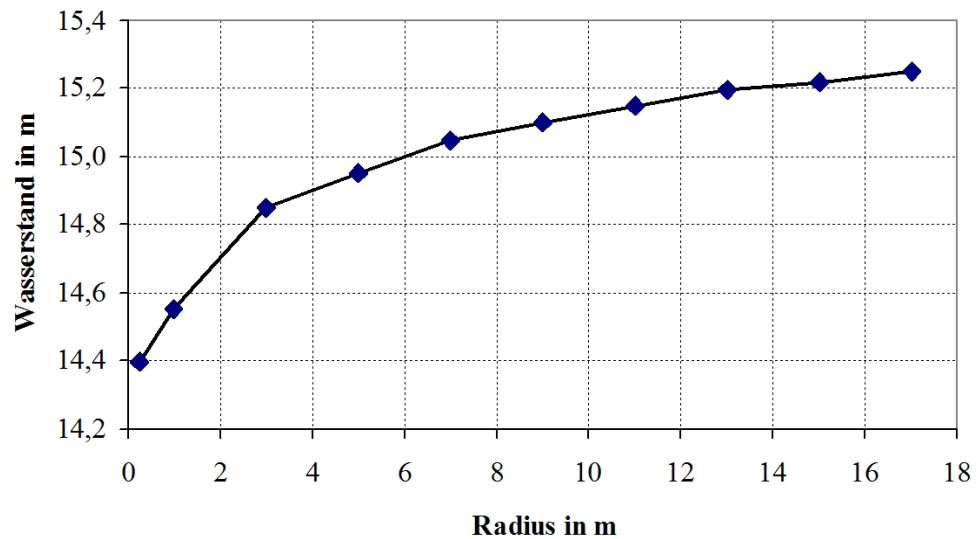


Abbildung 1.15: Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius

1.7.1.2 Lösungen

- zu Aufgabe 1 (s. S. 206)

Die numerische Berechnung von Integralen erfolgt bei der Rechteckregel mittels der Formel:

$$F_{links} = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n-1}|) \cdot y_n \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Bei der Verwendung der Trapezregel wird das Integral wie folgt berechnet:

$$F = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n+1}|) \cdot \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right) \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Die analytische Lösung des Integrals ist:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx &= [\ln(1+x)]_0^1 \\ &= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \\ &= 0,6931 \end{aligned}$$

Schritte	Funktion:	Rechteckregel		Trapezregel	
x	$f\left(\frac{1}{(1+x)}\right)$	Teilfläche	Summe	Teilfläche	Summe
0,00	1,00	0,1000	0,1000	0,09545	0,0955
0,10	0,91	0,0909	0,1909	0,08712	0,1826
0,20	0,83	0,0833	0,2742	0,08013	0,2627
0,30	0,77	0,0769	0,3512	0,07418	0,3369
0,40	0,71	0,0714	0,4226	0,06905	0,4059
0,50	0,67	0,0667	0,4893	0,06458	0,4705
0,60	0,63	0,0625	0,5518	0,06066	0,5312
0,70	0,59	0,0588	0,6106	0,05719	0,5884
0,80	0,56	0,0556	0,6661	0,05409	0,6425
0,90	0,53	0,0526	0,7188	0,05132	0,6938
1,00	0,50				

Ergebnisszusammenfassung:

Schritt- weite	Rechteck- regel	rel. Fehler	Trapez- regel	rel Fehler	analytische Lösung
0,1	0,7188	0,03697	0,6938	0,0009	
0,01	0,6957	0,00362	0,6932	0,000009	
					0,6931

In Abbildung 1.16 ist die Bildung des Integrales für verschiedene Schrittweiten und für die Rechteck- und die Trapezregel dargestellt. Man erkennt, dass der Fehler abhängig von der verwendeten Methode und von der Schrittweite ist. Die Trapezregel liefert schon bei einer Schrittweite von $h = 0,1(a - b)$ sehr brauchbare Werte mit einem Fehler von $< 0,1\%$.

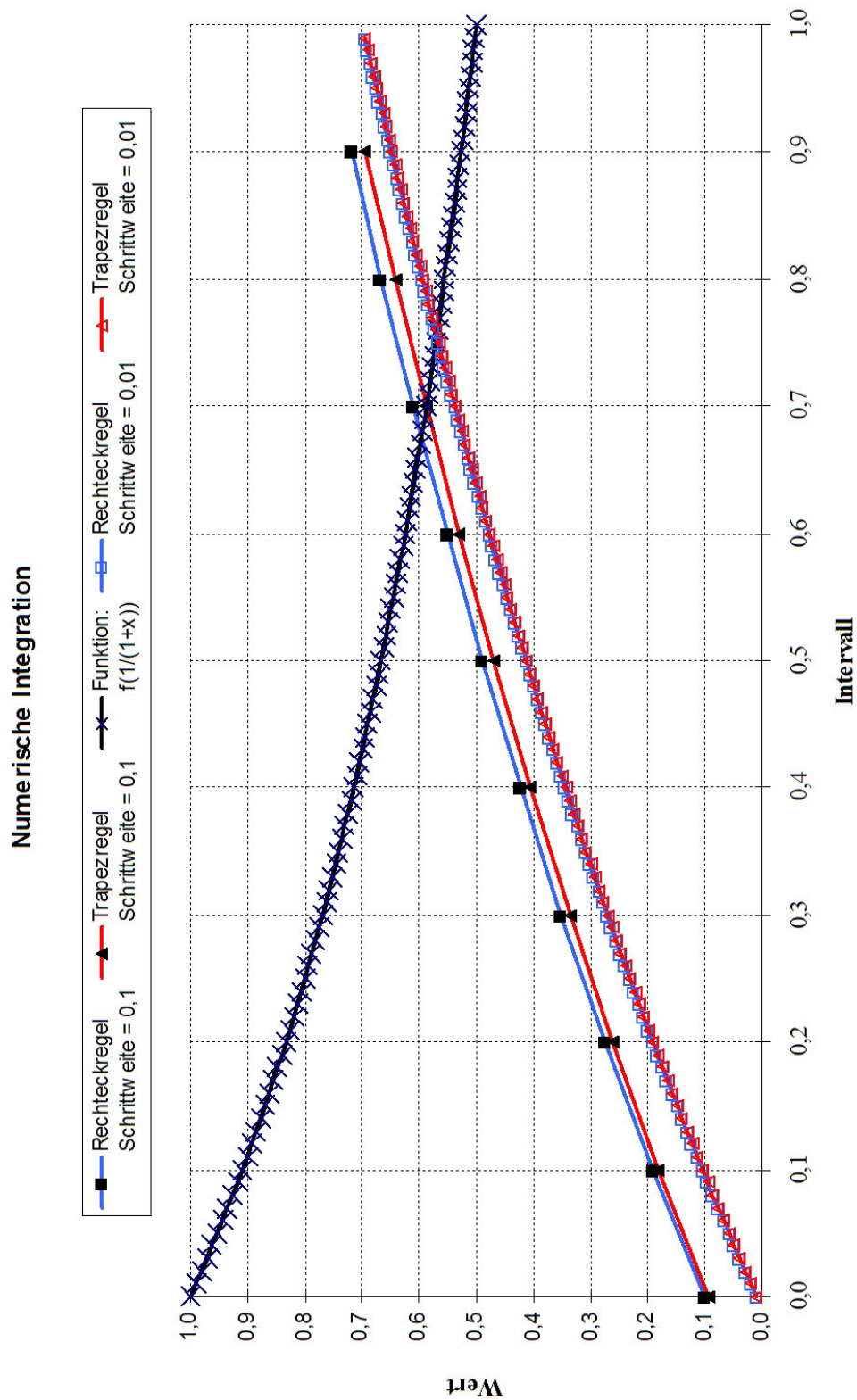


Abbildung 1.16: Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten

- zu Aufgabe 2 (s. S. 206)

(a)

Die numerische Berechnung von Integralen erfolgt bei der Rechteckregel mittels der Formel:

$$F_{links} = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n-1}|) \cdot y_n \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Bei der Verwendung der Trapezregel wird das Integral wie folgt berechnet:

$$F = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n+1}|) \cdot \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right) \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Die analytische Lösung des Integrals ist:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx &\approx 2 \int_0^1 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{30} \right) dx \\ &= 2 \left[x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{210}x^7 \right]_0^1 \\ &= 2,871 \end{aligned}$$

Schritte	Funktion:	Rechteckregel		Trapezregel	
x	$f(e^{-x^2})$	Teilfläche	Summe	Teilfläche	Summe
-1,00	2,72	0,2718	0,2718	0,2483	0,2483
-0,90	2,25	0,2248	0,4966	0,2072	0,4555
-0,80	1,90	0,1896	0,6863	0,1764	0,6320
-0,70	1,63	0,1632	0,8495	0,1533	0,7853
-0,60	1,43	0,1433	0,9928	0,1359	0,9211
-0,50	1,28	0,1284	1,1212	0,1229	1,0440
-0,40	1,17	0,1174	1,2386	0,1134	1,1574
-0,30	1,09	0,1094	1,3480	0,1067	1,2641
-0,20	1,04	0,1041	1,4521	0,1025	1,3667
-0,10	1,01	0,1010	1,5531	0,1005	1,4672
0,00	1,00	0,1000	1,6531	0,1005	1,5677
0,10	1,01	0,1010	1,7541	0,1025	1,6702
0,20	1,04	0,1041	1,8582	0,1067	1,7770
0,30	1,09	0,1094	1,9676	0,1134	1,8904
0,40	1,17	0,1174	2,0849	0,1229	2,0132
0,50	1,28	0,1284	2,2133	0,1359	2,1491
0,60	1,43	0,1433	2,3567	0,1533	2,3024
0,70	1,63	0,1632	2,5199	0,1764	2,4788
0,80	1,90	0,1896	2,7096	0,2072	2,6860
0,90	2,25	0,2248	2,9343	0,2483	2,9343
1,00	2,72				

Ergebniszusammenfassung:

Schrittweite	Rechteck	Fehler	Trapez	Fehler
0,1	2,9343	0,06	2,9343	0,06
0,01	2,8985	0,03	2,8987	0,03
analytisch	2,871			

In Abbildung 1.17 ist die Bildung des Integrales für verschiedene Schrittweiten und für die Rechteck- und die Trapezregel dargestellt. Man erkennt, dass der Fehler abhängig von der verwendeten Methode, von der Schrittweite und von den Ordinatenwert ist. Die Trapezregel liefert schon bei einer Schrittweite von $h = 0,1(a - b)$ sehr brauchbare Werte mit einem Fehler von $< 0,1\%$.

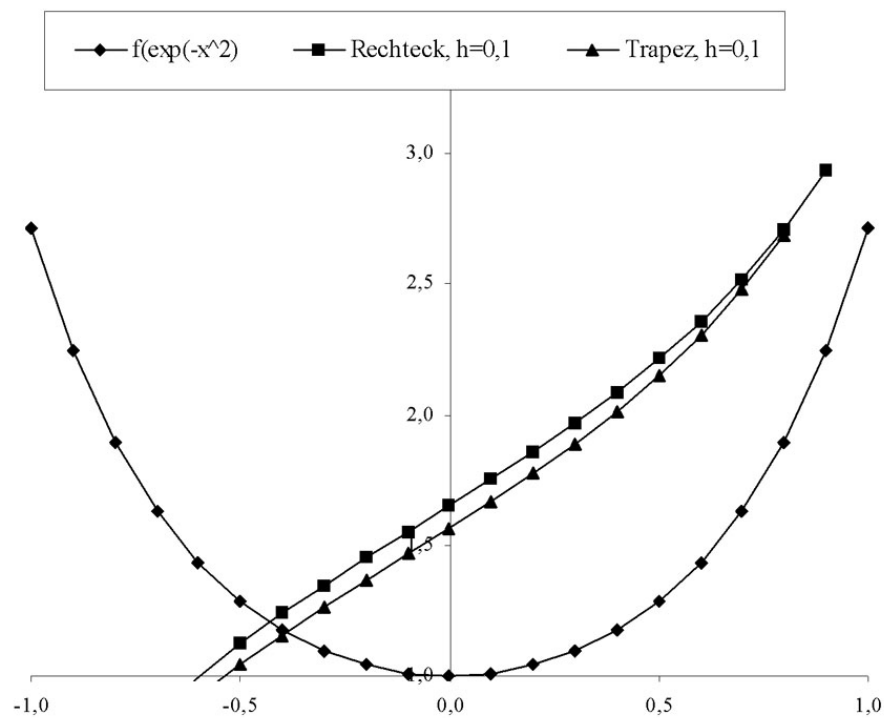


Abbildung 1.17: Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten

(b)

Die numerische Berechnung von Integralen erfolgt bei der Rechteckregel mittels der Formel:

$$F_{links} = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n-1}|) \cdot y_n \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Bei der Verwendung der Trapezregel wird das Integral wie folgt berechnet:

$$F = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n+1}|) \cdot \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right) \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Die analytische Lösung des Integrals ist:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx &= \left[\ln x + \frac{x}{1 \cdot 1!} + \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \cdots + \frac{x^n}{n \cdot n!} \right]_1^2 \\ &\approx \left(\ln 2 + \frac{2}{1} + \frac{4}{4} + \frac{8}{18} + \frac{16}{96} + \cdots \right) \\ &\quad - \left(\ln 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} + \cdots \right) \\ &\approx 2,9882861 \end{aligned}$$

Schritte	Funktion:	Rechteckregel		Trapezregel	
x	$f\left(\frac{e^x}{x}\right)$	Teilfläche	Summe	Teilfläche	Summe
1,00	2,72	0,2718	0,2718	0,3036	0,3036
1,10	3,35	0,3353	0,6072	0,3787	0,6823
1,20	4,22	0,4221	1,0292	0,4820	1,1643
1,30	5,42	0,5419	1,5712	0,6259	1,7902
1,40	7,10	0,7099	2,2811	0,8294	2,6196
1,50	9,49	0,9488	3,2299	1,1212	3,7408
1,60	12,94	1,2936	4,5235	1,5465	5,2872
1,70	17,99	1,7993	6,3228	2,1764	7,4636
1,80	25,53	2,5534	8,8762	3,1250	10,5886
1,90	36,97	3,6966	12,5728	4,5782	15,1668
2,00	54,60				

Ergebniszusammenfassung:

Schrittweite	Rechteckregel	rel. Fehler	Trapezregel	rel Fehler	analytische Lösung
0,1	3,0100	0,021	3,0582	0,062	
0,01	3,0273	0,042	3,0322	0,041	
					2,9882861

In Abbildung 1.18 ist die Bildung des Integrals für verschiedene Schrittweiten und für die Rechteck- und die Trapezregel dargestellt. Man erkennt, dass der Fehler abhängig von der verwendeten Methode, von der Schrittweite und vom Ordinatenwert ist. Die Trapezregel liefert schon bei einer Schrittweite von $h = 0,1 \cdot (a - b)$ sehr brauchbare Werte mit einem Fehler von $< 0,1\%$.

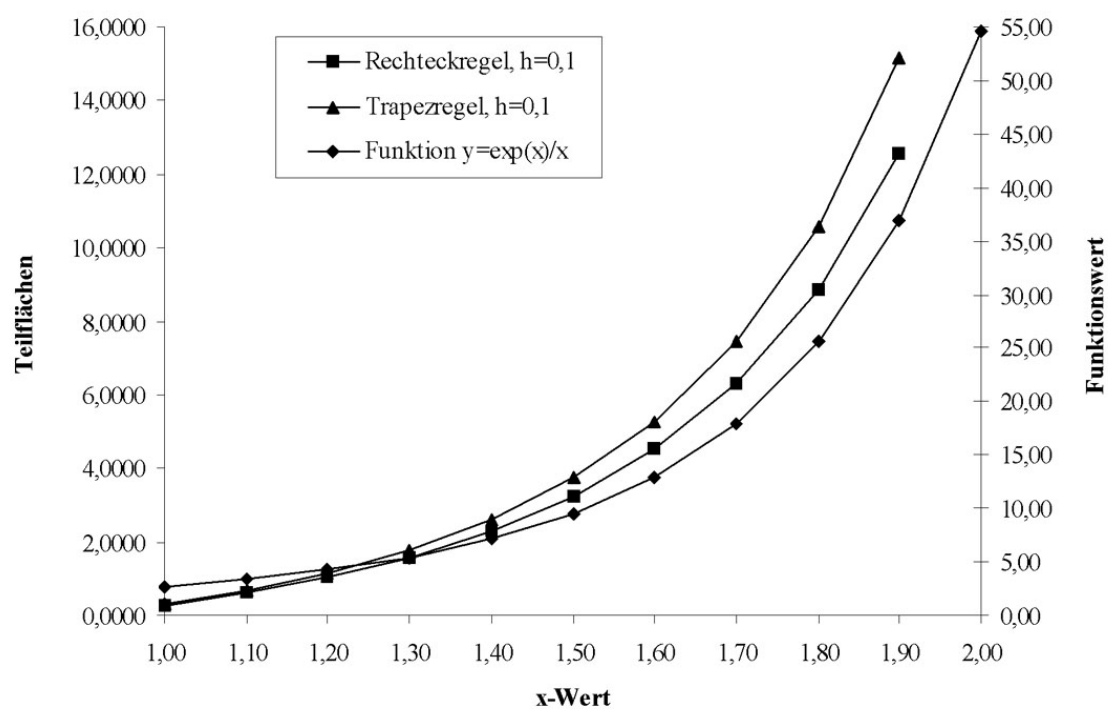


Abbildung 1.18: Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten

- zu Aufgabe 3 (s. S. 206)

Die numerische Berechnung von Integralen erfolgt bei der Rechteckregel mittels der Formel:

$$F_{links} = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n-1}|) \cdot y_n \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Bei der Verwendung der Trapezregel wird das Integral wie folgt berechnet:

$$F = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n+1}|) \cdot \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right) \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Die analytische Lösung des Integrals ist:

$$\begin{aligned} \int_1^{1,3} \sqrt{x} dx &= \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} \right]_1^{1,3} \\ &= \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{2,197} - \sqrt{1}) \\ &= 0,3215 \end{aligned}$$

Schritte	Funktion:	Rechteckregel		Trapezregel	
x	$f(\sqrt{x})$	Teilfläche	Summe	Teilfläche	Summe
1,00	1,00	0,0300	0,0300	0,0302	0,0302
1,03	1,01	0,0304	0,0604	0,0307	0,0609
1,06	1,03	0,0309	0,0913	0,0311	0,0920
1,09	1,04	0,0313	0,1227	0,0315	0,1235
1,12	1,06	0,0317	0,1544	0,0320	0,1555
1,15	1,07	0,0322	0,1866	0,0324	0,1879
1,18	1,09	0,0326	0,2192	0,0328	0,2207
1,21	1,10	0,0330	0,2522	0,0332	0,2539
1,24	1,11	0,0334	0,2856	0,0336	0,2875
1,27	1,13	0,0338	0,3194	0,0340	0,3215
1,30	1,14				

Ergebniszusammenfassung der Rechteck- und Trapezregel:

Schrittweite	Rechteckregel	rel. Fehler	Trapezregel	rel Fehler	analytische Lösung
0,03	0,3194	0,0066	0,3215	0,000014	
					0,3215

In Abbildung 1.19 ist die Bildung des Integrals für verschiedene Schrittweiten und für die Rechteck- und die Trapezregel dargestellt. Man erkennt, dass der Fehler abhängig von der verwendeten Methode ist.

Bei der NEWTONschen Formel wird die NEWTONsche Interpolationsfunktion mit folgenden Ergebnissen integriert

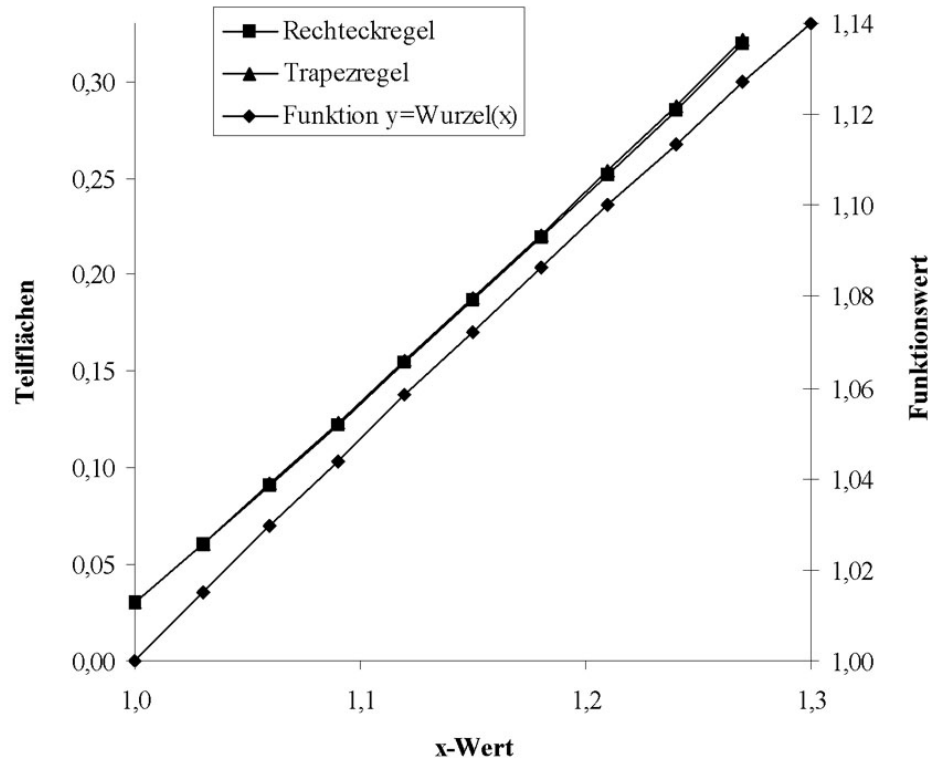


Abbildung 1.19: Entwicklung des Integrals im Intervall 1 bis 1,3 mittels der Rechteck- und Trapezformel

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h_1}{2} (y_0 + y_1) \quad \text{2 Stützstellen} \quad \text{lineare Interpolation}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{h_2}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) \quad \text{3 Stützstellen} \quad \text{quadratische Interpolation}$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{3h_3}{8} (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) \quad \text{4 Stützstellen} \quad \text{kubische Interpolation}$$

Je nach verwendeter NEWTONscher Formel wird das Integrationsintervall in unterschiedliche Schrittweiten h_n eingeteilt. Man erhält damit folgende Ergebnisse für:

2 Stützstellen:	$h = 0,3$	$f = \sqrt{x}$	F
	$a = 1$	1	0,321026314
	$b = 1,3$	1,140175425	

3 Stützstellen:	$h = 0,15$	$f = \sqrt{x}$	F
	$a = 1$	1	0,321484877
	$x_1 = 1,15$	1,072380529	
	$b = 1,3$	1,140175425	

4 Stützstellen:	$h = 0,1$	$f = \sqrt{x}$	F
	$a = 1$	1	0,321485149
	$x_1 = 1,1$	1,048808848	
	$x_1 = 1,2$	1,095445115	
	$b = 1,3$	1,140175425	

Ergebniszusammenfassung:

	Schrittweite	Integral	rel. Fehler
NEWTONsche Formel - 2 Stützstellen	0,30	0,3210	0,0014280
NEWTONsche Formel - 3 Stützstellen	0,15	0,3215	0,0000015
NEWTONsche Formel - 4 Stützstellen	0,10	0,3215	0,0000007
Rechteckformel	0,03	0,3194	0,0065550
Trapezformel	0,03	0,3215	0,0000140
Analytische Lösung		0,3215	

In dieser Tabelle ist zu erkennen, dass die Genauigkeit der NEWTONschen Formel mit 4 Stützstellen am höchsten ist. Dabei übertrifft die Genauigkeit dieses Verfahrens die Trapezregel um zwei Zehnerpotenzen mit einem Rechenaufwand, der nur ein Drittel beträgt.

• zu Aufgabe 4 (s. S. 206)

Das Integral

$$\begin{aligned} F &= \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \\ &= \int_1^9 \frac{1}{x} dx + \int_9^{10} \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

soll im Intervall $x = [1, 9]$ mittels SIMPSONscher Regel und im Intervall $x = [9, 10]$ mittels der Trapezregel berechnet werden.

(a)

Berechnung des Integrals von $x = [1, 9]$ mittels SIMPSONscher Regel:

Die SIMPSONsche Regel lautet:

$$F_{\text{simps}} = \int_{x_0}^{x_{2k}} f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$$

Zu beachten ist:

- Die Stützstellen müssen äquidistant (konstante Schrittweite h) sein.

- Die Anzahl der Stützstellen x_n muss ungerade sein ($n = 0 \dots 2k$).

Laut Aufgabenstellung soll die Schrittweite $\Delta x = 1$ sein. Damit ergeben sich einschließlich der Integrationsgrenzen 9 Stützstellen. Das Integral wird demzufolge angenähert durch:

$$\begin{aligned} F_{\text{simps}} &= \frac{\Delta x}{3} \cdot \left(\frac{1}{x_0} + \frac{4}{(x_0 + \Delta x)} + \frac{2}{(x_0 + 2 \cdot \Delta x)} + \frac{4}{(x_0 + 3 \cdot \Delta x)} + \frac{2}{(x_0 + 4 \cdot \Delta x)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{(x_0 + 5 \cdot \Delta x)} + \frac{2}{(x_0 + 6 \cdot \Delta x)} + \frac{4}{(x_0 + 7 \cdot \Delta x)} + \frac{1}{(x_0 + 8 \cdot \Delta x)} \right) \end{aligned}$$

$$F_{\text{simps}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{4}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{4} + \frac{2}{5} + \frac{4}{6} + \frac{2}{7} + \frac{4}{8} + \frac{1}{9} \right)$$

$$F_{\text{simps}} = 2,21005291$$

Die analytische Lösung liefert:

$$\begin{aligned}F_{analyt} &= \int_1^9 \frac{1}{x} dx \\&= [\ln(x)]_1^9\end{aligned}$$

$$F_{analyt} = 2,197224577$$

Damit ergibt sich bei der SIMPSON-Regel mit 9 Stützstellen ein Fehler von:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left| \frac{F_{simps} - F_{analyt}}{F_{analyt}} \right| \\ \varepsilon &= 0,00584\end{aligned}$$

(b)

Berechnung des Integrals von $x = [9, 10]$ mittels Trapezregel:

Die Trapezregel lautet:

$$F_{trap} = \Delta x \cdot \frac{(f(a) + f(b))}{2}$$

Mit den laut Aufgabenstellung vorgegebenen Werten erhält man:

$$F_{trap} = 1 \cdot \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{10}}{2}$$

$$F_{trap} = 0,105555556$$

Die analytische Lösung berechnet sich zu:

$$\begin{aligned}F_{analyt} &= \int_9^{10} \frac{1}{x} dx \\&= [\ln(x)]_9^{10}\end{aligned}$$

$$F_{analyt} = 0,105360516$$

Damit ergibt sich bei der Trapezregel mit 2 Stützstellen ein Fehler von:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \left| \frac{F_{trap} - F_{analyt}}{F_{analyt}} \right| \\ \varepsilon &= 0,001851167\end{aligned}$$

Die Summe der beiden Integrale liefert:

$$\begin{aligned} F &\approx F_{simps} + F_{trap} \\ &= 2,21005291 + 0,105555556 \\ F &\approx 2,315608466 \end{aligned}$$

Die analytische Lösung wird ermittelt zu:

$$\begin{aligned} F &= \int_1^{10} \frac{1}{x} dx \\ &= [\ln(x)]_1^{10} \\ F &= 2,302585093 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich ein Gesamtfehler von:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left| \frac{(F_{simps} + F_{trap}) - F}{F} \right| \\ \varepsilon &= 0,005655979 \end{aligned}$$

• zu Aufgabe 5 (s. S. 206)

(a)

Bei der Verwendung der Trapezregel wird das Integral wie folgt berechnet:

$$F = \int_a^b y(x) dx \approx \sum_{n=0}^m (|x_n - x_{n+1}|) \cdot \left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2} \right) \quad (\text{für } m \text{ Teilintervalle})$$

Entsprechend der Aufgabenstellung ist eine Schrittweite von $\Delta T = 200^\circ C$ zu verwenden. Damit wird das Integral angenähert durch:

$$Q = \Delta T \sum_{n=1}^7 \frac{c_n + c_{n+1}}{2}$$

wobei gilt:

$$c_1 = c_{(-200^\circ C)}$$

$$c_7 = c_{(1000^\circ C)}$$

$$\begin{aligned} Q &= 200^\circ C \left(\frac{c_{(-200^\circ C)}}{2} + c_{(0^\circ C)} + c_{(200^\circ C)} + c_{(400^\circ C)} + c_{(600^\circ C)} + c_{(800^\circ C)} + \frac{c_{(1000^\circ C)}}{2} \right) \\ &= 200^\circ C \cdot (0,02 + 0,18 + 0,24 + 0,26 + 0,27 + 0,275 + 0,14) \end{aligned}$$

$$Q = 277$$

(b)

Die SIMPSONSche Regel lautet:

$$F_{simps} = \int_{x_0}^{x_{2k}} f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$$

Zu beachten ist:

- Die Stützstellen müssen äquidistant (konstante Schrittweite h) sein.
- Die Anzahl der Stützstellen x_n muss ungerade sein ($n = 0 \dots 2k$).

Entsprechend der Aufgabenstellung ist eine Schrittweite von $\Delta T = 200^\circ C$ zu verwenden. Damit werden bei der SIMPSONschen Regel 7 Stützstellen verwendet.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{200^\circ C}{3} \cdot (c_{(-200^\circ C)} + 4 \cdot c_{(0^\circ C)} + 2 \cdot c_{(200^\circ C)} + \\ &\quad 4 \cdot c_{(400^\circ C)} + 2 \cdot c_{(600^\circ C)} + 4 \cdot c_{(800^\circ C)} + c_{(1000^\circ C)}) \\ &= 66,67^\circ C \cdot (0,04 + 0,72 + 0,48 + 1,04 + 0,54 + 1,1 + 0,28) \\ Q &= 280 \end{aligned}$$

- zu Aufgabe 6 (s. S. 206)

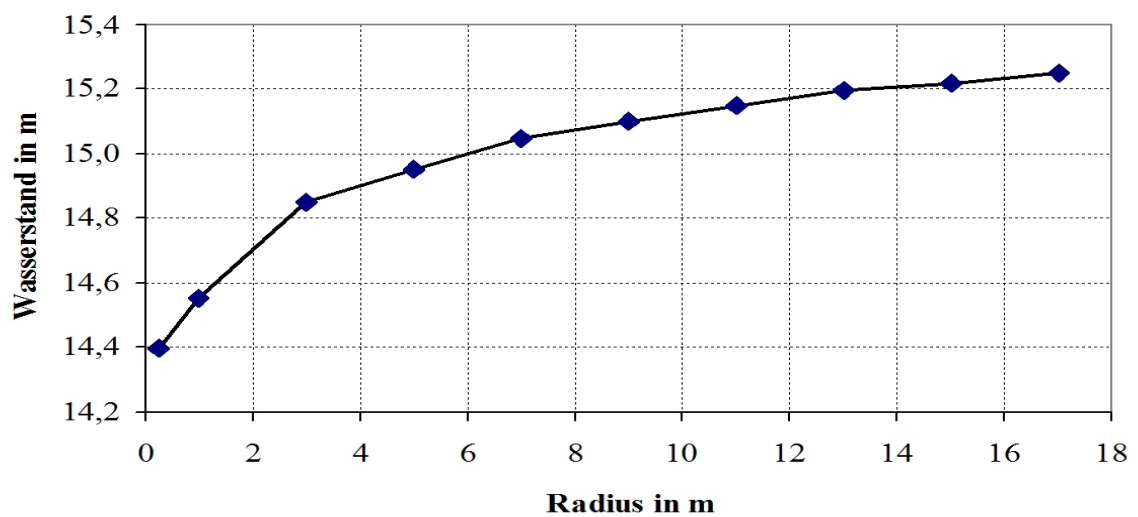


Abbildung 1.20: Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius

Für den vorliegenden Fall wird anhand der ursprünglichen Messwerte folgende Tabelle der Funktion aufgestellt (siehe auch Abbildung 1.20). Es ist nicht sinnvoll interpolierte Werte zu benutzen, da diese Interpolation Ungenauigkeiten in die Berechnung bringt.

Radius [m]	Wasserstand [m]	Absenkung [m]	Teilvolumen [m ³]
0,3	14,40	1,60	4,36
1,0	14,55	1,45	32,67
3,0	14,85	1,15	55,29
5,0	14,95	1,05	75,40
7,0	15,05	0,95	92,99
9,0	15,10	0,90	109,96
11,0	15,15	0,85	124,41
13,0	15,20	0,80	138,98
15,0	15,22	0,78	153,81
17,0	15,25	0,75	

Zur Berechnung des Wasservolumens, welches abgepumpt wurde, geht man von dem Volumen des Absenkungstrichters aus. Dazu ist die Höhe der Absenkung notwendig:

$$s = h_{t=0} - h(t)$$

Das Volumen wird berechnet, indem ein rotationssymmetrischer Absenkungstrichter angenommen wird. Der Längsschnitt ergibt sich aus der Fläche, die von der Absenkungskurve und von der x-Achse eingeschlossen wird. Entsprechend der vorliegenden Quantisierung kann das Volumen als Summe einzelner Hohlzylinder betrachtet werden, wobei, ähnlich wie bei der Integrationsformel, von rechteckigen oder trapezförmigen Hohlzylinderlängsschnittflächen auszugehen ist.

Rechteckiger Querschnitt:

$$\begin{aligned}V_{Hohlz.} &= V_{zyl-au\ddot{a}u\ddot{e}n} - V_{zyl-innen} \\&= \pi \cdot s \cdot r_2^2 - \pi \cdot s \cdot r_1^2 \\V_{Hohlz.} &= \pi \cdot s \cdot (r_2^2 - r_1^2)\end{aligned}$$

Auf das Quantisierungsschema bezogen:

$$V_{Hohlz.} = \pi \sum s_n \cdot (r_{n+1}^2 - r_n^2)$$

Bei trapezförmigen Längsschnitt wird die Fläche nach dem Trapezgesetz berechnet:

$$V_{Hohlz.} = \pi \sum \left(\frac{s_n + s_{n+1}}{2} \right) \cdot (r_{n+1}^2 - r_n^2)$$

Da bekannt ist, dass die Trapezformel genauere Werte liefert, soll diese im Weiteren benutzt werden. Die einzelnen Teilvolumina sind in der Tabelle aufgeführt. Als Gesamtvolumen des Absenkungstrichter ergibt sich:

$$V_{Hohlz.} = 787,87$$

Da das Wasservolumen entsprechend dem gravimetrischen Speichervermögen nur ein Bruchteil des Trichters ausmacht, muss das Volumen des Hohlzylinders mit dem Speicherkoeffizienten multipliziert werden.

$$V_{Wasser} = S \cdot V_{Hohlz.}$$

Laut Aufgabenstellung handelt es sich hier um gespannte Grundwasserleiterverhältnisse und damit gilt:

$$\begin{aligned}V_{Wasser} &= S_0 \cdot M \cdot V_{Hohlz.} \\&= 0,0001m^{-1} \cdot 10m \cdot 787,87 \\V_{Wasser} &= 0,78787m^3\end{aligned}$$

1.7.2 Numerische Lösung von Differentialgleichungen

1.7.2.1 Aufgaben

1. Lösen Sie folgende Differentialgleichung mittels numerischer Methoden, indem Sie bis $x = 1$ mit wenigen Intervallen, z.B. 0,5; 0,2 und 0,1 rechnen.

(Lösung s. S. 231)

$$y' = -xy^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = 2$$

- (a) Wenden Sie die einfache EULERSche Methode an. Konvergieren die Ergebnisse gegen den exakten Lösungswert $y(1) = 1$?
- (b) Wenden Sie das RUNGE-KUTTA-Verfahren 4. Ordnung und ein Predictor-Corrector-Verfahren auf die Differentialgleichung an und vergleichen Sie wieder die Ergebnisse.

2. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} + t^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad x(0) = 3$$

für den Punkt $t = 3$ nach dem EULER-Verfahren. Benutzen Sie dabei Schrittweiten von $\Delta t = 0,1$; $0,05$ und $0,01$.

(Lösung s. S. 237)

3. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$t \frac{dx}{dt} - x = t^2 \cos t \quad \text{mit} \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

für den Punkt $t = 2\pi$ nach dem EULER-Verfahren. Benutzen Sie dabei Schrittweiten von $\Delta t = 0,1\pi$ und $\Delta t = 0,05\pi$.

(Lösung s. S. 240)

4. Für die Konzentration C durch Sorption von Schadstoffen an der Bodenmatrix soll folgende DGL gelten:

$$T_1 \dot{C} + C = K$$

wobei T_1 eine Zeitkonstante und K eine Konstante sein sollen. $T_1 = 1d^{-1}$, $K = 100$
Die Konzentrationsänderung zum Zeitpunkt $t = 0$ soll $C(0) = 0$ sein.

(Lösung s. S. 242)

- (a) Lösen Sie die DGL mittels EULER-Verfahrens ($h = 0,1d$) und berechnen Sie die Konzentration für den Zeitpunkt $t = 1d$.
- (b) Skizzieren Sie den prinzipiellen Zeitverlauf der Konzentration.

5. Der Grundwasserwiederanstieg und damit die Auffüllung der Restlöcher in den ehemaligen Braunkohlentagebauen dauert unter natürlichen Bedingungen zu lange. Deshalb wird der Auffüllvorgang mit einer konstanten Fremdeinspeisung ($h_{t=0} = 0$) beschleunigt (siehe Abbildung 1.21).

Stellen Sie für den Auffüllvorgang $h(t)$, ohne Berücksichtigung des Grundwasserleiters und einer Grundwasserneubildungsrate, die Differentialgleichung auf.

Beschreiben Sie die Lösung mittels numerischer Methoden. (Lösung s. S. 245)

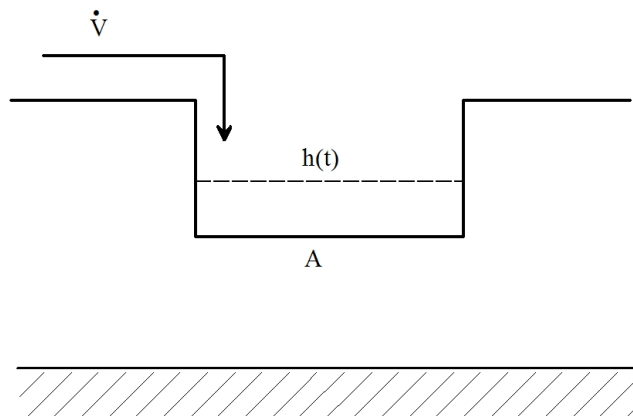


Abbildung 1.21: Füllvorgang eines Restloches

6. Es ist folgende Differentialgleichung gegeben:

$$\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g \quad \text{mit } h_{t=0} = 0$$

$$g = 0,015 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ und } k = 0,01 \text{ s}^{-1}$$

Lösen Sie die Differentialgleichung mittels numerischer Methoden (Lösung s. S. 245).

1.7.2.2 Lösungen

- zu Aufgabe 1 (s. S. 229)

(a)

Entsprechend der EULERSchen-Methode wird die Lösung der Differentialgleichung auf die schrittweise Lösung einer algebraischen Gleichung überführt. Je nachdem, ob nur mit einem Intervall zwischen Ober- und Untergrenze (b bzw. a) oder mit n Teilintervallen gearbeitet wird, erhält man:

$$\begin{aligned}
 y_b &= y_a + \int_a^b f(x, y) dx \approx y_a + f(a, y_a) \cdot (b - a) \\
 &\approx y_a + f(a, y_a) \cdot h \\
 y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx \approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) \\
 &\approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot \Delta x_n
 \end{aligned}$$

Für die Lösung der vorliegenden Differentialgleichung bedeutet dies:

$$y' = -xy^2$$

$$y_{n+1} = y_n - x_n \cdot y_n^2 \cdot \Delta x$$

Bei Einsetzen der vorgegebenen Anfangsbedingung $y(0) = 2$ und des zu berechnenden Wertes $y_{(x=1)}$ erhält man die in Abbildung 1.22 gezeigte Entwicklung der Lösung in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite ($\Delta x = 0,05; 0,1; 0,2; 0,5$).

Die analytische Lösung dieser Differentialgleichung ist im Abschnitt 1.6.1.1 "Analytische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen" (Seite 132) dargelegt. Die analytische Lösung

$$y(1) = 1$$

ist zum Vergleich mit angegeben. In Abbildung 1.23 ist die Abhängigkeit der Lösung von der Zeitschrittweite dargestellt. Darin ist zu erkennen, dass die Lösung des EULER-Verfahrens für diese Aufgabe sehr gut mit dem Wert der analytischen Lösung $y(1) = 1$ konvergiert.

Die analytische Lösung lautet:

$$y = -\frac{2}{x^2 + 1}$$

	$\Delta x = 0,05$	$\Delta x = 0,1$	$\Delta x = 0,2$	$\Delta x = 0,5$	$\Delta x = 1$	analytisch
--	-------------------	------------------	------------------	------------------	----------------	------------

$y(x = 1)$	0,953	0,906	0,808	0,5	0	1
------------	-------	-------	-------	-----	---	---

rel. Fehler ($x = 1$)	0,047	0,094	0,192	0,5	1	
----------------------------	-------	-------	-------	-----	---	--

abs. Fehler ($x = 1$)	0,047	0,094	0,192	0,5	1	
----------------------------	-------	-------	-------	-----	---	--

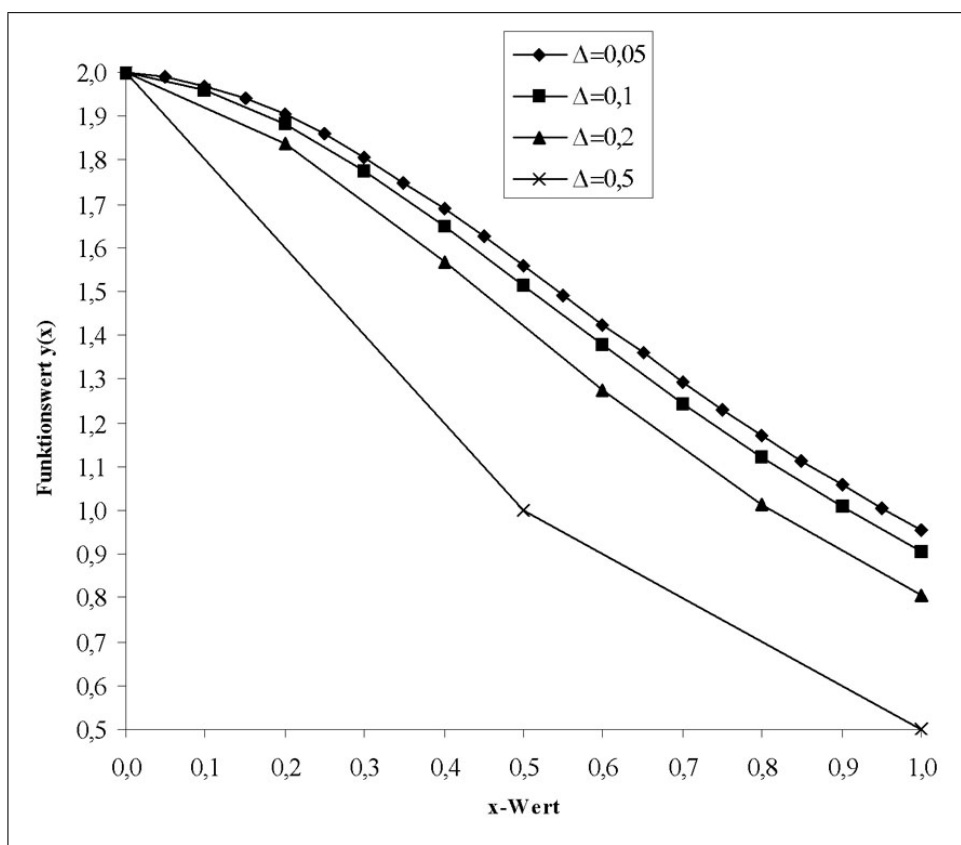


Abbildung 1.22: Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter

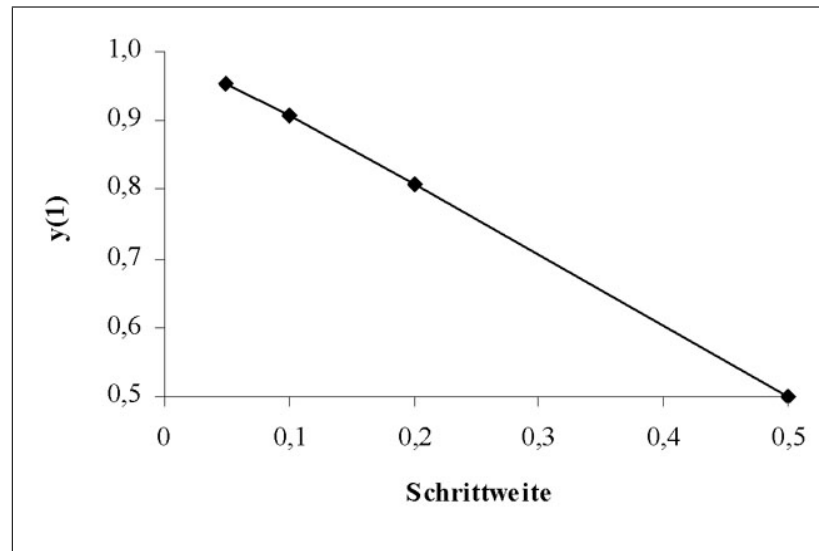


Abbildung 1.23: Abhängigkeit des Integrationsergebnisses von Quantisierungsschrittweite

(b)

Das einfachste Verfahren, welches sich vom EULER-Verfahren hinsichtlich der Genauigkeit unterscheidet, ist das RUNGE-KUTTA-Verfahren 2. Ordnung. In diesem Fall ist:

$$y_b = y_a + k_2$$

$$k_1 = h \cdot f(x_a, y_a)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x_a + \frac{1}{2}h, y_a + \frac{1}{2}k_1\right)$$

mit : $h = b - a$

Für die Lösung der vorliegenden Differentialgleichung bedeutet dies:

$$y' = -xy^2$$

$$y_b = y_a + k_2$$

$$k_1 = h \cdot (-a \cdot y_a^2)$$

$$k_2 = h \cdot \left(- \left(a + \frac{h}{2} \right) \cdot \left(y_a + \frac{k_1}{2} \right)^2 \right)$$

Für $a = 0$, $b = 1$ und $h = 1$ ergeben sich folgende Werte:

y_a	k_1	k_2	y_b
2	0	-2	0

Für $a = 0$, $b = 1$ und $h = 0,5$ ergeben sich folgende Werte:

y_n	k_1	k_2	y_{n+1}
2	0	-0,5	1,5
1,5	-0,5625	-0,557	0,943

Das RUNGE-KUTTA-Verfahren 4. Ordnung stellt ein häufig benutztes Verfahren dar, welches einen guten Kompromiss zwischen Genauigkeit und numerischem Aufwand darstellt. Für die allgemeine Form:

$$y_b = y_a + k$$

schreibt man beim RUNGE-KUTTA-Verfahren 4. Ordnung:

$$k = \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = h \cdot f(a, y_a)$$

$$k_2 = h \cdot f\left(a + \frac{h}{2}, y_a + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(a + \frac{h}{2}, y_a + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h \cdot f(a + h, y_a + k_3)$$

$$\text{mit : } h = |b - a|$$

Für die Lösung der vorliegenden Differentialgleichung bedeutet dies:

$$y' = -xy^2$$

$$y_{n+1} = y_n - x_n \cdot y_n^2 \cdot \Delta x$$

Für $a = 0$, $b = 1$ und $h = 1$ ergeben sich folgende Werte:

y_a	k_1	k_2	k_3	k_4	y_b
2	0	-2	-0,5	-2,25	0,792

Für $a = 0$, $b = 1$ und $h = 0,5$ ergeben sich folgende Werte:

y_n	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{n+1}
2	0	-0,5	-0,383	-0,654	1,597
1,597	-0,637	-0,613	-0,625	-0,473	0,9994

Bei Einsetzen der vorgegebenen Anfangsbedingung $y(0) = 2$ und des zu berechnenden Wertes $y_{(x=1)}$ erhält man die in Abbildung 1.22 gezeigte Entwicklung der Lösung in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite ($\Delta x = 0,05; 0,1; 0,2; 0,5$).

Die analytische Lösung dieser Differentialgleichung ist im Abschnitt 1.6.1.1 "Analytische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen" s. S. 132 dargelegt.

Die analytische Lösung

$$y(1) = 1$$

ist zum Vergleich mit dargestellt.

		$y(x = 1)$	rel. Fehler ($x = 1$)	abs. Fehler ($x = 1$)
EULER	$\Delta x = 0,5$	0,5	0,5	0,5
EULER	$\Delta x = 0,2$	0,808	0,192	0,192
EULER	$\Delta x = 0,1$	0,906	0,094	0,094
EULER	$\Delta x = 0,05$	0,953	0,047	0,047
R-K-2. O.	$\Delta x = 1$	0	1	1
R-K-2. O	$\Delta x = 0,5$	0,943	0,057	0,057
R-K-4. O	$\Delta x = 1$	0,792	0,208	0,208
R-K-4. O	$\Delta x = 0,5$	0,9994	0,0006	0,0006
analytisch		1		

- zu Aufgabe 2 (s. S. 229)

Entsprechend der EULERSchen Methode wird die Lösung der Differentialgleichung auf die schrittweise Lösung einer algebraischen Gleichung überführt. Je nachdem, ob nur mit einem Intervall zwischen Ober- und Untergrenze (b bzw. a) oder mit n Teilintervallen gearbeitet wird, erhält man:

$$\begin{aligned}
 y_b &= y_a + \int_a^b f(x, y) dx \approx y_a + f(a, y_a) \cdot (b - a) \\
 &\approx y_a + f(a, y_a) \cdot h \\
 y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx \approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) \\
 &\approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot \Delta x_n
 \end{aligned}$$

Für die Lösung der vorliegenden Differentialgleichung bedeutet dies:

$$\frac{dx}{dt} + t^2 x = 0$$

$$x_{n+1} = x_n - t_n^2 \cdot x_n \cdot \Delta t$$

Bei Einsetzen der vorgegebenen Anfangsbedingung $x(0) = 3$ und des zu berechnenden Wertes $x_{(t=3)}$ erhält man die in Abbildung 1.24 gezeigte Entwicklung der Lösung in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite ($\Delta t = 0, 1; 0, 05; 0, 01$).

Die analytische Lösung dieser Differentialgleichung ist im Abschnitt 1.6.1.1 "Analytische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen" (Seite 132) dargelegt. Die analytische Lösung

$$x = 3e^{-\frac{1}{3}t^3}$$

ist zum Vergleich mit dargestellt. Man erkennt, dass die Abweichung sehr stark von dem

Kurvenverlauf bzw. dem zu berechnenden Wert abhängt.

	$\Delta t = 0,1$	$\Delta t = 0,05$	$\Delta t = 0,01$	analytisch
$x(t = 3)$	0,0000007	0,0000568	0,0002739	0,0003702
rel. Fehler ($t = 3$)	0,998	0,847	0,260	
abs. Fehler ($t = 3$)	0,0004	0,0003	0,0001	
$x(t = 1,5)$	0,78	0,88	0,96	0,97
rel. Fehler ($t = 1,5$)	0,194	0,096	0,019	
abs. Fehler ($t = 1,5$)	0,189	0,093	0,018	

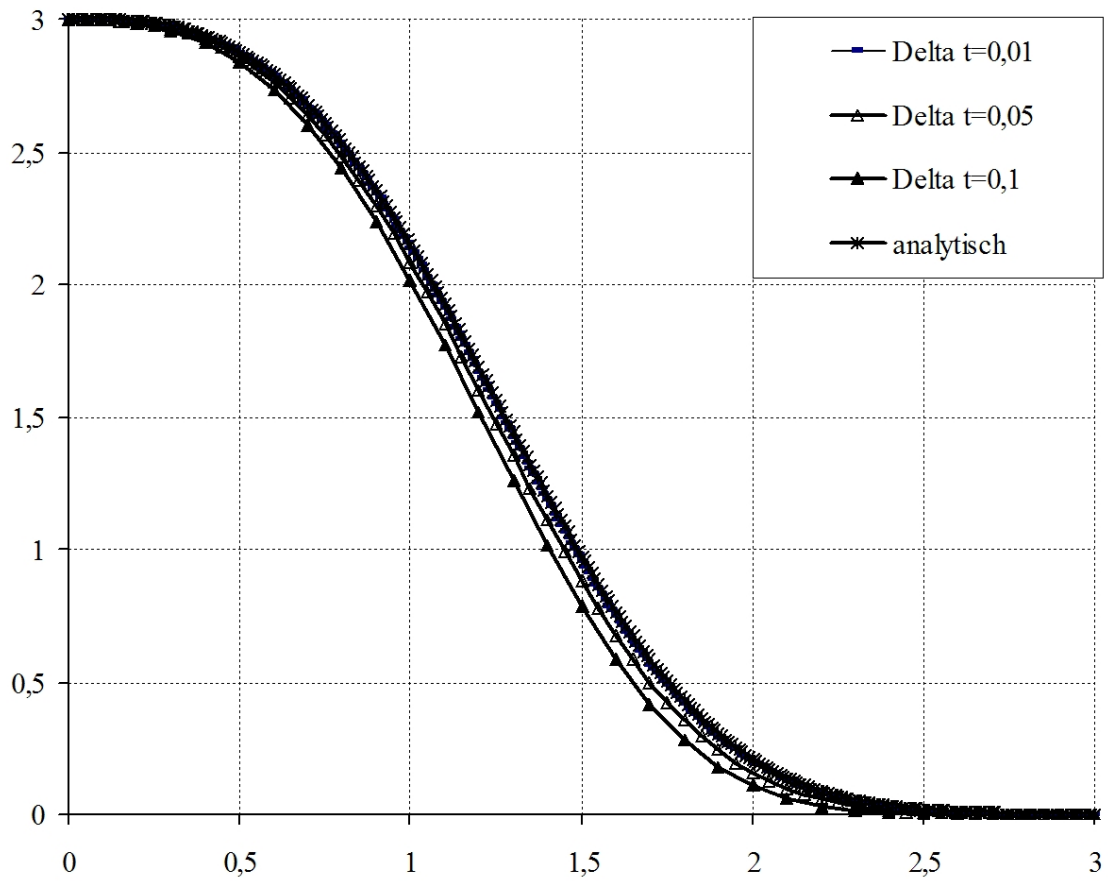


Abbildung 1.24: Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter

- zu Aufgabe 3 (s. S. 229)

Entsprechend der EULER-Methode wird die Lösung der Differentialgleichung auf die schrittweise Lösung einer algebraischen Gleichung überführt. Je nachdem, ob nur mit einem Intervall zwischen Ober- und Untergrenze (b bzw. a) oder mit n Teilintervallen gearbeitet wird, erhält man:

$$\begin{aligned}y_b &= y_a + \int_a^b f(x, y) dx \approx y_a + f(a, y_a) \cdot (b - a) \\&\approx y_a + f(a, y_a) \cdot h \\y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx \approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) \\&\approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot \Delta x_n\end{aligned}$$

Für die Lösung der vorliegenden Differentialgleichung bedeutet dies:

$$t \frac{dx}{dt} - x = t^2 \cos t$$

$$x_{n+1} = x_n + \left(t_n \cos t_n + \frac{1}{t_n} x_n \right) \cdot \Delta t$$

Bei Einsetzen der vorgegebenen Anfangsbedingung $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ und des zu berechnenden Wertes $x_{(t=2\pi)}$ erhält man die in Abbildung 1.24 gezeigte Entwicklung der Lösung in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite ($\Delta t = 0, 1\pi$ und $0, 05\pi$).

Die analytische Lösung dieser Differentialgleichung ist im Abschnitt 1.6.1.1 "Analytische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen", Seite 133 dargelegt. Die analytische Lösung

$$x = t(1 + \sin t)$$

ist zum Vergleich mit dargestellt. Man erkennt, dass die Abweichung sehr stark von dem Kurvenverlauf, bzw. dem zu berechnenden Wert abhängt.

	$\Delta t = 0,1\pi$	$\Delta t = 0,05\pi$	analytisch
$x(t = 2\pi)$	6,337	6,244	6,283
rel. Fehler ($t = 2\pi$)	0,0085	0,0062	
abs. Fehler ($t = 2\pi$)	0,0534	0,0388	
$x(t = 3,45)$	1,386	1,853	2,388
rel. Fehler ($t = 3,45$)	0,420	0,224	
abs. Fehler ($t = 3,45$)	1,002	0,534	

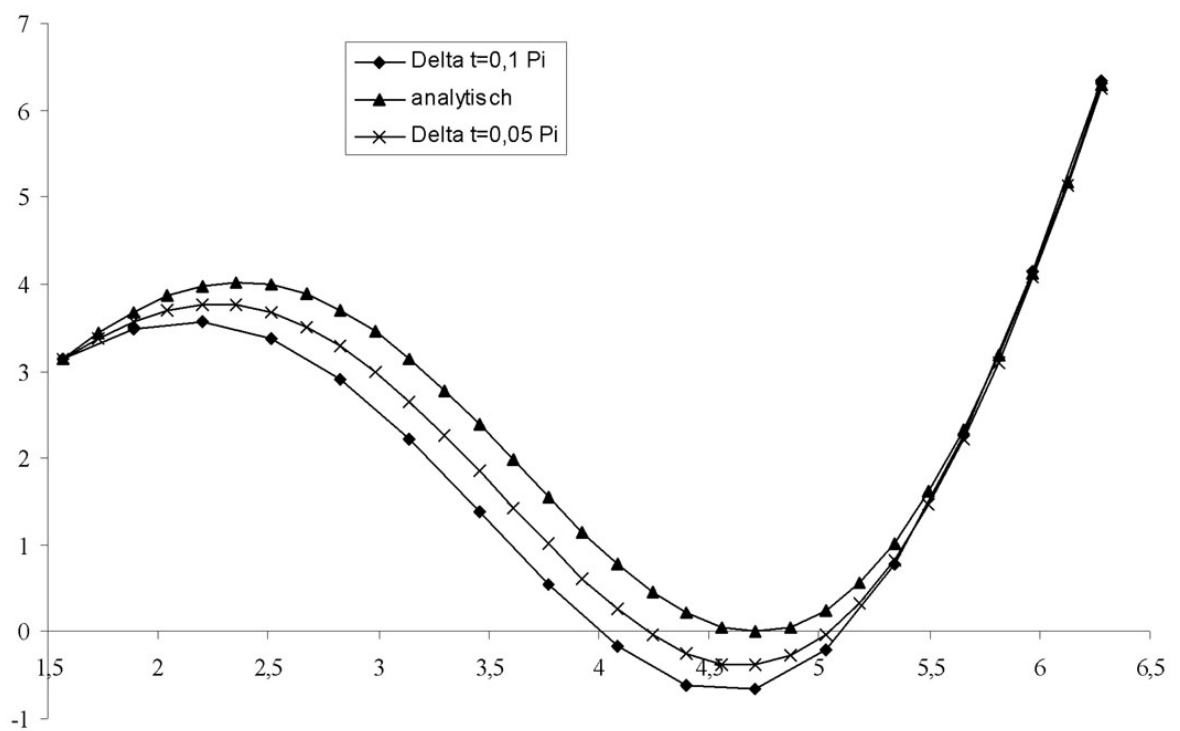


Abbildung 1.25: Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter

- zu Aufgabe 4 (s. S. 229)

(a)

Entsprechend der EULER-Methode wird die Lösung der Differentialgleichung auf die schrittweise Lösung einer algebraischen Gleichung überführt. Je nachdem, ob nur mit einem Intervall zwischen Ober- und Untergrenze (b bzw. a) oder mit n Teilintervallen gearbeitet wird, erhält man:

$$\begin{aligned}y_b &= y_a + \int_a^b f(x, y) dx \approx y_a + f(a, y_a) \cdot (b - a) \\&\approx y_a + f(a, y_a) \cdot h \\y_{n+1} &= y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx \approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot (x_{n+1} - x_n) \\&\approx y_n + f(x_n, y_n) \cdot \Delta x_n\end{aligned}$$

Für die Lösung der vorliegenden Differentialgleichung bedeutet dies:

$$T_1 \dot{C} + C = K$$

$$C_{n+1} = C_n + \frac{1}{T_1} (K - C)_n \cdot \Delta t$$

Bei Einsetzen der vorgegebenen Anfangsbedingung $C_{t=0} = 0$ und des zu berechnenden Wertes $C_{t=1d}$ erhält man die in Abbildung 1.26 gezeigte Entwicklung der Lösung in Abhängigkeit von der Zeit ($\Delta t = 0,1d$).

Die analytische Lösung dieser Differentialgleichung ist im Abschnitt 1.6.1.1 "Analytische Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen", Seite 229 dargelegt. Die analytische Lösung

$$C = C_\infty \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)$$

ist zum Vergleich mit dargestellt. Man erkennt, dass die Abweichung sehr stark von dem Kurvenverlauf bzw. dem zu berechnenden Wert abhängt

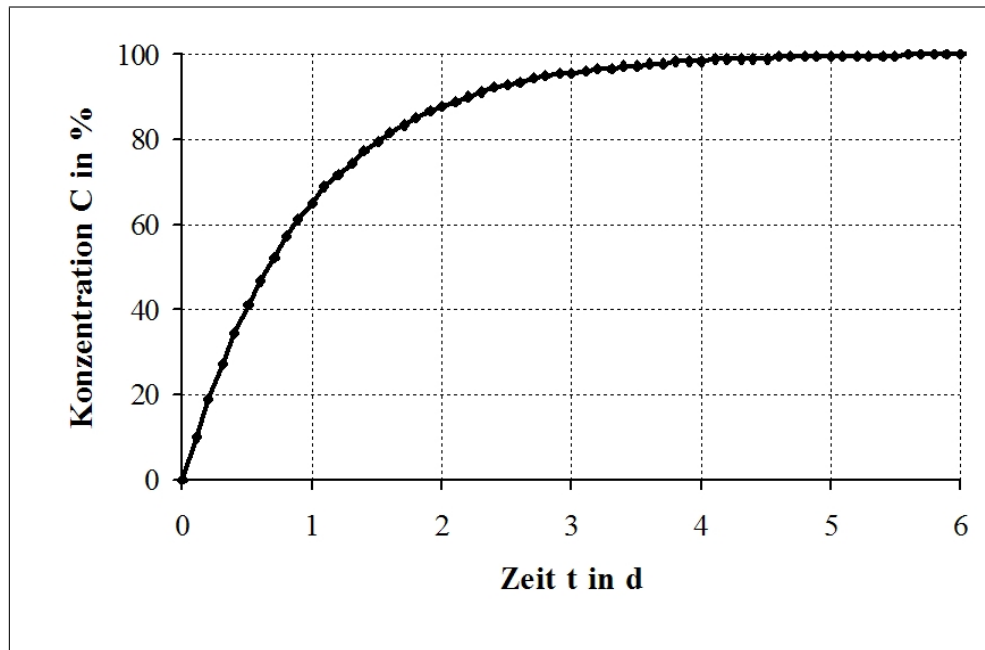


Abbildung 1.26: Abhängigkeit der Konzentration von der Zeit

	$\Delta t = 0,1\text{d}$ analytisch	
$x(t = 1\text{d})$	65,132	63,212
rel. Fehler ($t = 1\text{d}$)	0,03	
abs. Fehler ($t = 1\text{d}$)	1,92	

(b)
Skizze

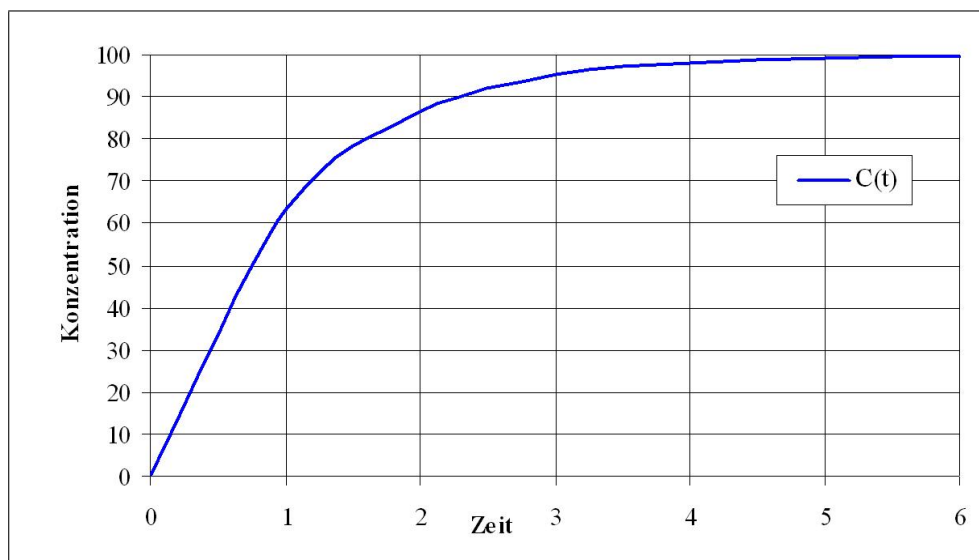


Abbildung 1.27: Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentration

- zu Aufgabe 5 (s. S. 229)

$$A \frac{dh}{dt} = \dot{V} \quad \text{mit: } h_{t=0} = 0$$

$$dh = \frac{1}{A} \cdot \dot{V} dt. \quad \text{es gilt: } dh \approx \Delta h = h_{n+1} - h_n$$

$$h_{n+1} = h_n + \frac{1}{A} \cdot \dot{V} \cdot \Delta t$$

$$h_0 = 0$$

$$h_1 = h_0 + \frac{1}{A} \cdot \dot{V} \cdot \Delta t$$

$$h_2 = h_1 + \frac{1}{A} \cdot \dot{V} \cdot \Delta t$$

...

- zu Aufgabe 6 (s. S. 229)

$$g = 0,015 \frac{m}{s} \quad k = 0,01 s^{-1}$$

$$\frac{dh}{dt} + k \cdot h = g \quad \text{mit: } h_{t=0} = 0$$

$$dh = (g - k \cdot h) dt$$

$$dh \approx \Delta h = h_{n+1} - h_n$$

$$h_{n+1} = h_n (0,015 - 0,01 \cdot h_n) \Delta t$$

