

Technische Universität Dresden
Fakultät Forst-, Geo- und Hydrowissenschaften

SYSTEMANALYSE IN DER WASSERWIRTSCHAFT -
AUFGABEN UND LÖSUNGEN

Peter-Wolfgang Gräber

Sommersemester 2007

Das vorliegende Lehrmaterial ist internes Studienmaterial für die Studiengänge der Fachrichtung Wasserwesen der TU Dresden. Das Material unterliegt den Urheberrechten und ist nur zum Gebrauch für interne Aus- und Weiterbildung innerhalb der TU Dresden gestattet. Jegliche Vervielfältigung, auch auszugsweise, ist nur mit Zustimmung des Verfassers zulässig.

Redaktion und Gestaltung: Prof. Dr.-Ing. habil. Peter-Wolfgang Gräber
TU Dresden
Fakultät Forst-, Geo- und Hydrowissenschaften
Institut für Abfallwirtschaft und Altlasten

Tel.: (03501) 530029
Fax: (03501) 530022
e-mail: Peter-Wolfgang.Graeber@tu-dresden.de
Internet: <http://www.tu-dresden.de/fghh/aa/graeber>
Redaktionsschluss: 01.08.2007

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis	VI
Abbildungsverzeichnis	XI
I Aufgaben und Lösungen	XIII
Teil	
1 Mathematische Grundlagen	1
1.1 Algebraische Grundlagen	2
1.1.1 Aufgaben	2
1.1.2 Lösungen	3
1.2 Matrizen	6
1.2.1 Aufgaben	6
1.2.2 Lösungen	7
1.3 Lineare Gleichungssysteme	17
1.3.1 Aufgaben	17
1.3.2 Lösungen	19
1.4 Vektoralgebra und Analysis	75
1.4.1 Aufgaben	75
1.4.2 Lösungen	77
1.5 Interpolationsverfahren	95
1.5.1 Aufgaben	95

1.5.2	Lösungen	96
1.6	Gewöhnliche Differentialgleichungen	121
1.6.1	Analytische Methoden - DGL erster Ordnung	121
1.6.1.1	Aufgaben	121
1.6.1.2	Lösungen	124
1.6.2	Analytische Methoden - DGL höherer Ordnung	151
1.6.2.1	Aufgaben	151
1.6.2.2	Lösungen	151
1.6.3	LAPLACE-Transformation	155
1.6.3.1	Aufgaben	155
1.6.3.2	Lösungen	158
1.7	Numerische Verfahren	206
1.7.1	Integrationsverfahren	206
1.7.1.1	Aufgaben	206
1.7.1.2	Lösungen	208
1.7.2	Numerische Lösung von Differentialgleichungen	229
1.7.2.1	Aufgaben	229
1.7.2.2	Lösungen	231
2	Analytische Lösung der Brunnenanströmung	247
2.1	Aufgaben	248
2.2	Lösungen	257
3	Numerische Grundwasserströmungsmodelle	307
3.1	Aufgaben	308

3.2	Lösungen	312
4	Simulationsprogrammsystem ASM	349
4.1	Aufgaben	350
5	Prozessanalyse	355
5.1	Aufstellen von Gleichungen	356
5.1.1	Aufgaben	356
5.1.2	Lösungen	360
5.2	Übertragungsfunktionen	370
5.2.1	Aufgaben	370
5.2.2	Lösungen	376

Tabellenverzeichnis

1.1	Korrespondenztafel	158
1.2	Korrespondenztafel - Fortsetzung	159
2.1	Brunnenfunktion $W(\sigma)$ für den Bereich $1 \cdot 10^{-12} \leq \sigma \leq 9$	256
5.1	Zusammenhang zwischen den verschiedenen Funktionen des Übertragungs- verhaltens	399

Abbildungsverzeichnis

1.1	Darstellung der Konzentrationsverteilung als Äquipotentiallinien	87
1.2	Darstellung der Äquipotentiallinien der Konzentrationsverteilung	89
1.3	Darstellung der Hydroisohypsen	92
1.4	Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels	122
1.5	Füllvorgang eines Restloches	123
1.6	Abhängigkeit des Grundwasserstandes von geohydraulischen Verhältnissen	145
1.7	Grundwasserstandsänderung bei sinusförmiger Hochwasserwelle des Flusses	146
1.8	Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentrationsänderung	148
1.9	Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels	156
1.10	Füllvorgang eines Restloches	157
1.11	Schema der Grundwasserverhältnisse	190
1.12	Änderung des Grundwasserstandes bei sprunghafter Änderung des Flusswas- serstandes	195
1.13	Grundwasserhöhe z_R gegenüber der Flusswasserspiegelhöhe h_{Fl}	201
1.14	Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentrationsänderung	203
1.15	Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius	207
1.16	Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten . .	210
1.17	Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten . .	213
1.18	Numerische Integration mit verschiedenen Verfahren und Schrittweiten . .	216
1.19	Entwicklung des Integrals im Intervall 1 bis 1,3 mittels der Rechteck- und Trapezformel	219

1.20	Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius	226
1.21	Füllvorgang eines Restloches	230
1.22	Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter	232
1.23	Abhängigkeit des Integrationsergebnisses von Quantisierungsschrittweite	233
1.24	Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter	239
1.25	Verlauf der Lösungsfunktion, Quantisierungsschrittweite als Parameter	241
1.26	Abhängigkeit der Konzentration von der Zeit	243
1.27	Prinzipieller Zeitverlauf der Konzentration	244
2.1	Unendlich ausgedehnter Grundwasserleiter mit Brunnen und GWBR	248
2.2	Grundwasserleiter mit unvollkommenem Fluss, Brunnen und Baugrube	249
2.3	Grundwasserleiter mit Brunnen und Baugrube, Spundwand und Fluss	249
2.4	Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius	250
2.5	Grundwasserleiter mit Fluss, Brunnen und Hangzufluss	251
2.6	Unendlich ausgedehnter Grundwasserleiter mit einem Förderbrunnen	252
2.7	Realer Fluss mit Entnahmebrunnen (Grundwasseranreicherungsanlage)	253
2.8	Grundwasseranreicherungsanlage mit Brunnen und Spundwand	254
2.9	Uferfiltratanlage mit Brunnen und Fluss	254
2.10	Gespannter Grundwasserleiter mit Entnahmebrunnen und Grundwasserbe- obachtungsrohr	257
2.11	Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit für $r = 10m$	259
2.12	Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit innerhalb der ersten $30min$ und für $r = 10m$	260
2.13	Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit und für verschiedene Radien	263

2.14	Absenkung in Abhängigkeit vom Radius und für unterschiedliche Zeiten . . .	263
2.15	Förderganglinie und deren Aufteilung in einzelne Förderleistungen	269
2.16	Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit bei stufenförmiger Förderung . . .	270
2.17	Grundwasserleiter mit unvollkommenem Fluss und Brunnen	271
2.18	Detailansicht der Zusatzlängen und virtuellen Brunnen	272
2.19	Schema zur Entfernungsbestimmung der realen und der virtuellen Brunnen	273
2.20	Lage der virtuellen Brunnen bei der Begrenzung durch eine Barriere	276
2.21	Lage des virtuellen Brunnens bei einem idealen Fluss als Randbedingung . .	281
2.22	Abhängigkeit des Grundwasserstandes und der Absenkung vom Hangzufluss	288
2.23	GWBR mit Förderintervall	291
2.24	RB dritter Art -> Verschiebung	295
2.25	Zwei Brunnen an einem Fluss	298
2.26	Grundwasseranreicherungsanlage	300
2.27	Schematische Anordnung mit Brunnen und Spundwand	302
2.28	Grundwasserleiter mit Brunnen und Fluss	305
3.1	Geschichteter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime	308
3.2	Geschichteter Grundwasserleiter mit instationärem Strömungsregime	310
3.3	Einbau eines Tunnelbauwerkes in einem Grundwasserleiter	310
3.4	Deichbauwerk mit Kerndichtung	310
3.5	Grundwasserleiter mit Fluss und Brunnen	311
3.6	Wirkung eines Flusses und eines Hangzuflusses auf den Grundwasserleiter . .	311
3.7	Quantisierter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime	312
3.8	Iterationsverhalten des Wasserstandes	317

3.9	Quantisierter Grundwasserleiter mit Speicherkapazitäten	319
3.10	Verlauf eines Absenkungsvorgangs	321
3.11	Wasserstand in Abhängigkeit von Zeit und Ort	325
3.12	Schematisierung des Grundwasserleiters mit Tunneleinbau	326
3.13	Deich mit Kerndichtung und Quantisierungsschema	331
3.14	Darstellung des quantisierten Grundwasserleiters	335
3.15	Grundwasserstand nach einem Tag	339
3.16	Grundwasserleiter mit Quantisierungsschema	340
3.17	Ankopplung des Flusses über zusätzliche Widerstände	344
4.1	Grundwasserleiter mit Brunnen und Baugrube	351
4.2	Geschichteter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime	351
4.3	Geschichteter Grundwasserleiter mit instationärem Strömungsregime	352
4.4	Einbau eines Tunnelbauwerkes in einem Grundwasserleiter	352
5.1	Füllvorgang eines Restloches mit konstantem Volumenstrom	356
5.2	Füllvorgang eines Restloches mit variablem Volumenstrom	357
5.3	Gekoppelte Speicherkaskade	357
5.4	Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels mit Blockschaltbild	358
5.5	Wasserstandsregelung eines Bewässerungsgrabens	358
5.6	Schadstofftransport aus dem Boden in das Wasser	359
5.7	Füllvorgang eines Restloches mit konstantem Volumenstrom	360
5.8	Füllvorgang eines Restloches mit variablem Volumenstrom	361
5.9	Gekoppelte Speicherkaskade	362
5.10	Schema der Grundwasserfließverhältnisse	364

5.11	Wasserstandsregelung eines Bewässerungsgrabens	366
5.12	Impulsantwort eines Säulen-Durchlaufversuches	372
5.13	Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius	373
5.14	Bestimmung der Zeitkonstanten T aus dem Absenkungsverlauf	377
5.15	Absenkungsverlauf bei $[\dot{V} = 0,005m^3s^{-1}$	378
5.16	Eingangssignal $[\dot{V} = 0,1m^3s^{-1}$	379
5.17	Bestimmung der Zeitkonstante	379
5.18	Konzentrationsverlauf C_{r1}	383
5.19	Konzentrationsverlauf mit ausgewählten Punkten zur Parameterbestimmung	384
5.20	Konzentrationsverlauf C_{r1} mit Bestimmung der Parameter	387
5.21	Konzentrationsverlauf C_{r2} und Parameterbestimmung	388
5.22	Impulsantwort eines Säulen-Durchlaufversuches	390
5.23	Auswertung der Impulsantwort	391
5.24	Antwortsignal eines Pumpversuches	394
5.25	Impulsantwort mit Parameterbestimmung	395
5.26	Temperaturverlauf des Flusswassers und des Grundwassers in der Fassung .	401



Kapitel 2

Analytische Lösung der Brunnenanströmung

2.1 Aufgaben

1. Berechnen Sie die Absenkung s für die Grundwasserbeobachtungsrohre (GWBR) in einer Entfernung r und zu den Zeiten t , die infolge einer Wasserförderung \dot{V} im Brunnen Br für nachfolgenden unendlich ausgedehnten Grundwasserleiter (siehe Abbildung 2.1) auftritt und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar (Lösung s. S. 257).

$$k = 1 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}; M = 10m; S = 0,001; a = \frac{S}{T} = 0,1 \frac{s}{m^2}; r_0 = 0,25m; \dot{V} = 0,015 \frac{m^3}{s}; h_n = 16m;$$

$$r = 5m; 10m; 20m; 50m$$

$$t = 1min; 2min; 5min; 10min; 20min; 30min; 45min; 60min; 90min; 120min$$

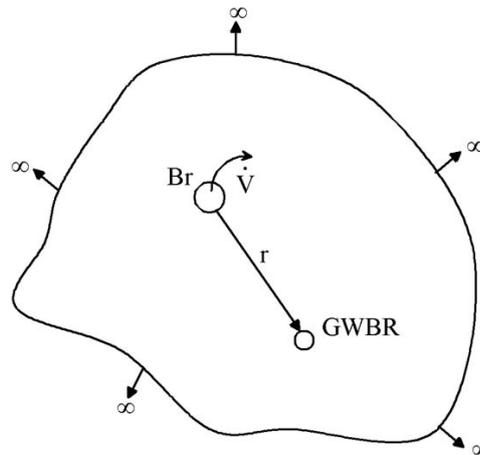


Abbildung 2.1: Unendlich ausgedehnter Grundwasserleiter mit Brunnen und GWBR

2. Berechnen Sie für den Grundwasserleiter aus Aufgabe 1 (siehe Abbildung 2.1) die Absenkung im GWBR ($r = 10m$) alle 10 Minuten bis maximal 100 Minuten, wenn der Volumenstrom des Förderbrunnens folgender Zeitstaffelung unterliegt, und stellen Sie die Lösung grafisch dar (Lösung s. S. 264).

Volumenstrom $\left[\frac{m^3}{s} \right]$	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,000
Förderbeginn [min]	0	10	20	30	40	50	60

3. In einem Grundwasserleiter in der Nähe eines Flusses soll eine Baugrube abgesenkt werden. Die Mitte der Baugrube ist $100m$ vom Fluss entfernt, die Entwässerungsbrunnen $80m$. Es sind drei Brunnen parallel zum Fluss angeordnet, die jeweils $25m$ voneinander entfernt sind. Die Brunnen besitzen einen Durchmesser von $r_0 = 0,3m$ und fördern mit jeweils $\dot{V} = 0,015 \frac{m^3}{s}$.

Der Fluss besitzt eine Breite von $B = 20m$ und eine Kolmationsschicht von $k' = 3 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s}$; $M' = 1m$. (siehe Abbildung 2.2)

Der Grundwasserleiter hat folgende Eigenschaften:

$$k = 5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}; n_0 = 0,20; h_n = 15m; M = 20m.$$

Wird nach 10 Tagen im Zentrum der Baugrube die Zielabsenkung von $2,5m$ erreicht?
(Lösung s. S. 271)

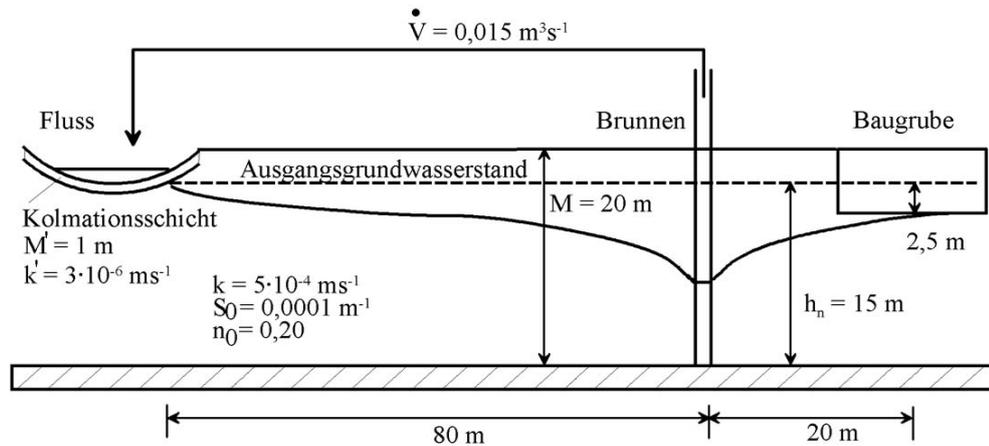


Abbildung 2.2: Grundwasserleiter mit unvollkommenem Fluss, Brunnen und Baugrube

4. Überprüfen Sie mittels der analytischen Lösung der Brunnenanströmung, ob der Mittelpunkt der Baugrube nach einer Zeit von 7 Tagen bei einer Förderleistung von $\dot{V} = 0,01 \frac{m^3}{s}$, $r_0 = 0,30m$ mit einer Sicherheit von $0,5m$ entwässert ist (siehe Abbildung 2.3). (Lösung s. S. 276)

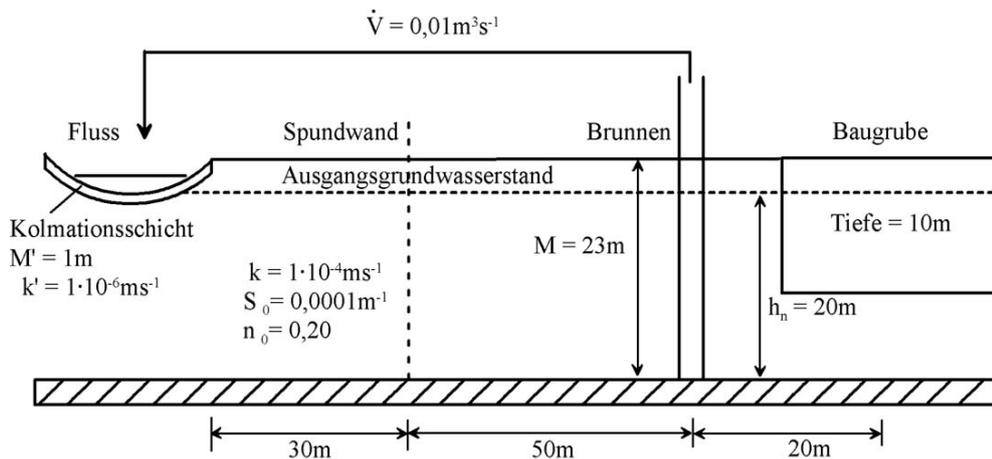


Abbildung 2.3: Grundwasserleiter mit Brunnen und Baugrube, Spundwand und Fluss

5. Bei einem Pumpversuch in einem unendlich ausgedehnten Grundwasserleiter wurden folgende Wasserstände in Abhängigkeit von der Entfernung zum Brunnen nach einer Pumpzeit von $120min$ gemessen (siehe Abbildung 2.4).

Berechnen Sie das Wasserdefizit (Volumen) des Absenkungstrichters, wenn der Grundwasserleiter folgende Kennwerte besitzt: (Lösung s. S. 279)

$$h_n = 16m, M = 10m, k = 0,001 \frac{m}{s}, S_0 = 0,0001m^{-1}, n_0 = 0,20.$$

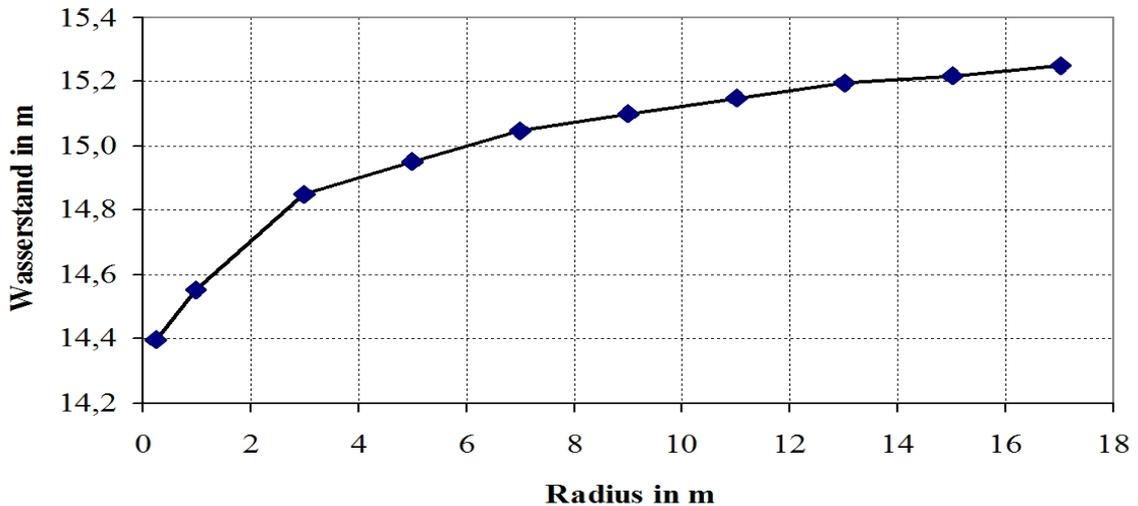


Abbildung 2.4: Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius

6. Aus einem Brunnen ($Br_{(100m,500m)}$), der an einem idealen Fluss ($x = 0; -\infty < y < +\infty$) liegt, wird ein konstanter Volumenstrom von $\dot{V} = 25 \frac{l}{s}$ gefördert. Der Brunnen hat einen Radius von $r_0 = 0,35m$. Der Grundwasserleiter ist durch folgende Parameter gekennzeichnet:

$$h_n = 15m, M = 17m, k = 1 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}, S_0 = 0,0002m^{-1}, n_0 = 0,25.$$

- (a) Berechnen Sie den stationären Endzustand (der Anteil der zeitlichen Funktionalität soll kleiner als 0,001 sein) für den Punkt ($P_{(200m,600m)}$) und
 (b) den Zeitpunkt, ab wann mit ihm zu rechnen ist.
 Hinweis: Arbeiten Sie so lange wie möglich mit allgemeinen Formelzeichen.
 (Lösung s. S. 280)

7. Für ein Uferfiltratswasserwerk (siehe Abbildung 2.5) mit parallelem Strömungsregime ist ein Simulationssystem aufzubauen. Der Fluss soll dabei als idealisierte Randbedingung berücksichtigt werden.

Berechnen Sie für diese hydraulischen Verhältnisse den stationären Endzustand auf der Basis der analytischen Lösung der Brunnengleichung (Lösung s. S. 284).

$$k = 1 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}; h_{Fl} = 15m; z_{R0} = 15m; S = 0,25; \dot{V} = 50 \frac{l}{s}; q = 0,001 \frac{l}{s \cdot m^2}; b = 100m; k_{Kolm} = 5 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s}; M_{Kolm} = 1m;$$

Ermitteln Sie die Lösung

- (a) mit idealisiertem Fluss und
 (b) unter Berücksichtigung des realen Flusses (Kolmation und Unvollkommenheit).

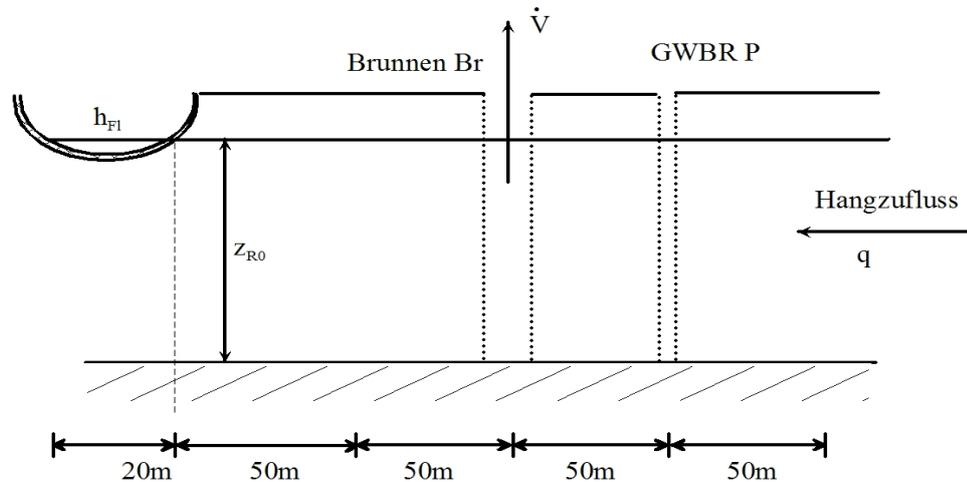


Abbildung 2.5: Grundwasserleiter mit Fluss, Brunnen und Hangzufluss

8. In der Geohydraulik werden Pumpversuche zur Bestimmung der Grundwasserleiterparameter eingesetzt. Unter bestimmten Bedingungen kann die Absenkung nach der Formel von THEISS/JAKOB/COOPER

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi T} \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t}{r^2 \cdot S} \right)$$

ermittelt werden.

Leiten Sie unter Verwendung dieser Formel eine Gleichung zur Bestimmung des k -Wertes für einen Ortspunkt P , der sich in einer Entfernung r vom Brunnen befindet, ab. Die Bestimmung des k -Wertes soll dabei auf der Verwendung der Absenkungswerte s_1 zum Zeitpunkt t_1 und s_2 zum Zeitpunkt t_2 basieren. Das Verhältnis der Messzeiten $t_1 : t_2$ beträgt 1 : 10. (Lösung s. S. 289)

9. Berechnen Sie die Absenkung im GWBR (siehe Abbildung 2.6) für den Zeitpunkt $t = 10h$, wenn im Brunnen $5h$ lang ein Volumenstrom von $0,2 \frac{m^3}{s}$ gefördert wird und anschließend die Pumpen abgeschaltet werden. (Lösung s. S. 291)
 $h_{t=0} = 10m$, $M = 15m$, $k = 0,0001 \frac{m}{s}$, $S_0 = 0,0001 m^{-1}$, $n_0 = 0,25$

10. Berechnen Sie für eine Grundwassergewinnungsanlage auf Uferfiltratbasis die Absenkung am Punkt P nach einem Jahr.

$$\text{Förderrate je Brunnen: } \dot{V} = 25l \cdot s^{-1}$$

$$k = 2 \cdot 10^{-3} m \cdot s^{-1}; h_n = 15m; S = 0,25$$

$$k' = 1 \cdot 10^{-5} m \cdot s^{-1}; M' = 1m; B = 25m; r_1 = 250m; r_2 = 500m; r_P = 375m$$

(Lösung s. S. 294)

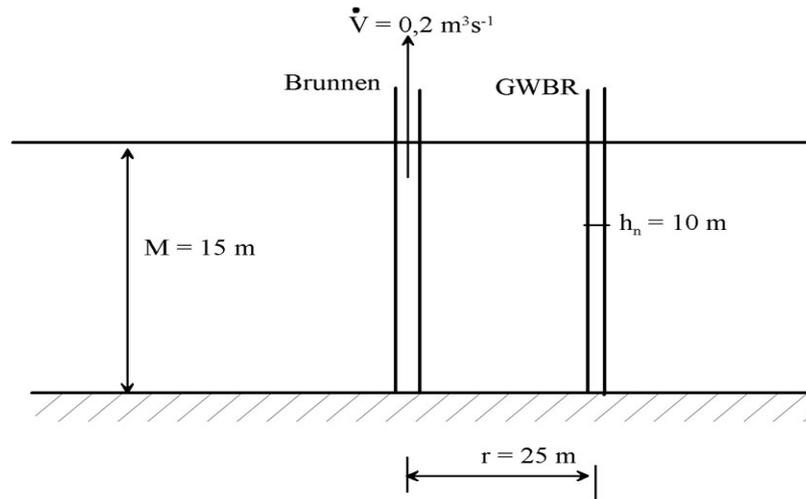


Abbildung 2.6: Unendlich ausgedehnter Grundwasserleiter mit einem Förderbrunnen

11. Aus zwei Brunnen an einem Fluss (ohne Kolmation und vollkommen) wird konstant je $\dot{V} = 25 \text{ l} \cdot \text{s}^{-1}$ gefördert.

Berechnen Sie die Absenkung am Punkt P nach einem Monat und den stationären Endzustand.

Kordinaten:

Brunnen 1: $x = 750 \text{ m}$ $y = 100 \text{ m}$

Brunnen 2: $x = 700 \text{ m}$ $y = 400 \text{ m}$

Punkt P: $x = 1000 \text{ m}$ $y = 500 \text{ m}$

$h_n = 15 \text{ m}$, $n_0 = 0,25$, $k = 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

(Lösung s. S. 297)

12. Berechnen Sie mittels der THEISSchen Brunnengleichung die Grundwasserstandsänderung nach 10 Tagen für folgende schematische Grundwasseranreicherungsanlage (siehe Abbildung 2.7).

Gegeben: $\dot{V} = 0,001 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $S_0 = 0,001 \text{ m}^{-1}$, $n_0 = 0,25$, $k = 0,001 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

(Lösung s. S. 300)

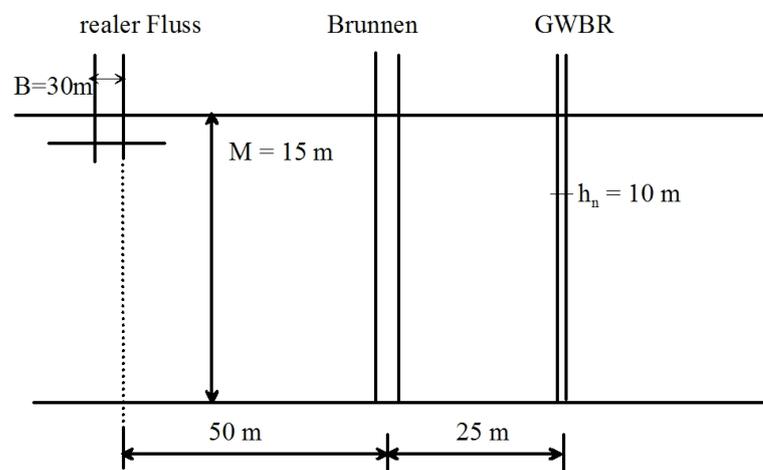


Abbildung 2.7: Realer Fluss mit Entnahmebrunnen (Grundwasseranreicherungsanlage)

13. Berechnen Sie mittels der THEISSchen Brunnengleichung die Grundwasserstandsänderung nach 10 Tagen für folgende schematische Grundwasseranreicherungsanlage (siehe Abbildung 2.8).

Gegeben: $\dot{V} = 0,001\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$, $S_0 = 0,001\text{m}^{-1}$, $n_0 = 0,25$, $k = 0,001\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
 (Lösung s. S. 302)

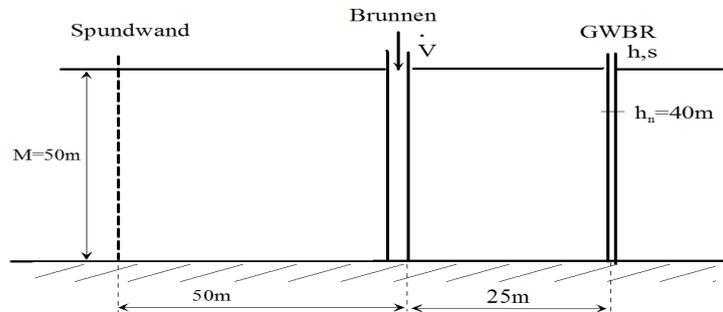


Abbildung 2.8: Grundwasseranreicherungsanlage mit Brunnen und Spundwand

14. Berechnen Sie die Absenkung am Pegel für den Zeitpunkt $t = 15h$, wenn im Brunnen $10h$ lang ein Volumenstrom von $\dot{V} = 0,1\text{m}^3\text{s}^{-1}$ gefördert wird und anschließend die Pumpe abgeschaltet wird (siehe Abbildung 2.9).

(Lösung s. S. 304)

Gegeben: $h_{t=0} = 40\text{m}$, $M = 50\text{m}$, $k = 0,0001\text{ms}^{-1}$, $S_0 = 0,0001\text{m}^{-1}$, $n_0 = 0,25$

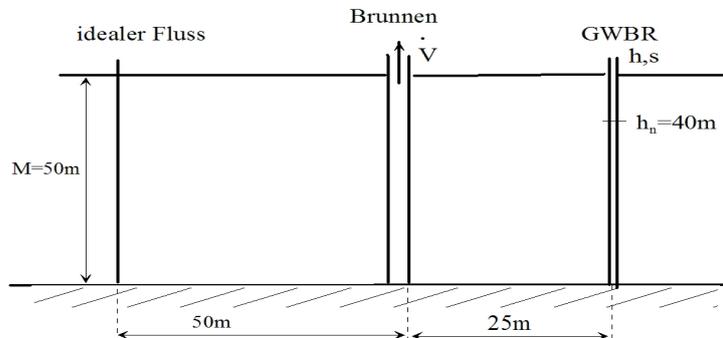


Abbildung 2.9: Uferfiltratanlage mit Brunnen und Fluss

Tabelle 2.1 , S. 256 enthält die Werte der Brunnenfunktion $W(\sigma)$ für den σ -Bereich von $1 \cdot 10^{-12} \leq \sigma \leq 9$

Tabelle 2.1: Brunnenfunktion $W(\sigma)$ für den Bereich $1 \cdot 10^{-12} \leq \sigma \leq 9$

σ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Exponent									
$1 \cdot 10^{+00}$	0, 2194	0, 0496	0, 0143	0, 00378	0, 00115	$3, 60 \cdot 10^{-4}$	$1, 16 \cdot 10^{-4}$	$3, 77 \cdot 10^{-5}$	$1, 24 \cdot 10^{-5}$
$1 \cdot 10^{-01}$	1, 8229	1, 2227	0, 9057	0, 7024	0, 5598	0, 4544	0, 3738	0, 3106	0, 2602
$1 \cdot 10^{-02}$	4, 0379	3, 3547	2, 9591	2, 6813	2, 4679	2, 2953	2, 1508	2, 0269	1, 9187
$1 \cdot 10^{-03}$	6, 3315	5, 6394	5, 2349	4, 9482	4, 7261	4, 5448	4, 3916	4, 2591	4, 1423
$1 \cdot 10^{-04}$	8, 6332	7, 9402	7, 5348	7, 2472	7, 0242	6, 8420	6, 6879	6, 5545	6, 4368
$1 \cdot 10^{-05}$	10, 9357	10, 2426	9, 8371	9, 5495	9, 3263	9, 1440	8, 9899	8, 8563	8, 7386
$1 \cdot 10^{-06}$	13, 2383	12, 5451	12, 1397	11, 8520	11, 6289	11, 4465	11, 2924	11, 1589	11, 0411
$1 \cdot 10^{-07}$	15, 5409	14, 8477	14, 4423	14, 1546	13, 9314	13, 7491	13, 5950	13, 4614	13, 3437
$1 \cdot 10^{-08}$	17, 8435	17, 1503	16, 7449	16, 4572	16, 2340	16, 0517	15, 8976	15, 7640	15, 6462
$1 \cdot 10^{-09}$	20, 1460	19, 4529	19, 0474	18, 7598	18, 5366	18, 3543	18, 2001	18, 0666	17, 9488
$1 \cdot 10^{-10}$	22, 4486	21, 7555	21, 3500	21, 0623	20, 8392	20, 6569	20, 5027	20, 3692	20, 2514
$1 \cdot 10^{-11}$	24, 7512	24, 0581	23, 6526	23, 3649	23, 1418	22, 9595	22, 8053	22, 6718	22, 5540
$1 \cdot 10^{-12}$	27, 0538	26, 3607	25, 9552	25, 6675	25, 4444	25, 2620	25, 1079	24, 9744	24, 8566

2.2 Lösungen

- zu Aufgabe 1 (s. S. 248)

Wie aus der Skizze zur Aufgabenstellung zu ersehen ist, handelt es sich um einen gespannten Grundwasserleiter (siehe Abbildung 2.10) ($h_n > M$)

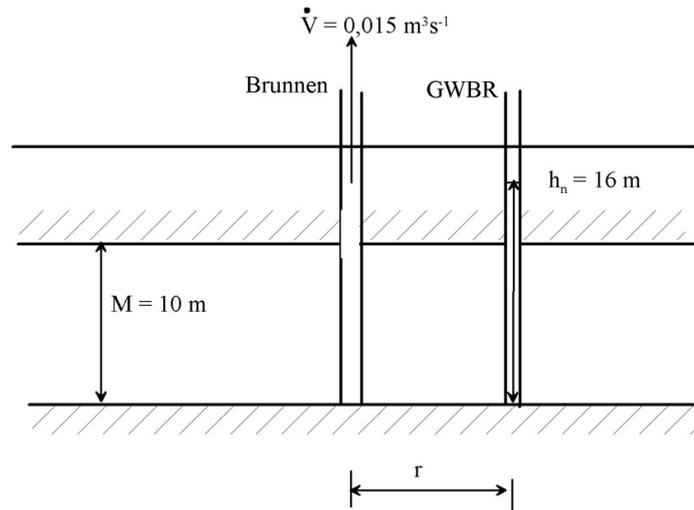


Abbildung 2.10: Gespannter Grundwasserleiter mit Entnahmehrunnen und Grundwasserbeobachtungsrohr

Damit können die gegebenen Werte direkt in die THEIS-Formel eingesetzt werden:

$$s_{gesp} = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi T} W(\sigma)$$

mit

$$T = k \cdot M$$

$$\sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

und

$$C = e^\gamma$$

$$C \approx 1,7810724$$

$$W(\sigma)_{\text{THEISS}} = -\gamma - \ln(\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\sigma^4}{4 \cdot 4!} + \frac{\sigma^5}{5 \cdot 5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{\sigma^n}{n \cdot n!}$$

$$W(\sigma)_{\text{THEISS}} = -\ln(C\sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sigma^n}{n \cdot n!}$$

Die Potenzreihe konvergiert für Werte mit $\sigma < 0,03$ bereits so gut, dass die Glieder mit höheren Potenzen von σ vernachlässigbar kleine Werte liefern. Nach JACOB&COOPER kann $W(\sigma)$ in diesem Fall nur mit der Logarithmus-Funktion berechnet werden, wobei ein Fehler von $< 1\%$ entsteht.

$$W(\sigma)_{\text{JACOB}} = -\ln(C\sigma)$$

$$W(\sigma)_{\text{JACOB}} = \ln\left(\frac{2,246 \cdot T \cdot t}{S \cdot r^2}\right)$$

Für die Wertepaare Abstand $r_2 = 10m$ und Zeit $t [\text{min}] = 1, 2, 5, 10, 20, 30, 45, 60, 120$ erhält man folgende Ergebnisse (siehe Abbildung 2.11):

Zeit [min]	$\sigma(r_2) = 10m$	$W(\sigma)_{\text{THEIS}}$	$W(\sigma)_{\text{JACOB}}$	$s_{10m\text{THEIS}}$	$s_{10m\text{JACOB}}$
1	0,0417	2,6421	2,6009	0,315	0,311
2	0,0208	3,3148	3,2940	0,396	0,393
5	0,0083	4,2186	4,2103	0,504	0,503
10	0,0042	4,9076	4,9035	0,586	0,585
20	0,0021	5,5987	5,5966	0,668	0,668
30	0,0014	6,0035	6,0021	0,717	0,716
45	0,0009	6,4085	6,4075	0,765	0,765
60	0,0007	6,6959	6,6952	0,799	0,799
90	0,0005	7,1012	7,1007	0,848	0,848
120	0,0003	7,3887	7,3884	0,882	0,882

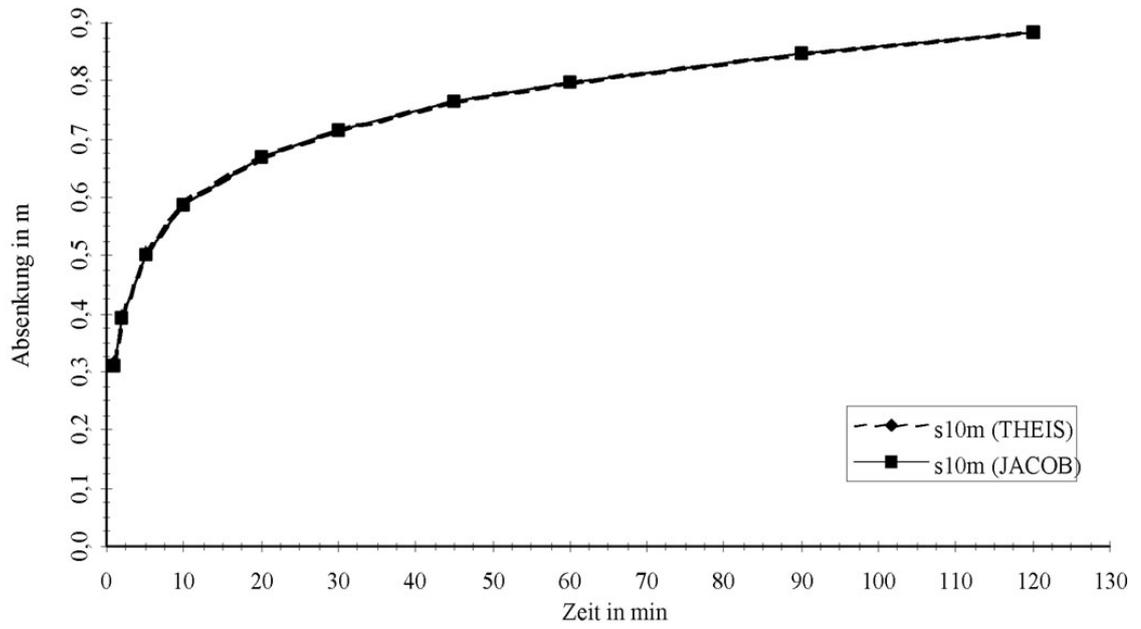


Abbildung 2.11: Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit für $r = 10m$

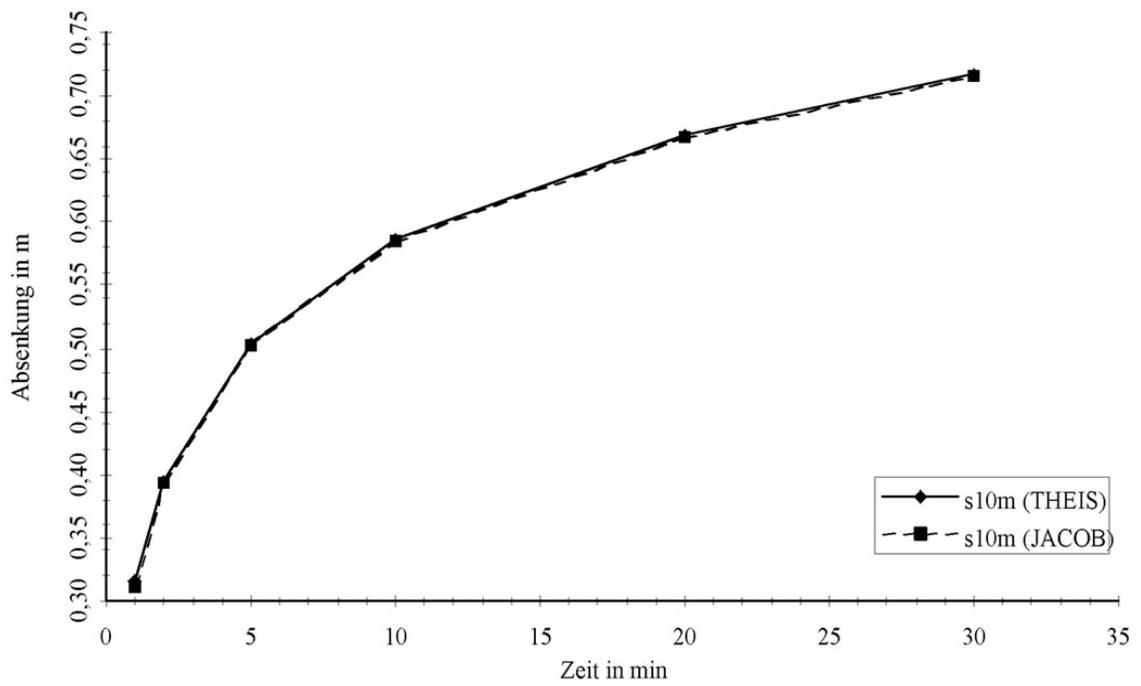


Abbildung 2.12: Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit innerhalb der ersten 30min und für $r = 10m$

Die Ergebnisse der Näherung nach JACOB weichen nach ca. 30min nicht mehr von der direkten THEIS-Lösung ab. Man erkennt, dass die Absenkung nach THEIS stärker ist, als die nach JACOB. Es ist unangebracht, die Absenkungen mit mehr als drei Kommastellen, d.h. besser als Millimeterbereich, auszurechnen.

Zeit [min]	1	2	5	10	20	30	45	60	90	120
5m $\Rightarrow \sigma_{r_1}$	0,0104	0,0052	0,0021	0,0010	0,0005	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
$W(\sigma)_{\text{THEISS}}$	3,9976	4,6855	5,5987	6,2908	6,9834	7,3887	7,7941	8,0817	8,4871	8,7748
$W(\sigma)_{\text{JACOB}}$	3,9872	4,6803	5,5966	6,2898	6,9829	7,3884	7,7938	8,0814	8,4870	8,7747
$S_{5m\text{THEISS}}$	0,477	0,559	0,668	0,751	0,834	0,882	0,930	0,965	1,013	1,047
$S_{5m\text{JACOB}}$	0,476	0,559	0,668	0,751	0,834	0,882	0,930	0,965	1,013	1,047
10m $\Rightarrow \sigma_{r_2}$	0,0417	0,0208	0,0083	0,0042	0,0021	0,0014	0,0009	0,0007	0,0005	0,0003
$W(\sigma)_{\text{THEISS}}$	2,6421	3,3148	4,2186	4,9076	5,5987	6,0035	6,4085	6,6959	7,1012	7,3887
$W(\sigma)_{\text{JACOB}}$	2,6009	3,2940	4,2103	4,9035	5,5966	6,0021	6,4075	6,6952	7,1007	7,3884
$S_{10m\text{THEISS}}$	0,315	0,396	0,504	0,586	0,668	0,717	0,765	0,799	0,848	0,882
$S_{10m\text{JACOB}}$	0,311	0,393	0,503	0,585	0,668	0,716	0,765	0,799	0,848	0,882
20m $\Rightarrow \sigma_{r_3}$	0,1667	0,0833	0,0333	0,0167	0,0083	0,0056	0,0037	0,0028	0,0019	0,0014
$W(\sigma)_{\text{THEISS}}$	1,3746	1,9894	2,8571	3,5338	4,2186	4,6213	5,0249	5,3117	5,7162	6,0035
$W(\sigma)_{\text{JACOB}}$	1,2146	1,9077	2,8240	3,5172	4,2103	4,6158	5,0212	5,3089	5,7144	6,0021
$S_{20m\text{THEISS}}$	0,164	0,238	0,341	0,421	0,504	0,552	0,600	0,634	0,682	0,717
$S_{20m\text{JACOB}}$	0,145	0,228	0,337	0,420	0,503	0,551	0,599	0,634	0,682	0,716
50m $\Rightarrow \sigma_{r_4}$	1,0417	0,5208	0,2083	0,1042	0,0521	0,0347	0,0231	0,0174	0,0116	0,0087
$W(\sigma)_{\text{THEISS}}$	0,2047	0,5353	1,1894	1,7861	2,4291	2,8176	3,2117	3,4936	3,8934	4,1782
$W(\sigma)_{\text{JACOB}}$	-0,6180	0,0752	0,9914	1,6846	2,3777	2,7832	3,1887	3,4763	3,8818	4,1695
$S_{50m\text{THEISS}}$	0,024	0,064	0,142	0,213	0,290	0,336	0,383	0,417	0,465	0,499
$S_{50m\text{JACOB}}$	-0,074	0,009	0,118	0,201	0,284	0,332	0,381	0,415	0,463	0,498

Tabelle: Berechnung der Absenkung als Funktion der Zeit und für verschiedene Radien

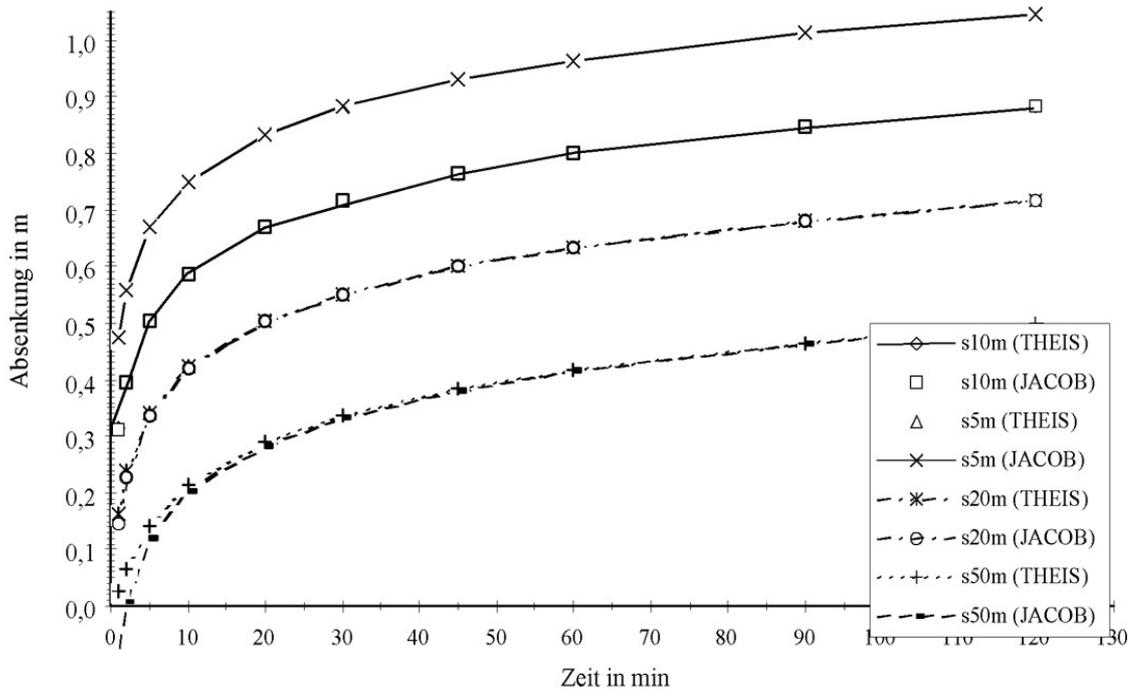


Abbildung 2.13: Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit und für verschiedene Radien

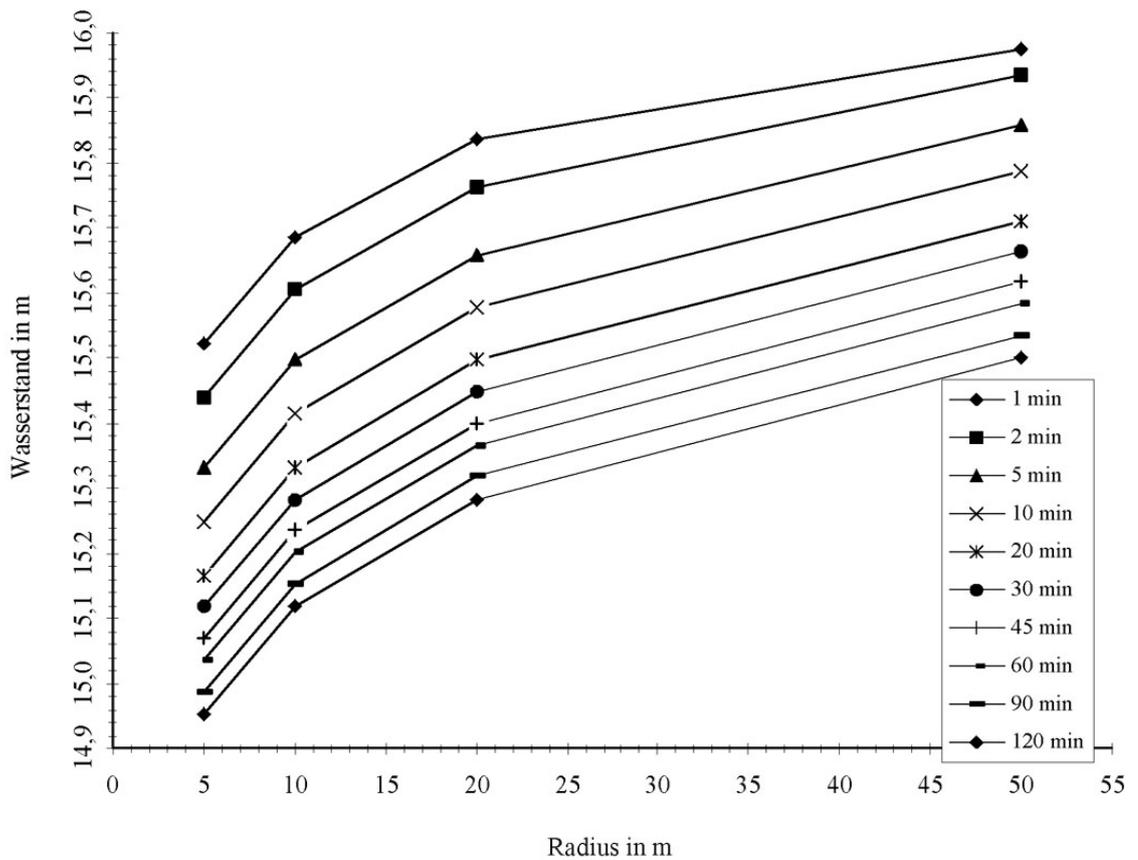


Abbildung 2.14: Absenkung in Abhängigkeit vom Radius und für unterschiedliche Zeiten

• zu Aufgabe 2 (s. S. 248)

Die Absenkung entsprechend Aufgabe 2 wird auf der Basis der Superposition berechnet. Dazu wird die Förderganglinie in einzelne Förderleistungen aufgeteilt, die entsprechend der Voraussetzung zur THEISSchen Lösung bis zur Zeit ∞ fördern. Die Teilförderleistungen beginnen zeitlich jeweils mit den Stufen des Gesamtvolumenstromes. Ab der Zeit $60min$ würde so ein Volumenstrom $\frac{dV}{dt} = \sum \frac{dV_n}{dt}$ entstehen. Dieser muss durch eine gleichgroße

Infiltration kompensiert werden, damit die Aufgabenstellung $\frac{dV}{dt} = 0$ für $t > 60min$ erfüllt wird.

Die Förderganglinie entsprechend der Aufgabenstellung hat den im Bild dargestellten Verlauf.

Die Berechnung des Absenkungspotentials von veränderlichen Förderganglinien erfolgt nach der folgenden Formel:

$$Z_{Ges.r,t} = \frac{1}{4\pi k} \sum_{i=1}^m \left(\dot{V}_{real,i,t} - \dot{V}_{real,i,t-\tau_i} \right) W_i \left(\frac{r^2 a}{4(t - \tau_i)} \right)$$

Bei dieser Stufenfunktion muss beachtet werden, dass die fiktive Brunnenlaufzeit gegenüber der Realzeit um die Zeit verschoben ist, zu der der entsprechende Sprung einsetzt.

Da es sich hier um einen gespannten Grundwasserleiter handelt, kann die Superposition auch direkt auf die Absenkungswerte angewendet werden:

$$s_{Ges.r,t} = \frac{1}{4\pi T} \sum_{i=1}^m \left(\dot{V}_{real,i,t} - \dot{V}_{real,i,t-\tau_i} \right) W_i \left(\frac{r^2 a}{4(t - \tau_i)} \right)$$

Mit

$$\sigma = \frac{r^2 S}{4T(t - \tau_i)}$$

$$W_\sigma = -\ln(1,781\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\sigma^4}{4 \cdot 4!} + \frac{\sigma^5}{5 \cdot 5!} - \dots$$

können σ und W_σ berechnet werden. Dabei ist zu beachten, dass die THEIS-Funktion nur für positive Zeiten definiert ist. Für $t \leq 0$ erhält W_σ den Wert Null. Nach der Ermittlung der W_σ -Werte kann die Superposition der Absenkungsanteile erfolgen. Für den Fall der Infiltration (Wiederanstiegsphase bei $t > 60min$) wird eine negative Förderrate des Brunnens angesetzt. Diese führt zu negativen Absenkungen, d.h. zu einer fiktiven Erhöhung des Grundwasserspiegels während dieser Zeit.

Zeit [min]	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
σ_1	0,0042	0,0021	0,0014	0,0010	0,0008	0,0007	0,0006	0,0005	0,0005	0,0004
σ_2		0,0042	0,0021	0,0014	0,0010	0,0008	0,0007	0,0006	0,0005	0,0005
σ_3			0,0042	0,0021	0,0014	0,0010	0,0008	0,0007	0,0006	0,0005
σ_4				0,0042	0,0021	0,0014	0,0010	0,0008	0,0007	0,0006
σ_5					0,0042	0,0021	0,0014	0,0010	0,0008	0,0007
σ_6						0,0042	0,0021	0,0014	0,0010	0,0008
σ_7							0,0042	0,0021	0,0014	0,0010
$\mathbf{W}(\sigma_1)$	4,9076	5,5987	6,0035	6,2908	6,5137	6,6959	6,8500	6,9834	7,1012	7,2065
$\mathbf{W}(\sigma_2)$		4,9076	5,5987	6,0035	6,2908	6,5137	6,6959	6,8500	6,9834	7,1012
$\mathbf{W}(\sigma_3)$			4,9076	5,5987	6,0035	6,2908	6,5137	6,6959	6,8500	6,9834
$\mathbf{W}(\sigma_4)$				4,9076	5,5987	6,0035	6,2908	6,5137	6,6959	6,8500
$\mathbf{W}(\sigma_5)$					4,9076	5,5987	6,0035	6,2908	6,5137	6,6959
$\mathbf{W}(\sigma_6)$						4,9076	5,5987	6,0035	6,2908	6,5137
$\mathbf{W}(\sigma_7)$							4,9076	5,5987	6,0035	6,2908
s_1	0,1953	0,2228	0,2389	0,2503	0,2592	0,2664	0,2726	0,2779	0,2825	0,2867
s_2		0,1953	0,2228	0,2389	0,2503	0,2592	0,2664	0,2726	0,2779	0,2825
s_3			0,1953	0,2228	0,2389	0,2503	0,2592	0,2664	0,2726	0,2779
s_4				0,1953	0,2228	0,2389	0,2503	0,2592	0,2664	0,2726
s_5					0,1953	0,2228	0,2389	0,2503	0,2592	0,2664
s_6						0,1953	0,2228	0,2389	0,2503	0,2592
s_7							-1,1716	-1,3366	-1,4332	-1,5018
s_{ges}	0,195	0,418	0,657	0,907	1,166	1,433	0,339	0,229	0,17165	0,144

Tabelle: Absenkung s in Abhängigkeit von der Zeit bei stufenförmiger Förderung und Radius $r = 10m$

Zeit [min]	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
σ_1	0,0010	0,0005	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
σ_2		0,0010	0,0005	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001
σ_3			0,0010	0,0005	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
σ_4				0,0010	0,0005	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001
σ_5					0,0010	0,0005	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002
σ_6						0,0010	0,0005	0,0003	0,0003	0,0002
σ_7							0,0010	0,0005	0,0003	0,0003
$W(\sigma_1)$	6,2908	6,9834	7,3887	7,6763	7,8994	8,0817	8,2358	8,3693	8,4871	8,5924
$W(\sigma_2)$		6,2908	6,9834	7,3887	7,6763	7,8994	8,0817	8,2358	8,3693	8,4871
$W(\sigma_3)$			6,2908	6,9834	7,3887	7,6763	7,8994	8,0817	8,2358	8,3693
$W(\sigma_4)$				6,2908	6,9834	7,3887	7,6763	7,8994	8,0817	8,2358
$W(\sigma_5)$					6,2908	6,9834	7,3887	7,6763	7,8994	8,0817
$W(\sigma_6)$						6,2908	6,9834	7,3887	7,6763	7,8994
$W(\sigma_7)$							6,2908	6,9834	7,3887	7,6763
s_1	0,2503	0,2779	0,2940	0,3054	0,3143	0,3216	0,3277	0,3330	0,3377	0,3419
s_2		0,2503	0,2779	0,2940	0,3054	0,3143	0,3216	0,3277	0,3330	0,3377
s_3			0,2503	0,2779	0,2940	0,3054	0,3143	0,3216	0,3277	0,3330
s_4				0,2503	0,2779	0,2940	0,3054	0,3143	0,3216	0,3277
s_5					0,2503	0,2779	0,2940	0,3054	0,3143	0,3216
s_6						0,2503	0,2779	0,2940	0,3054	0,3143
s_7							-1,5018	-1,6672	-1,7639	-1,8326
s_{ges}	0,250	0,528	0,822	1,128	1,442	1,764	0,340	0,229	0,17867	0,144

Tabelle: Absenkung s in Abhängigkeit von der Zeit bei stufenförmiger Förderung und Radius
 $r = 5m$

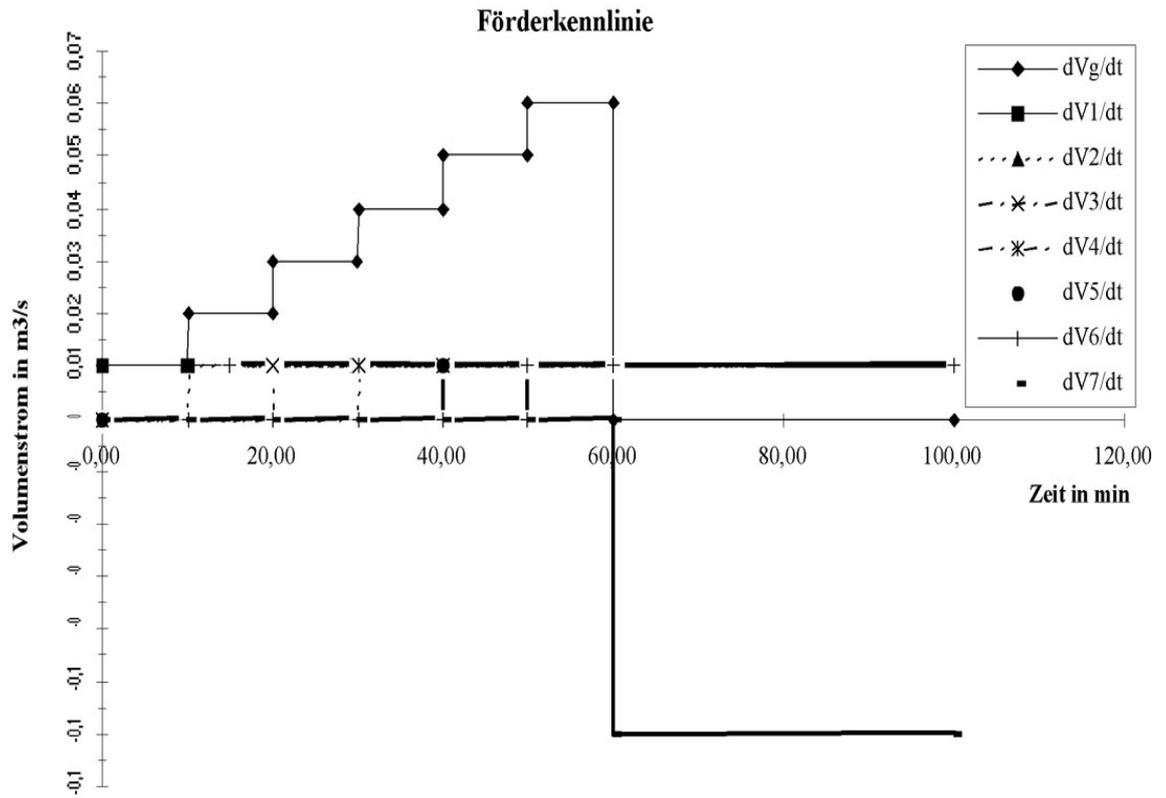


Abbildung 2.15: Förderganlinie und deren Aufteilung in einzelne Förderleistungen

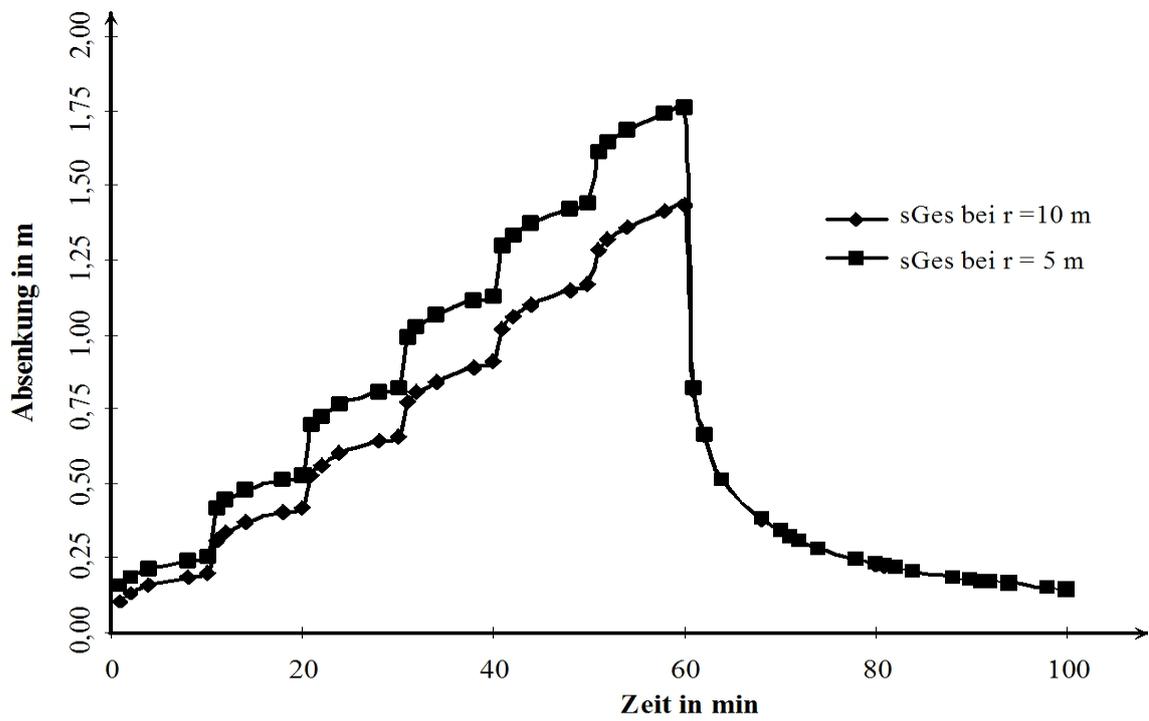


Abbildung 2.16: Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit bei stufenförmiger Förderung

- zu Aufgabe 3 (s. S. 248)

Entsprechend der Aufgabenstellung handelt es sich um ungespannte Grundwasserströmungsverhältnisse. Die Einteilung in gespannte und ungespannte Grundwasserleiter richtet sich danach, in welchem Verhältnis der Grundwasserstand $z_{Rt=0}$ bzw. die Piezometerhöhe $h_{t=0}$ im Verhältnis zur Mächtigkeit des Grundwasserleiters steht. Die unterschiedlichen Speicherkoeffizienten sind die Folge davon. Im Zusammenhang mit der analytischen Lösung der Brunnengleichung gelten folgende Beziehungen:

Verhältnis zwischen Grundwasserstand und Mächtigkeit des GWL	$z_{Rt=0} \leq M$	$h_{t=0} > M$
Strömungsverhältnisse	ungespannt	gespannt
Durchströmte Mächtigkeit	$D = z_{Rt=0}$	$D = M$
Transmissibilität	$T = k \cdot z_{Rt=0}$	$T = k \cdot M$
Speicherkoeffizient	$S = n_0 + S_0 \cdot z_{Rt=0}$	$S = S_0 \cdot h_{t=0}$

Der Grundwasserleiter wird auf der einen Seite von einem unvollkommenen Fluss mit kolmatierter Sohle begrenzt. Auf der anderen Seite liegen drei Brunnen symmetrisch zur Baugrube, zwischen dieser und dem Fluss (siehe Abbildung 2.17).

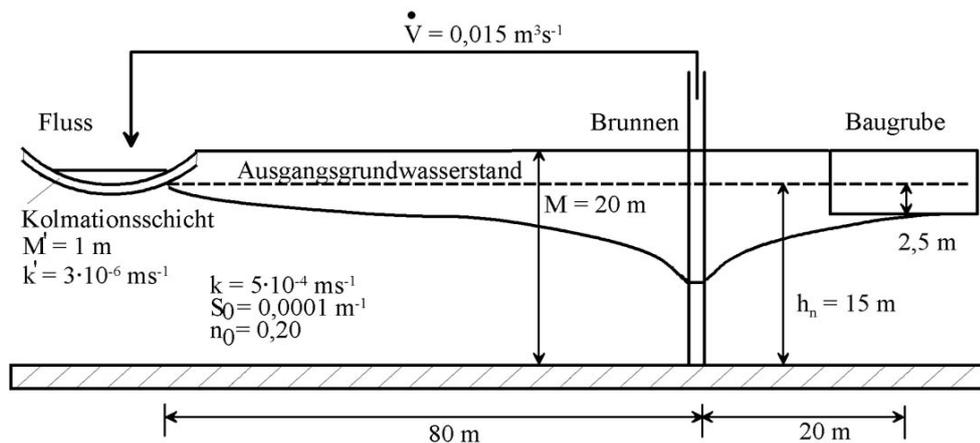


Abbildung 2.17: Grundwasserleiter mit unvollkommenem Fluss und Brunnen

Da der unvollkommene Fluss mit kolmatierter Sohle als Randbedingung 3. Art wirkt, muss auf der Basis von Zusatzlängen eine virtuelle Verschiebung des Flusses erfolgen. Damit können die Wirkungen der Kolmationsschicht und die der unvollkommenen Brandung ausgeglichen werden. Danach kann durch die Einführung von virtuellen Brunnen mit der Methode

der Spieglung die Wirkung der Randbedingung 1. Art kompensiert werden (siehe Abbildung 2.18).

Die Absenkungspotentiale der sechs Brunnen (drei reale und drei virtuelle (gespiegelte)) werden dann mit der Methode der Superposition überlagert. Da hier ungespannte Grundwasserhältnisse vorliegen, dürfen nicht die Absenkungen, sondern müssen deren Potentiale aufsummiert werden.

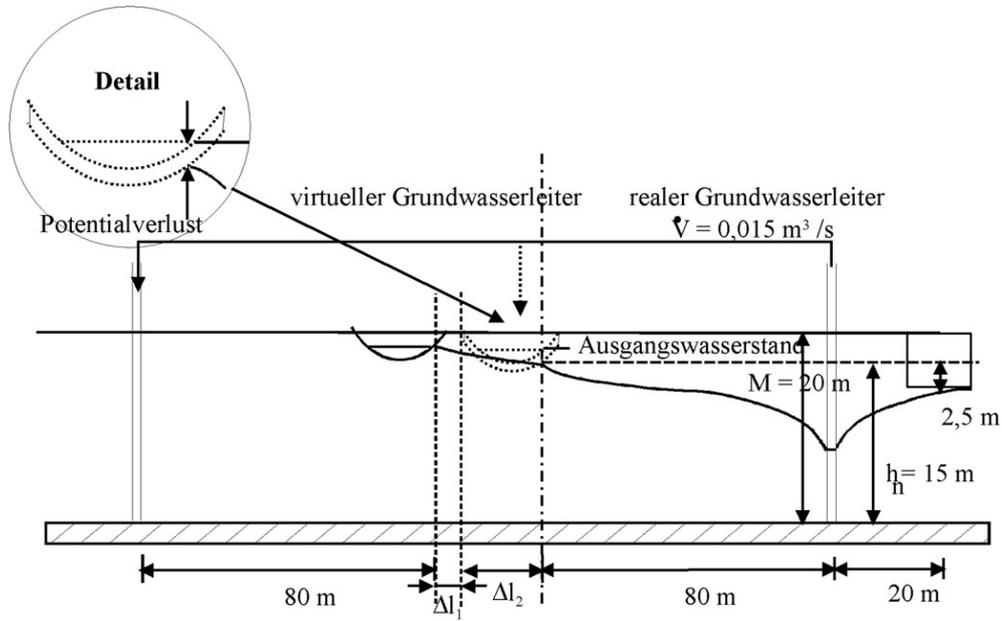


Abbildung 2.18: Detailansicht der Zusatzlängen und virtuellen Brunnen

Berechnung der Zusatzlängen

- Unvollkommenheit

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= f\left(\frac{B}{D}\right) \\ &= f\left(\frac{20}{15}\right) = f(1,333) \end{aligned}$$

aus Diagramm (siehe GRÄBER, LB Systemanalyse, Abschnitt THEISSche Brunnengleichung)

$$\frac{\Delta l_1}{D} = 0,43$$

mit $D = z_R = 15 \text{ m}$ ergibt sich

$$\Delta l_1 = 6,45 \text{ m}$$

$$r_1^2 = (20m)^2 + (25m)^2 = 1025m^2$$

$$r_2^2 = (20m)^2 = 400m^2$$

$$r_3^2 = (20m)^2 + (25m)^2 = 1025m^2$$

$$\rho_1^2 = (2 \cdot (80m + 50m + 6,45m) + 20m)^2 + (25m)^2 = 86415,41m^2$$

$$\rho_3^2 = (2 \cdot (80m + 50m + 6,45m) + 20m)^2 = 85790,41m^2$$

$$\rho_2^2 = (2 \cdot (80m + 50m + 6,45m) + 20m)^2 + (25m)^2 = 86415,41m^2$$

- Berechnung nach der THEIS-Formel:
Mit den bekannten Formeln erhält man:

$$\sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

$$W(\sigma) = -\ln(1,781\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\sigma^4}{4 \cdot 4!} + \frac{\sigma^5}{5 \cdot 5!} - \dots$$

$$Z = \frac{\dot{V}}{4\pi k} (W(\sigma_{r_1}) + W(\sigma_{r_2}) + W(\sigma_{r_3}) - W(\sigma_{\rho_1}) - W(\sigma_{\rho_2}) - W(\sigma_{\rho_3}))$$

$$s = z_{Rt=0} - \sqrt{(z_{Rt=0}^2 - 2Z)}$$

In obiger Formel kennzeichnen die positiven $W(\sigma)$ die real existierenden Förderbrunnen, die negativen dagegen die virtuellen Infiltrationsbrunnen, die durch die Spiegelung entstanden sind. Da in diesem Beispiel ungespannte Grundwasserverhältnisse vorliegen, muss die Superposition in der Potentialebene Z erfolgen. Erst dann kann auf Grund der nichtlinearen Beziehung die Rücktransformation in die Originalebene der Absenkung erfolgen.

Entfernung	σ	$W(\sigma)$	Z	s
Brunnen 1	0,0079	4,2705		
Brunnen 2	0,0031	5,2067		
Brunnen 3	0,0079	4,2705		
virt. Brunnen 1	0,6668	-0,3982		
virt. Brunnen 2	0,6620	-0,4019		
virt. Brunnen 3	0,6668	-0,3982		
	Summe:	12,5494	29,9595	2,15

Nach 10 Tagen ist die Sollabsenkung von 2,50m noch nicht erreicht. Es wurde nur eine Absenkung von 2,15m erzielt.

In diesem Beispiel konnte die Näherung nach JACOB&COOPER nicht angewendet werden, da die Bedingung $\sigma \ll 1$ nicht erfüllt ist. An den Zahlenwerten für $\sigma(s)$ sieht man auch, dass die virtuellen Brunnen unter den gegebenen Bedingungen nur einen kleinen Einfluss ($< 10\%$) auf die Gesamtabenkung haben. Dies liegt vor allem auch an der großen Entfernung der realen Brunnen und der Baugrube vom Fluss. Man beachte immer, dass σ quadratisch mit der Entfernung zunimmt, dafür aber $W(\sigma)$ abnimmt und damit auch die Beeinflussung.

• zu Aufgabe 4 (s. S. 248)

Auf Grund der Spundwand reduziert sich das Modell auf einen Grundwasserleiter, der einseitig durch eine Barriere begrenzt ist (siehe Abbildung 2.20). Barrieren werden mittels der Methode der Spiegelung, wobei hier der Förderbrunnen in einen Förderbrunnen gespiegelt wird, berücksichtigt. Das Berechnungsmodell ergibt sich damit zu:

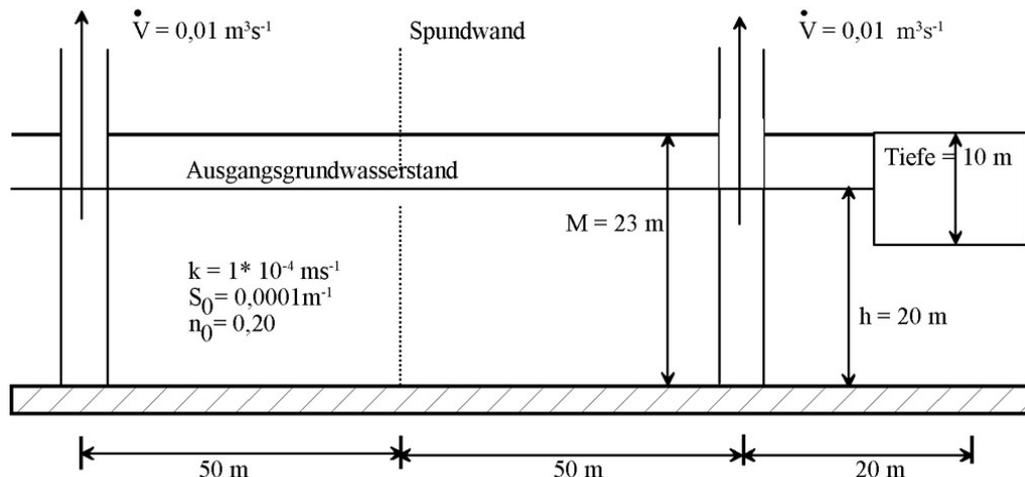


Abbildung 2.20: Lage der virtuellen Brunnen bei der Begrenzung durch eine Barriere

- **Randbedingung:** Barriere \Rightarrow Spiegelung in einen zweiten Förderbrunnen
- **Grundwasserleitertyp:** ungespannt, \Rightarrow es ist nur eine Überlagerung der Potentiale Z möglich ist.

Nach der Überlagerung ist dann die Absenkung berechenbar.

- **Grundwasserleiterparameter:**

$$S = n_0; \quad T = k \cdot h_n$$

Berechnung des Potentials Z_1 des realen Brunns

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \\ &= \frac{20^2 m^2 \cdot 0,20}{4 \cdot 20m \cdot 0,0001 \frac{m}{s} \cdot 7 \cdot 86.400s} \\ \sigma_1 &= 0,0165 \end{aligned}$$

Da hier $\sigma < 0,03$ gilt, kann die Näherung nach JACOB&COOPER verwendet werden:

$$W(\sigma_1) \approx -\ln(C\sigma)$$

$$W(\sigma_1) \approx 3,6$$

$$Z_1 = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} W(\sigma_1) = \frac{0,01s \cdot m^{-3} \cdot 3,6}{4 \cdot \pi \cdot 0,0001m \cdot s^{-1}}$$

$$Z_1 = 28,66m^2$$

Berechnung des Potentials Z_2 des virtuellen Brunnens

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \\ &= \frac{120^2 m^2 \cdot 0,20}{4 \cdot 20m \cdot 0,0001m \cdot s^{-1} \cdot 7 \cdot 86400s} \end{aligned}$$

$$\sigma_2 = 0,595$$

Hier ist $\sigma > 0,03$ und man muss mit der THEIS-Formel rechnen:

$$W(\sigma_2) = -\ln(1,781\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \dots$$

$$W(\sigma_2) \approx 0,454$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} W(\sigma_2) \\ &= \frac{0,01s \cdot m^{-3} \cdot 0,454}{4 \cdot \pi \cdot 0,0001m \cdot s^{-1}} \end{aligned}$$

$$Z_2 = 3,58m^2$$

Überlagerung

Die Superposition muss in der Potentialebene durchgeführt werden:

$$Z = Z_1 + Z_2$$

$$Z = 32,24m^2$$

Rücktransformation

Da hier ungespannte Verhältnisse vorliegen, muss die nichtlineare Rücktransformation aus der Potentialebene in die Originalebene (Wasserstand, bzw. Absenkung) benutzt werden:

$$s = z_{Rt=0} - \sqrt{z_{Rt=0}^2 - 2 \cdot Z}$$

$$s = 20m - \sqrt{400m^2 - 64,48m^2} = 20m - 18,31m$$

$$s = \underline{1,68m}$$

Damit ist die vorgesehene Absenkung von 10,5m nicht erreicht!

- zu Aufgabe 5 (s. S. 248)

Da gespannte Grundwasserverhältnisse ($h_n > M$) vorliegen, gilt die THEISSche Brunnenformel und die Absenkung s ergibt sich zu:

$$s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} W_{(\sigma)}$$

Die abgepumpte Wassermenge ist gleich dem zeitlichen Integral des Volumenstroms:

$$V = \int_{t=0}^{t_{\max}} \dot{V} dt \approx \dot{V} t_{\max} = \frac{s \cdot 4 \cdot \pi \cdot T \cdot t_{\max}}{W_{(\sigma)}}$$

Aus den in der Aufgabenstellung angebotenen Kurvenwerten (siehe Abbildung 2.4 auf S. 250) wird als Beispiel der Punkt $r = 10m$ und der Zeitpunkt $t_{\max} = 120min$ mit der Absenkung von $s = 0,90m$ gewählt. Für S und T wurde auf Grund der gespannten Grundwasserverhältnisse

$$S = S_0 \cdot M; \quad T = k \cdot M$$

gewählt. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t_{\max}} \\ &= \frac{100m^2 \cdot 0,0001m^{-1} \cdot 10m}{4 \cdot 0,001m \cdot s^{-1} \cdot 10m \cdot 120 \cdot 60s} \\ \sigma &= 0,00035 \end{aligned}$$

Aus Tabelle $W(\sigma)$ (siehe Tabelle 2.1, Seite 256) kann abgelesen werden:

$$W_{(\sigma)} = 7,38$$

Daraus ergibt sich ein Volumenstrom von:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{s \cdot 4 \cdot \pi \cdot k}{W_{(\sigma)}} = \frac{0,90m \cdot 4 \cdot \pi \cdot 0,001m^2 \cdot s^{-1}}{7,38} \\ \dot{V} &= 0,00153 \frac{m^3}{s} \end{aligned}$$

Die Kurvenwerte wurden mit einem Wert von $\dot{V}_{\text{exakt}} = 0,015 \frac{m^3}{s}$ berechnet!

$$V = \dot{V} \cdot t_{\max} = 11,03m^3$$

Das abgepumpte Volumen beträgt damit $110,28m^3$

• zu Aufgabe 6 (s. S. 248)

Hier liegen ungespannte Strömungsverhältnisse ($h_n < M$) in dem Gebiet vor. Der Fluss wird in der THEISSchen Brunnenformel durch eine Spiegelung des Förderbrunnens in einen Infiltrationsbrunnen berücksichtigt. Als Spiegelachse wird das rechte Ufer des Flusses angenommen. Da der Fluss als ideal angesehen wird, muss keine Verschiebung um Zusatzlängen berechnet werden. Da die Superposition nur bei linearen Systemen angewendet werden darf, muss hier die Superposition mit der Potentialdifferenz Z erfolgen und erst danach darf die Rücktransformation durchgeführt werden.

Entsprechend der THEISSchen Brunnenformel gilt:

$$Z_{r,t} = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot W(\sigma); \quad \text{mit} \quad \sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

Durch die Anordnung des Spiegelbrunnens und der Superposition erhält man:

$$Z_{P,t} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(\dot{V} \cdot W(\sigma_r) + (-\dot{V}) \cdot W(\sigma_\rho) \right)$$

wobei gilt:

$$\sigma_r = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

$$\sigma_\rho = \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

der Abstand zwischen Förderbrunnen $\mathbf{Br}_{\text{real}}$ und dem GWBR \mathbf{P} wird mit r bezeichnet und der zwischen Spiegelbrunnen $\mathbf{Br}_{\text{virt}}$ und GWBR \mathbf{P} mit ρ (siehe Abbildung 2.21). Diese Entfernungen können mittels des Satzes von PYTHAGORAS aus den Koordinaten des GWBR \mathbf{P} und denen der Brunnen berechnet werden:

(a)

Beachtet man die Näherung der Funktion $W(\sigma)$ nach COOPER&JACOB durch die Logarithmusfunktion für sehr große Zeiten, so erhält man:

$$W(\sigma) \approx -\ln(C \cdot \sigma)$$

$$C \approx 1,78$$

$$Z_{P,t \rightarrow \infty} = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(-\ln \left(\frac{1,78 \cdot r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right) + \ln \left(\frac{1,78 \cdot \rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right) \right)$$

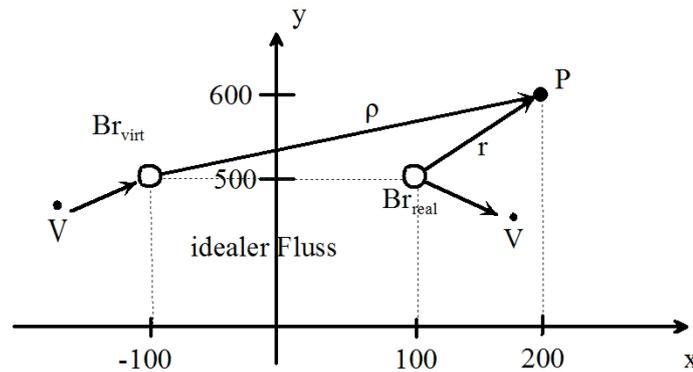


Abbildung 2.21: Lage des virtuellen Brunnens bei einem idealen Fluss als Randbedingung

Nach den Logarithmengesetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 Z_{P,t \rightarrow \infty} &= \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(2 \ln \frac{\rho}{r} \right) = \frac{\dot{V}}{2 \cdot \pi \cdot k} \left(\ln \frac{\rho}{r} \right) \\
 Z_{P,t \rightarrow \infty} &= \frac{0,025 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \cdot \left(\ln \frac{\sqrt{300^2 + 100^2}}{\sqrt{100^2 + 100^2}} \right) \\
 &= \frac{0,025 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \cdot \left(\ln \frac{316,23}{141,42} \right) \\
 &= \frac{0,025 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}}{2 \cdot \pi \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} \cdot 0,805 \\
 Z_{P,t \rightarrow \infty} &= 3,20 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

Aus der Beziehung für ungespannte Grundwasserverhältnisse folgt die Absenkung mit:

$$\begin{aligned}
 s &= z_{Rt=0} - \sqrt{z_{Rt=0}^2 - 2 \cdot Z_{r,t}} \\
 s_{P,t \rightarrow \infty} &= 15 \text{ m} - \sqrt{225 \text{ m}^2 - 2 \cdot 3,20 \text{ m}^2} \\
 s_{P,t \rightarrow \infty} &\approx 0,21 \text{ m}
 \end{aligned}$$

(b)

Hier geht man wieder von der Potentialgleichung aus, ersetzt aber $W(\sigma)$ nicht nur durch das logarithmische Glied der Reihenentwicklung, sondern berücksichtigt auch noch das zweite, das lineare Glied σ . Die Glieder höherer Ordnung können vernachlässigt werden, da σ in der

Nähe des stationären Zustandes auf alle Fälle wesentlich kleiner als eins ist ($s \ll 1$).
Die Potentialgleichung lautet dann:

$$Z_{P,t} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \left(\dot{V} \cdot W(\sigma_r) + \left(-\dot{V} \right) W(\sigma_\rho) \right)$$

Dabei gilt:

$$\sigma_r = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

$$\sigma_\rho = \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

$$W(\sigma) = -\ln(1,781\sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \dots$$

Damit erhält man:

$$Z_{P,t} = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(-\ln \left(\frac{1,78 \cdot r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right) + \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} + \ln \left(\frac{1,78 \cdot \rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right) - \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right)$$

$$\begin{aligned} Z_{P,t} &= \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(\ln \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) + \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} - \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} \right) \\ &= \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \left(\ln \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) + \frac{S}{4 \cdot T \cdot t} (r^2 - \rho^2) \right) \end{aligned}$$

An dieser Gleichung sieht man, dass eine Zeitabhängigkeit nur im zweiten Summanden auftritt.

Laut Aufgabenstellung soll diese Funktionalität proportional um ein Tausendstel kleiner sein als der zeitunabhängige Teil.

Aus diesem Grund muss gelten:

$$\ln \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) \cdot 0,001 \geq \frac{S}{4 \cdot T \cdot t} \cdot |(r^2 - \rho^2)|$$

Aufgelöst nach t :

$$t \geq \frac{S}{4 \cdot T \cdot \ln \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) \cdot 0,001} \cdot |(r^2 - \rho^2)|; \quad \ln \left(\frac{\rho^2}{r^2} \right) = 2 \ln \left(\frac{\rho}{r} \right)$$

und unter Beachtung, dass $\rho > r$ ist, gilt:

$$\begin{aligned}
t &\geq \frac{S}{8 \cdot T \cdot \ln\left(\frac{\rho}{r}\right) \cdot 0,001} \cdot |(r^2 - \rho^2)| \\
t &\geq \frac{0,25}{8 \cdot 15m \cdot 0,001m \cdot s^{-1} \cdot 0,805 \cdot 0,001} \cdot |(20.000 - 100.000)| \\
&\geq \frac{0,25 \cdot 80.000}{8 \cdot 15m \cdot 0,001m \cdot s^{-1} \cdot 0,805 \cdot 0,001} \\
&\geq 207.039.338s \\
t &\gtrsim 6,6a
\end{aligned}$$

Beachtet man das Ergebnis von Aufgabe a) ($s = 55,6cm$), so ist die Forderung nach einer minimalen relativen Änderung von $\varepsilon \leq 0,001$ übertrieben. Lässt man eine Änderung von $\varepsilon \leq 1\%$ zu, so ist dieser Zustand bereits nach ca. 3,85 Jahren, d.h. nach 3 Jahren und 10 Monaten erreicht. In den folgenden 35 Jahren würde sich der Grundwasserspiegel nur um $0,5cm$ verringern.

• zu Aufgabe 7 (s. S. 248)

Diese Aufgabe kann mit der Brunnengleichung nach THEIS gelöst werden. Da der stationäre Endzustand gefragt ist, kann mit sehr guter Näherung die vereinfachte Lösung von JACOB&COOPER eingesetzt werden. Der Hangzufluss kann dabei näherungsweise als Infiltrationsbrunnen angesetzt werden. Beachtet man in der folgenden Rechnung den Anteil am Absenkungspotential, der durch diesen hervorgerufen wird, so kann man feststellen, dass dieser auch vernachlässigt werden kann.

Auf Grund der ungespannten Verhältnisse muss die Superposition im Potentialraum erfolgen. Erst danach kann die Rücktransformation in die Wasserstands-/Absenkungsebene erfolgen.

(a)

Entsprechend der Aufgabenstellung handelt es sich hier um eine Zweibrunnenanlage, die an der Flussrandbedingung zu spiegeln ist. Der Hangzufluss soll laut Aufgabenstellung 50m auf der flussabgewandten Seite des GWBR angreifen. Der virtuelle Spiegelbrunnen des als Infiltrationsbrunnen angenommenen Hangzuflusses ist dann 350m vom GWBR entfernt. Rückt der Hangzufluss noch weiter vom Pegel weg, so wird der Einfluss kleiner. Das Potential ergibt sich zu:

$$Z_{(r,t \rightarrow \infty)} = \frac{1}{4\pi k} \left(\dot{V}_{Br} (W(\sigma_{rBr}) - W(\sigma_{\rho Br})) - \dot{V}_{Hang} (W(\sigma_{rHang}) - W(\sigma_{\rho Hang})) \right)$$

Mit der Näherung nach JACOB&COOPER erhält man:

$$\begin{aligned} W(\sigma) &\approx \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t}{r^2 \cdot S} \right) \approx -\ln \left(\frac{1,78 \cdot S \cdot r^2}{t \cdot T} \right) \\ Z_{(r,t \rightarrow \infty)} &= \frac{1}{4\pi k} \left(2\dot{V}_{Br} \ln \left(\frac{\rho_{Br}}{r_{Br}} \right) - 2\dot{V}_{Hang} \ln \left(\frac{\rho_{Hang}}{r_{Hang}} \right) \right) \\ &= \frac{2}{4\pi k} \left(50 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \ln \left(\frac{250m}{50m} \right) - 0,001 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \cdot 15m \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot 100m \cdot \ln \left(\frac{350m}{50m} \right) \right) \\ &= \frac{2}{4\pi k} (50 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot 1,6049 - 0,001 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \cdot 15m \cdot \\ &\quad \cdot 100m \cdot 1,9459) \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1}}{4\pi k} (80,47 - 2,9189) \\ Z_{(r,t \rightarrow \infty)} &= \underline{12,34 m^2} \end{aligned}$$

Berechnet man das Potential ohne Hangzufluss, so erhält man:

$$Z_{(r,t \rightarrow \infty, \text{ohne Hang})} = \frac{2 \cdot 10^{-3} m^3 \cdot s^{-1}}{4\pi k} \quad (80, 47)$$

$$Z_{(r,t \rightarrow \infty, \text{ohne Hang})} = 12,81 m^2$$

Für den hier vorliegenden Fall des ungespannten Grundwasserleiters muss dieser Potentialwert noch in die Absenkung s umgerechnet werden.

	mit Hangzufluss	ohne Hangzufluss
Wasserstand	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 24,68)m}$ $z_R = 14,15m$	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 25,62)m}$ $z_R = 14,12m$
Absenkung	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,15m$ $s = 0,85m$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,12m$ $s = 0,88m$

Daran sieht man, dass der Hangzufluss nur eine untergeordnete Bedeutung bei diesem hydraulischen Schema hat.

(b)

Die Lösung der Aufgabenstellung 7b) erfolgt analog zu (a). Der Unterschied besteht nur in der Berücksichtigung der Zusatzlängen, die auf Grund der Kolmationsschicht und der Unvollkommenheit des Flusses zu berücksichtigen sind. Da hier ungespannte Grundwasserhältnisse vorliegen, ergibt sich die durchströmte Mächtigkeit D zu:

$$D = z_{R0} = 15m$$

Für die Unvollkommenheit ergibt sich eine Zusatzlänge aus dem Diagramm von

$$\frac{B}{D} = \frac{20m}{15m} = 1,33 \Rightarrow \frac{\Delta L_1}{D} = 0,43$$

$$\Delta L_1 = 6,45m$$

Für die Zusatzlänge, welche die Kolmationsschicht berücksichtigen soll, ergibt sich:

$$\Delta L_2 = \sqrt{\frac{k \cdot D \cdot M_{Kolm}}{k_{Kolm}}} = \sqrt{\frac{10^{-3}m \cdot s^{-1} \cdot 15m \cdot 1m}{5 \cdot 10^{-5}m \cdot s^{-1}}} = \sqrt{300m^2} = 17,32m$$

Damit wird das Absenkungspotential berechnet zu:

$$Z_{(r,t \rightarrow \infty)} = \frac{1}{4\pi k} \left(\dot{V}_{Br} (W(\sigma_{r_{Br}}) - W(\sigma_{\rho_{Br}})) - \dot{V}_{Hang} (W(\sigma_{r_{Hang}}) - W(\sigma_{\rho_{Hang}})) \right)$$

Mit der Näherung nach JACOB&COOPER erhält man:

$$\begin{aligned} W(\sigma) &\approx \ln\left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t}{r^2 \cdot S}\right) \approx -\ln\left(\frac{1,78 \cdot S \cdot r^2}{t \cdot T}\right) \\ Z_{(r,t \rightarrow \infty)} &= \frac{1}{4\pi k} \left(2\dot{V}_{Br} \ln\left(\frac{\rho_{Br}}{r_{Br}}\right) - 2\dot{V}_{Hang} \ln\left(\frac{\rho_{Hang}}{r_{Hang}}\right) \right) \\ &= \frac{2}{4\pi k} \left(50 \cdot 10^{-3}m^3 \cdot s^{-1} \ln\left(\frac{250 + (2 \cdot 23,77)m}{50m}\right) \right) - \\ &\quad - \frac{2}{4\pi k} \left(0,001 \cdot 10^{-3}m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \cdot 15m \cdot 100m \cdot \ln\left(\frac{350 + (2 \cdot 23,77)m}{50m}\right) \right) \\ &= \frac{2}{4\pi k} (50 \cdot 10^{-3}m^3 \cdot s^{-1} \cdot 1,7835 - 0,001 \cdot 10^{-3}m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \cdot \\ &\quad \cdot 15m \cdot 100m \cdot 2,07327) \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-3}m^3 \cdot s^{-1}}{4\pi k} (89,175 - 3,11) \\ Z_{(r,t \rightarrow \infty)} &= \underline{13,70m^2} \end{aligned}$$

Die Zusatzlängen müssen doppelt berücksichtigt werden, da die Spiegelung an dem virtuellen Flussufer erfolgt, welches dem Pegel zugewandt ist, d.h. es erfolgt erst die virtuelle Verschiebung und danach die Spiegelung.

Berechnet man das Potential ohne Hangzufluss, so erhält man:

$$\begin{aligned} Z_{(r,t \rightarrow \infty, \text{ohne Hang})} &= \frac{2 \cdot 10^{-3}m^3 \cdot s^{-1}}{4\pi k} (89,175) \\ Z_{(r,t \rightarrow \infty, \text{ohne Hang})} &= 14,19m^2 \end{aligned}$$

Für den hier vorliegenden Fall des ungespannten Grundwasserleiters muss dieser Potentialwert noch in die Absenkung s umgerechnet werden.

	Wasserstand	Absenkung
mit Hangzufluss	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 24,68)m}$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,15m$
idealer Fluss	$z_R = 14,15m$	$s = 0,85m$
ohne Hangzufluss	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 25,62)m}$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,12m$
idealer Fluss	$z_R = 14,12m$	$s = 0,88m$
mit Hangzufluss	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 27,40)m}$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,06m$
realer Fluss	$z_R = 14,06m$	$s = 0,94m$
ohne Hangzufluss	$z_R = \sqrt{z_{R0}^2 - 2 \cdot Z}$ $= \sqrt{(225 - 28,39)m}$	$s = z_{R0} - z_R$ $= 15m - 14,09m$
realer Fluss	$z_R = 14,02m$	$s = 0,98m$

Die grafische Darstellung in Abbildung 2.22 veranschaulicht die Ergebnisse.

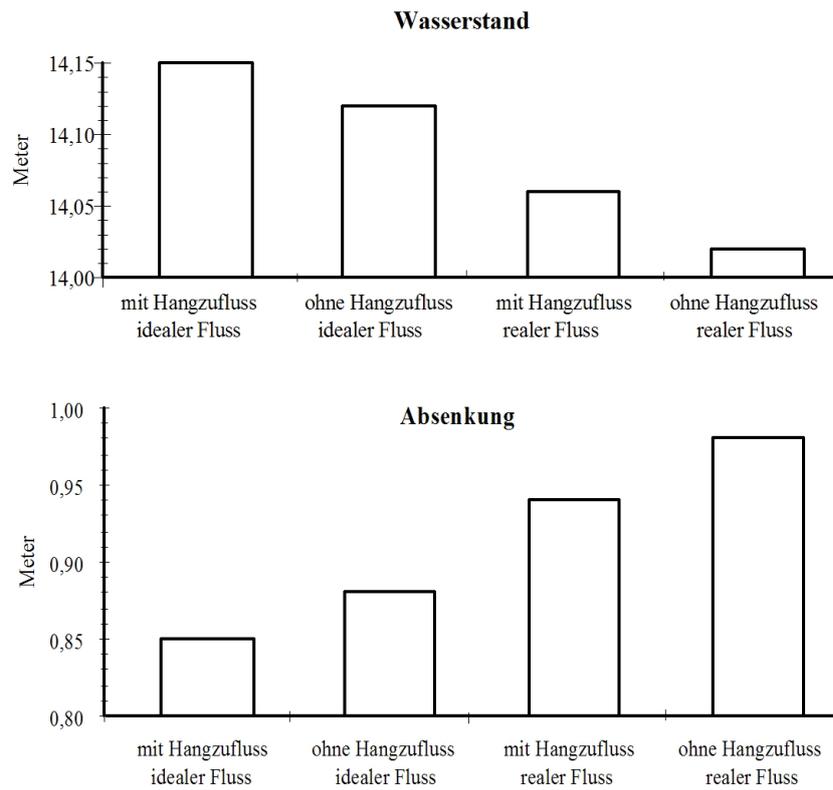


Abbildung 2.22: Abhängigkeit des Grundwasserstandes und der Absenkung vom Hangzufluss

• zu Aufgabe 8 (s. S. 248)

In die gegebene Funktion, die Absenkung für gespannte Grundwasserleiterverhältnisse mit der Näherung nach JACOB&COOPER, setzt man die Messwerte s_1 und s_2 mit den Messzeitpunkten t_1 und t_2 ein:

$$s_1 = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t_1}{r^2 \cdot S} \right)$$

$$s_2 = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t_2}{r^2 \cdot S} \right)$$

Bildet man nun die Differenz zwischen den beiden Absenkungen, so erhält man:

$$s_2 - s_1 = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \left(\ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t_2}{r^2 \cdot S} \right) - \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t_1}{r^2 \cdot S} \right) \right)$$

$$\Delta s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \ln \left(\frac{t_2}{t_1} \right)$$

Laut Aufgabenstellung beträgt das Verhältnis t_2 zu t_1 :

$$\frac{t_2}{t_1} = 10$$

$$\Delta s = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot T} \ln(10)$$

$$\Delta s \approx \frac{\dot{V} \cdot 2,3}{4 \cdot \pi \cdot T}$$

Aus der gegebenen Formel erkennt man, dass gespannte Grundwasserhältnisse vorliegen müssen, da s und $W(\sigma) \approx -\ln(C\sigma)$ linear zusammenhängen. Bei ungespannten Grundwasserhältnissen lautet die Gleichung unter den gegebenen Bedingungen (Näherung nach JACOB&COOPER):

$$s = z_{Rn} - \sqrt{z_{Rn}^2 - \frac{\dot{V}}{2 \cdot \pi \cdot k} \ln \left(\frac{2,25 \cdot T \cdot t}{r^2 \cdot S} \right)}$$

Unter Beachtung der gespannten Grundwasserhältnisse ergibt sich $T = k \cdot M$, bzw. für den k -Wert:

$$k = \frac{\dot{V} \cdot 2,3}{4 \cdot \pi \cdot M \cdot \Delta s}$$

Man erkennt, dass diese Formel zur Bestimmung des k -Wertes unabhängig von der Entfernung zwischen Brunnen und Beobachtungsrohr ist.

Diese Formel gilt aber nur für gespannte Grundwasserleiterverhältnisse und für Bereiche, in denen die Näherung nach JACOB&COOPER entsprechend kleine Fehler liefert. Wie bei GRÄBER (LB Systemanalyse) gezeigt, gilt für Zeiten

$$t > 8,33 \cdot r^2 \cdot \frac{S}{T}$$

ein Fehler der Näherung nach JACOB&COOPER von kleiner 1%

- zu Aufgabe 9 (s. S. 248)

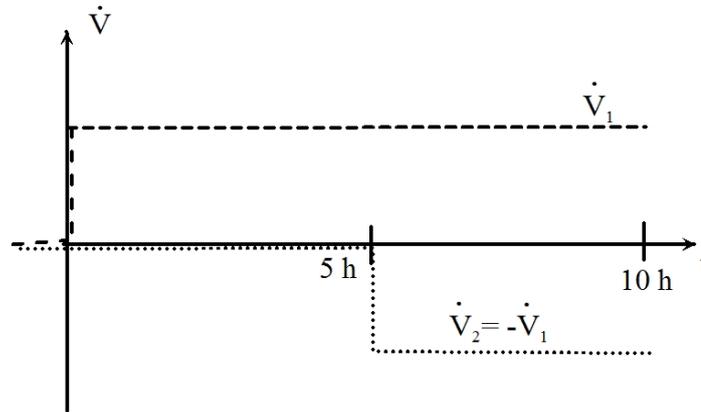


Abbildung 2.23: GWBR mit Förderintervall

Gegeben sind:

$$h_{t=0} = 10m$$

$$M = 15m$$

$$k = 0,0001m \cdot s^{-1} = 0,36m \cdot h^{-1}$$

$$S_0 = 0,0001m^{-1}$$

$$n_0 = 0,25$$

$$\dot{V} = 0,2m^3 \cdot s^{-1}$$

Zu berechnen ist die Absenkung im GWBR für den Zeitpunkt $t = 10h$

$$z_{Rn} = h_n = 10m; \quad z_R < M = 15m \implies \text{ungespannter GWL}$$

$$T = k \cdot z_{Rt=0} = 0,0001 \cdot 10 = 0,001 m^2 \cdot s^{-1}$$

$$S = n_0 + S_0 \cdot z_{Rt=0} = 0,25 + 0,0001 \cdot 10 = 0,251$$

$$s_{ungesp} = z_{Rt=0} - z_R = z_{Rn} - \sqrt{z_{Rn}^2 - 2Z}$$

$$Z_{\dot{V}_2} = \frac{\dot{V}_2}{4 \cdot \pi \cdot k} W(\sigma_{\dot{V}_2}); \quad \dot{V}_2 = -0,2 m^3 \cdot s^{-1};$$

$$\sigma_{\dot{V}_2} = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot (t - \tau)} \quad t = 10h \rightarrow \text{reale Zeit}$$

$$\tau = 5h \rightarrow \text{Startzeit}$$

$$\sigma_{\dot{V}_2} = \frac{25^2 \cdot 0,251}{4 \cdot 0,001 \cdot (10 - 5) \cdot 3600} = 2,18$$

$$W(2,18) = W(2) - [W(2) - W(3)] \cdot 0,18$$

$$W(\sigma) = 0,0432$$

$$Z_{\dot{V}_2} = \frac{-0,2 \cdot 0,0432}{4 \cdot \pi \cdot 0,0001} = -6,9 m^2$$

$$Z = \frac{\dot{V}_1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot W(\sigma_{\dot{V}_1})$$

$$\dot{V}_1 = 0,2 \frac{m^3}{s} = 720 \frac{m^3}{h}$$

$$\sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}; \quad t = 5h; \quad r = 25m; \quad S = n_0 + S_0 \cdot h_n$$

$$W(\sigma_{\dot{V}_1}) = -\ln(1,781 \cdot \sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\sigma^4}{4 \cdot 4!} + \dots$$

$$T = k \cdot h_n = 3,6 \frac{m^2}{h}$$

$$\sigma_{\dot{V}_1} = \frac{25^2 \cdot 0,251}{4 \cdot 3,6 \cdot 10} = 1,09$$

$$W(\sigma_{\dot{V}_1}) \approx 0,20 \quad \text{siehe Tabelle 2.1, S. 256}$$

$$\begin{aligned}Z_{\dot{V}_1} &= \frac{\dot{V}_1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot W(\sigma_{\dot{V}_1}) = \frac{0,2 \cdot 0,2}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-4}} \\ &= \frac{0,00318}{10^{-4}} \approx 31,8 m^2\end{aligned}$$

$$Z = Z_{\dot{V}_1} + Z_{\dot{V}_2} = 31,8 - 6,9 = 24,9 m^2$$

$$s = z_{R_n} - \sqrt{z_{R_n}^2 - 2Z} = 10 - \sqrt{100 - 49,8} = 10 - 7,09$$

$$s = 2,91 m$$

Die Absenkung im GWBR beträgt 2,91m.

• zu Aufgabe 10 (s. S. 248)

Gegeben sind:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = 25l \cdot s^{-1} = 0,025m^3 \cdot s^{-1}$$

$$k = 2 \cdot 10^{-3}m \cdot s^{-1}$$

$$D = h_n = 15m$$

$$S = 0,25$$

$$k' = 1 \cdot 10^{-5}m \cdot s^{-1}$$

$$M' = 1m$$

$$B = 25m$$

$$r_1 = 250m$$

$$r_2 = 500m$$

$$r_P = 375m$$

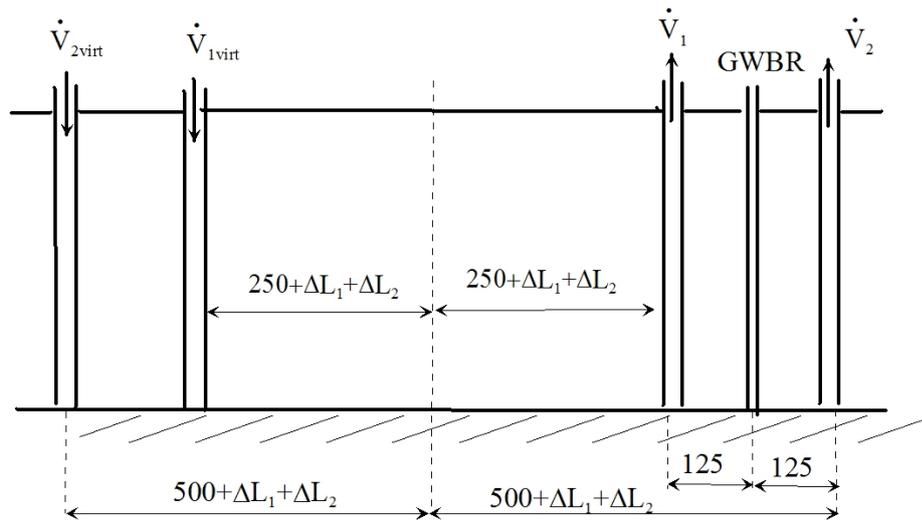
Zu berechnen ist die Absenkung am Punkt P nach einem Jahr. \Rightarrow Es liegt eine Randbedingung 3. Art vor (siehe Abbildung 2.24); Verschiebung um ΔL_1 ; ΔL_2

$$\Delta L_1 = f\left(\frac{B}{D}\right) = f\left(\frac{25}{15}\right) = f(1,667)$$

$$\Delta L_1 = 0,43 \cdot D = 6,45m$$

$$\begin{aligned}\Delta L_2 &= \sqrt{\frac{k \cdot D \cdot M'}{k'}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}m \cdot s^{-1} \cdot 15m \cdot 1m}{1 \cdot 10^{-5}m \cdot s^{-1}}}\end{aligned}$$

$$\Delta L_2 = 54,8m$$

Abbildung 2.24: RB dritter Art \rightarrow Verschiebung

$$s = h_n - \sqrt{h_n^2 - 2Z}$$

$$Z = \frac{1}{4\pi \cdot k} \sum_{i=1}^4 \dot{V}_i \cdot W_i(\sigma)$$

$$\sigma_i = \frac{r_i^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}; \quad T = k \cdot h_n = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 15 = 0,03$$

Es gilt:

$$\dot{V}_{1virt} = \dot{V}_{2virt} = -25l \cdot s^{-1}$$

$$\rho_1 = 2(250 + 6,45 + 54,8) + 125 = 747,5m$$

$$\rho_2 = 2(500 + 6,45 + 54,8) - 125 = 997,5m$$

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_{1virt}; \quad \dot{V}_4 = \dot{V}_{2virt}$$

$$r_3 = \rho_1; \quad r_4 = \rho_2$$

$$t = 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 31536 \cdot 10^3 s$$

$$\sigma_1 = \frac{125^2 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,03 \cdot 31536 \cdot 10^3} = 1,03 \cdot 10^{-3}$$

$$W_1(\sigma_1) = 6,31$$

$$\sigma_2 = \sigma_1; \quad W_2 = W_1$$

$$\sigma_3 = \frac{747,5^2 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,03 \cdot 31536 \cdot 10^3} = 3,7 \cdot 10^2$$

$$W_3(\sigma_3) = 2,76$$

$$\sigma_4 = \frac{997,5^2 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,003 \cdot 31536 \cdot 10^3} = 6,6 \cdot 10^{-2}$$

$$W_4(\sigma_4) = 2,21$$

$$Z = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot 0,025(6,31 + 6,31 - 2,76 - 2,21) = 7,61$$

$$s = 15 - \sqrt{15^2 - 2 \cdot 7,61}$$

$$s = 0,52m$$

Die Absenkung am Punkt P beträgt nach einem Jahr 0,52m.

- zu Aufgabe 11 (s. S. 248)

Gegeben sind:

$$\text{Brunnen 1: } X = 750m \quad Y = 100m$$

$$\text{Brunnen 2: } X = 700m \quad Y = 400m$$

$$\text{Punkt P: } X = 1000m \quad Y = 500m$$

$$h_n = 15m; \quad n_0 = 0,25 \quad k = 0,001$$

Zu berechnen sind die Absenkung am Punkt P nach einem Monat und der stationäre Endzustand.

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 = 25l \cdot s^{-1} = 0,025m^3 \cdot s^{-1}$$

$$t = 30 \cdot 24 \cdot 3600 = 2592 \cdot 10^3 s$$

$$r_1^2 = (1000 - 750)^2 + (500 - 100)^2 = 222.500m^2$$

$$r_2^2 = (1000 - 700)^2 + (500 - 400)^2 = 100.000m^2$$

$$\rho_1^2 = (1000 + 750)^2 + (500 - 100)^2 = 3,3 \cdot 10^6 m^2$$

$$\rho_2^2 = (1000 + 700)^2 + (500 - 400)^2 = 2,9 \cdot 10^6 m^2$$

\implies Es liegt eine Randbedingung 1. Art vor: (siehe Abbildung 2.25)

$$s = Z_{Rn} - \sqrt{Z_{Rn}^2 - 2Z}; \quad Z_{Rn} = h_n = 15m$$

$$s = n_0 = 0,25$$

$$T = k \cdot h_n = 0,015$$

$$Z = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \dot{V} \cdot (W_1(\sigma_1) + W_2(\sigma_2) - (W_{1virt}(\sigma_{1virt}) - (W_{2virt}(\sigma_{2virt})))$$

$$\dot{V} = \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = -\dot{V}_{1virt} = -\dot{V}_{2virt}$$

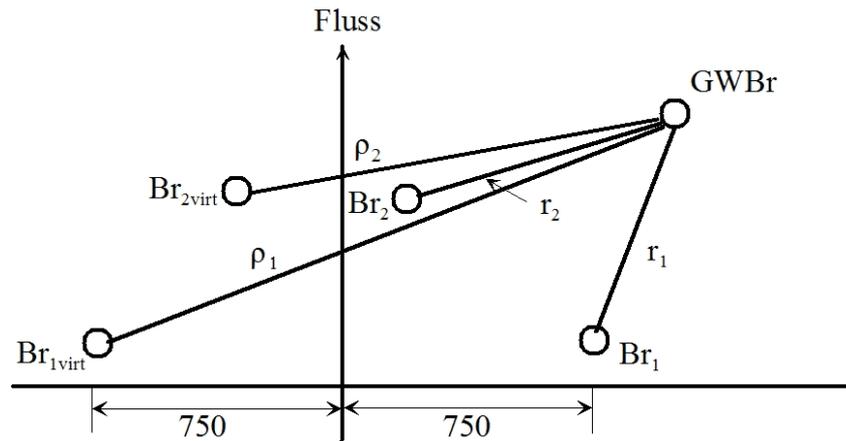


Abbildung 2.25: Zwei Brunnen an einem Fluss

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{r_1^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t} = 3,58 \cdot 10^{-1} & W_1(\sigma_1) &= 0,79 \\ \sigma_2 &= \frac{10^5 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,015 \cdot 2592 \cdot 10^3} = 1,61 \cdot 10^{-1} & W_2(\sigma_2) &= 1,46 \\ \sigma_{1virt} &= \frac{32.225 \cdot 10^2 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,015 \cdot 2592 \cdot 10^3} = 5,18 & W_{1virt}(\sigma_{1virt}) &= 0,001 \\ \sigma_{2virt} &= \frac{29 \cdot 10^5 \cdot 0,25}{4 \cdot 0,015 \cdot 2592 \cdot 10^3} = 4,66 & W_{2virt}(\sigma_{2virt}) &= 0,00204 \end{aligned}$$

$$Z = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot 0,025 (0,79 + 1,46 - 0,001 - 0,00204) = 4,47$$

$$s = 15 - \sqrt{15^2 - 2 \cdot 4,47} = 0,30$$

Die Absenkung am Punkt P beträgt nach einem Monat $0,30m$.

Berechnung des stationären Endzustandes:

$$\begin{aligned}
z_{stat(r,t=\infty)} &= \frac{\dot{V}_1}{4 \cdot \pi \cdot k} (W_{Br1} - W_{Br1virt}) + \frac{\dot{V}_2}{4 \cdot \pi \cdot k} (W_{Br2} - W_{Br2virt}) \\
&= \frac{\dot{V}_1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \ln \frac{\rho_1^2}{r_1^2} + \frac{\dot{V}_2}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \ln \frac{\rho_2^2}{r_2^2} \\
&= \frac{0,025}{4 \cdot 3,14 \cdot 0,001} \cdot \ln \frac{3,3 \cdot 10^6}{222.500} + \frac{0,025}{4 \cdot 3,14 \cdot 0,001} \cdot \ln \frac{2,9 \cdot 10^6}{100.000} \\
&= 12,1m^2 \\
s &= z_{Rn} - \sqrt{z_{Rn}^2 - 2z_{stat}} = 15 - \sqrt{15^2 - 2 \cdot 12,1} \\
s &= 0,83m
\end{aligned}$$

Der stationäre Endzustand ist nach 0,83m erreicht.

• zu Aufgabe 12 (s. S. 248)

Gegeben sind:

$$\dot{V} = 0,001m^3 \cdot s^{-1}$$

$$S_0 = 0,001m^{-1}$$

$$n_0 = 0,25$$

$$k = 0,001m \cdot s^{-1}$$

$$h_n = 10m; \quad B = 30m; \quad M = 15m; \quad M' = 1m; \quad k' = 1 \cdot 10^{-5}$$

Zu berechnen ist die Grundwasserstandsänderung nach 10 Tagen mittels THEISScher Brunnengleichung.

⇒ Es liegt eine Randbedingung 3. Art vor (siehe Abbildung 2.26):

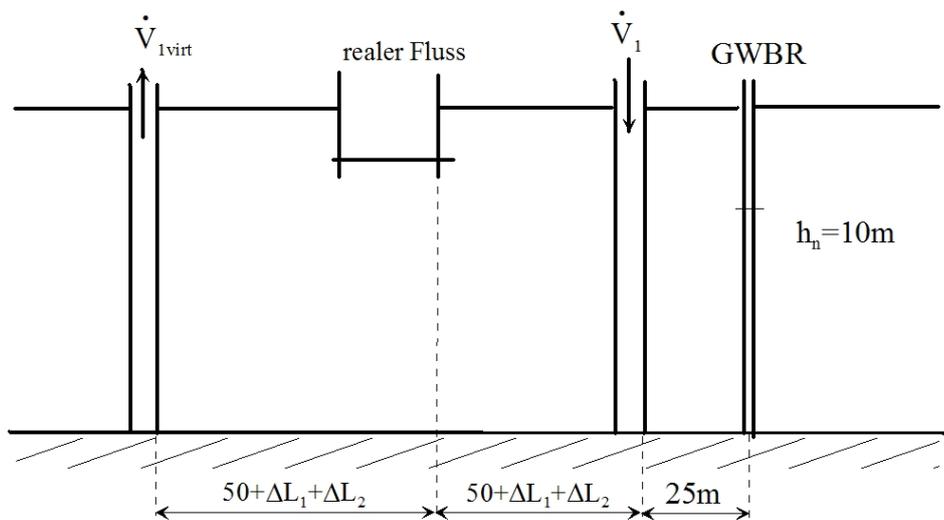


Abbildung 2.26: Grundwasseranreicherungsanlage

$$\Delta L_1 = f\left(\frac{B}{D}\right) = f\left(\frac{30}{10}\right) = f(3); \quad \Delta L_1 = 0,43; \quad D = 4,3$$

$$\Delta L_2 = \sqrt{\frac{0,001 \cdot 10 \cdot 1}{10^{-5}}} = 31,6$$

$$r_1 = 25m$$

$$\rho_1 = 25 + 2(50 + \Delta L_1 + \Delta L_2) = 196,8m$$

$$S = n_0 + S_0 \cdot h_n = 0,26$$

$$T = k \cdot h_n = 0,01$$

$$s = z_{Rn} - \sqrt{z_{Rn}^2 - 2Z}; \quad t = 10d = 10 \cdot 24 \cdot 3600 = 864 \cdot 10^3 s$$

$$Z = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot (\dot{V}_1 \cdot W_1(\sigma_1) - \dot{V}_{virt} \cdot W_2(\sigma_2))$$

$$\sigma_1 = \frac{r_1^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot k} = \frac{25^2 \cdot 0,26}{4 \cdot 0,01 \cdot 864 \cdot 1000} = 0,0047 = 4,7 \cdot 10^{-3}$$

$$W_1(\sigma_1) = 4,79$$

$$\sigma_2 = \frac{\rho_1^2 \cdot 0,26}{4 \cdot 0,01 \cdot 864 \cdot 1000} = 2,9 \cdot 10^{-1}; \quad W_2(\sigma_2) = 0,94$$

$$Z = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot 0,001(4,79 - 0,94) = 0,31$$

$$s = 10 - \sqrt{100 + 0,62} = -0,031$$

Der Grundwasserstand ist nach zehn Tagen um 0,031m.gestiegen.

• zu Aufgabe 13 (s. S. 248)

Gegeben sind:

$$\dot{V} = 0,001m^3 \cdot s^{-1}$$

$$S_0 = 0,001m^{-1}$$

$$n_0 = 0,25$$

$$k = 0,001m \cdot s^{-1}$$

$$M = 50m; \quad h_n = 40m$$

Zu berechnen ist die Grundwasserstandsänderung nach 10 Tagen mittels THEISScher Brun-
nengleichung.

Die schematische Darstellung für die Lösung zeigt Abbildung (2.27).

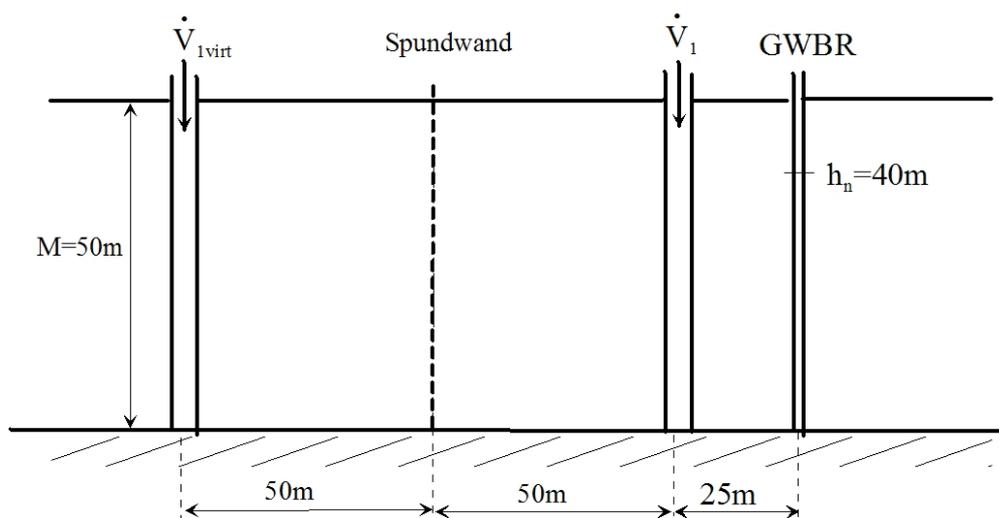


Abbildung 2.27: Schematische Anordnung mit Brunnen und Spundwand

$$s = Z_{Rn} - \sqrt{Z_{Rn}^2 - 2Z}; \quad Z_{Rn} = h_n = 40m$$

$$Z = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot \dot{V}(W_1(\sigma_1) + W_2(\sigma_2))$$

$$S = n_0 + S_0 \cdot h_n = 0,29$$

$$T = k \cdot h_n = 0,04$$

$$T = 10d = 10 \cdot 24 \cdot 3600 = 864 \cdot 10^3 s$$

$$r = 25$$

$$\rho = 125$$

$$\sigma_1 = \frac{25^2 \cdot 0,29}{4 \cdot 0,04 \cdot 864 \cdot 10^3} = 1,3 \cdot 10^{-3}; \quad W_1(\sigma_1) = 6,12$$

$$\sigma_2 = \frac{\rho^2 \cdot S}{4 \cdot \pi \cdot T} = 3,3 \cdot 10^{-2}; \quad W_2(\sigma_2) = 2,88$$

$$Z = -\frac{1}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot 0,001(6,12 + 2,88) = -0,72$$

$$s = 40 - \sqrt{40^2 + 2 \cdot 0,72} = -0,02$$

Der Grundwasserstand hat sich nach zehn Tagen um 0,02m.erhöht.

• zu Aufgabe 14 (s. S. 248)

Gegeben sind:

$$\dot{V} = 0,1m^3 \cdot s^{-1}$$

$$S_0 = 0,0001m^{-1}$$

$$n_0 = 0,25$$

$$k = 0,0001m \cdot s^{-1}$$

$$h_{t=0} = 40m$$

$$M = 50m$$

Zu berechnen ist die Absenkung am Pegel für den Zeitpunkt $t = 15h$.

Es handelt sich hier um einen durch eine Randbedingung 1. Art einseitig begrenzten Grundwasserleiter. Dies führt dazu, dass der reale Brunnen auf Grund des Spiegelungsverfahrens in einen virtuellen überführt werden muss. Dabei wird aus der Exfiltration eine Infiltration. Da hier eine gestufte Förderganglinie vorliegt, dargestellt durch die zwei Phasen Pumpen und Wiederanstieg, müssen zwei Pumpleistungen, Exfiltration und Infiltration, eingeführt werden. Es ergibt sich damit folgende schematische Berechnungsgrundlage (siehe Abbildung 2.28):

Da es sich um ungespannte Grundwasserleiterverhältnisse handelt, muss die Superposition in der Potentialebene durchgeführt werden. Im Einzelnen werden folgende Werte berechnet:

$$\sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot t \cdot T}$$

$$W(\sigma) = -\ln(1,78 \cdot \sigma) + \sum (-1)^{n+1} \frac{\sigma^n}{n \cdot n!}$$

Des Weiteren gilt:

$$Z = \frac{\dot{V}}{4 \cdot \pi \cdot k} \cdot W(\sigma)$$

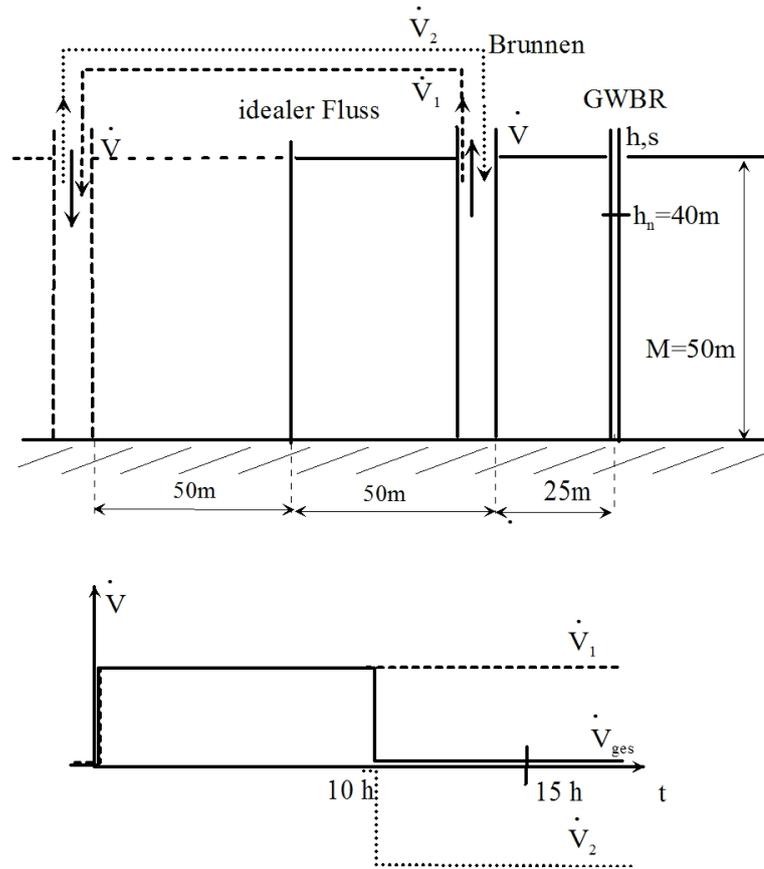


Abbildung 2.28: Grundwasserleiter mit Brunnen und Fluss

	Br_{real1}	Br_{real2}	Br_{virt1}	Br_{virt2}
\dot{V}	$+\dot{V}$	$-\dot{V}$	$-\dot{V}$	$+\dot{V}$
t	$15h$	$5h$	$15h$	$5h$
r	$25m$	$25m$	$125m$	$125m$
σ	$0,18$	$0,54$	$4,5$	$13,6$
$W(\sigma)$	$1,343$	$0,518$	$0,0025$	≈ 0
Z	$106,87$	$-41,22$	$-0,199$	0

Damit ergibt sich ein Gesamtpotential von:

$$Z_{Ges} = Z_{real1} + Z_{real2} + Z_{virt1} + Z_{virt2}$$

$$Z_{Ges} = 65,45m^2$$

Da es sich hier um ungespannte Grundwasserverhältnisse handelt, folgt die Lage der freien Grundwasseroberfläche zu:

$$z_R = \sqrt{z_{Rt=0}^2 - 2 \cdot Z}$$

$$z_R = 38,33m$$

bzw.

$$s = z_{Rt=0} - z_R$$

$$s = 1,67m$$

Die Absenkung am Pegel beträgt 1,67m.

Kapitel 3

Numerische Grundwasserströmungsmodelle

3.1 Aufgaben

1. Berechnen Sie mittels einer eindimensionalen stationären Grabenströmung die Lage der freien Oberfläche in Abhängigkeit von x , den Abfluss aus dem Oberwasser und den Zufluss zum Unterwasser (siehe Abbildung 3.1).

Verwenden Sie dabei fünf Quantisierungselemente. (Lösung s. S. 312)

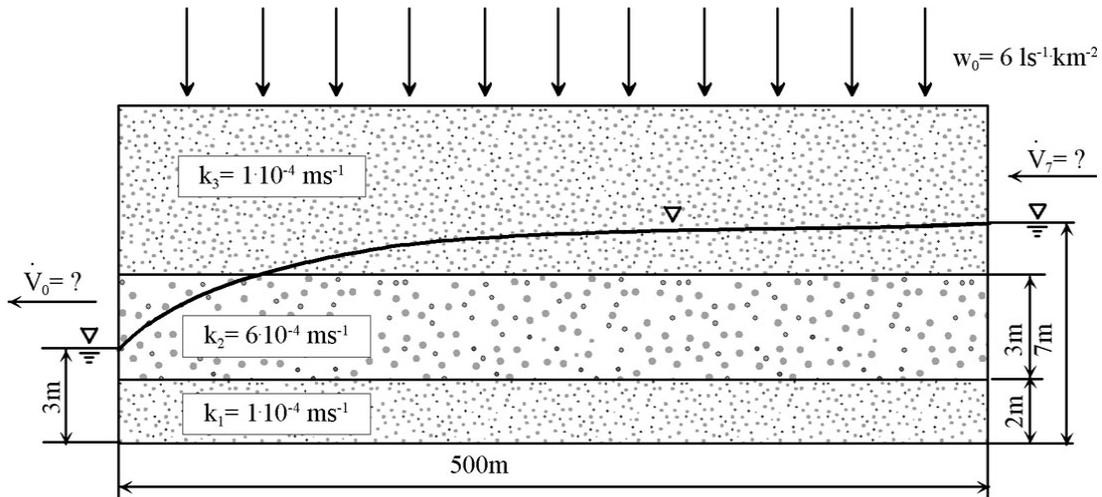


Abbildung 3.1: Geschichteter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime

2. Berechnen Sie mittels einer eindimensionalen instationären Grabenströmung die Lage der freien Oberfläche in Abhängigkeit von x und t (0 bis $2d$), den Abfluss aus dem Oberwasser und den Zufluss zum Unterwasser (siehe Abbildung 3.2).

Verwenden Sie dabei fünf Ortsquantisierungselemente und fünf Zeitschritte.

Wählen sie die Zeitschrittgröße entsprechend des zu erwartenden Gradienten.

(Lösung s. S. 319)

3. In einem Grundwasserleiter soll ein Tunnel (U-Bahn) parallel zu einem Fluss eingebaut werden (siehe Abbildung 3.3).

Berechnen Sie, zu welchen Grundwasserstandsänderungen es für den stationären Fall durch diesen Einbau kommt.

Wählen Sie dazu ein geeignetes grobes Quantisierungsschema.

(Lösung s. S. 326)

4. In einer Flussniederung soll mittels eines Deichbauwerkes (siehe Abbildung 3.4) das Poldergebiet vor Hochwasser geschützt werden (entsprechend vereinfachtem Schema).

Deich: $k = 10^{-4} \frac{m}{s}$, $n_0 = 0,15$, $S_0 = 0,002 m^{-1}$;

Dichtungsmaterial: $k = 10^{-5} \frac{m}{s}$; $n_0 = 0,05$; $S_0 = 0,001 m^{-1}$

(Lösung s. S. 331)

- (a) Entwickeln Sie ein einfaches diskretisiertes Schema zur Abschätzung der Grundwasserströmungsprozesse
- (b) Wieviel Wasser fließt pro Meter Deichlänge in das Poldergebiet?
5. Für ein Uferfiltratwasserwerk sollen die zu erwartenden Grundwasserströmungsverhältnisse simuliert werden (siehe Abbildung 3.5).

Gegeben: $\dot{V} = 0,001 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, $S_0 = 0,0001 \text{ m}^{-1}$, $n_0 = 0,25$, $k = 0,001 \text{ m s}^{-1}$, $z_{R(t=0)} = 10 \text{ m}$,

$h_{Fl} = 10 \text{ m}$, $M = 15 \text{ m}$, $b = 1 \text{ m}$

(Lösung s. S. 335)

- (a) Entwickeln Sie ein einfaches Quantisierungsschema mit drei Knotenpunkten zur Abschätzung der Strömungsprozesse im Grundwasserleiter entsprechend der vorgegebenen Geometrie.
- (b) Stellen Sie die drei Knotengleichungen für eine instationäre Strömungsberechnung auf.
- (c) Berechnen Sie den Wasserstand $z_{R(t)}$ im GWBR für den Zeitpunkt $t = 1 \text{ d}$.
6. Für ein Uferfiltratwasserwerk (siehe Abbildung 3.6) mit parallelem Strömungsregime ist ein numerisches Grundwasserströmungsmodell aufzubauen. Der Fluss soll dabei als idealisierte Randbedingung berücksichtigt werden.

$k = 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $h_{Fl} = 15 \text{ m}$; $z_{R0} = 15 \text{ m}$; $S = 0,25$; $\dot{V} = 50 \frac{\text{l}}{\text{s}}$; $q = 0,001 \frac{\text{l}}{\text{sm}^2}$; $b = 100 \text{ m}$;
 $k_{Kolm} = 5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $M_{Kolm} = 1 \text{ m}$; $B = 6,357 \text{ m}$

(Lösung s. S. 340)

- (a) Wählen Sie ein geeignetes vereinfachtes Quantisierungsschema mit maximal fünf Elementen, damit der Wasserstand am GWBR für den stationären Fall möglichst genau berechnet wird.
- (b) Formulieren Sie die Bilanzgleichungen an den Mittelpunkten der Elemente und stellen Sie diese in Matrixform dar.
- (c) Berechnen Sie die hydraulischen Leitwerte für den Strömungsanteil.
- (d) Wie verändern sich das Gleichungssystem und das Ergebnis, wenn der Fluss nicht idealisiert wird, sondern die Unvollkommenheit und eine Kolmation berücksichtigt werden?
 Skizzieren Sie den Lösungsansatz und schätzen Sie das Ergebnis grob ab.

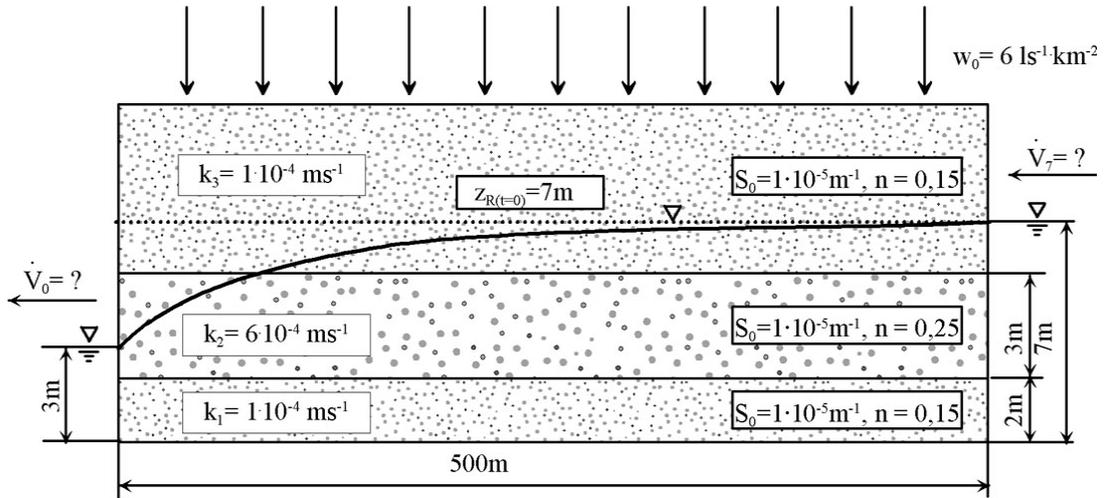


Abbildung 3.2: Geschichteter Grundwasserleiter mit instationärem Strömungsregime

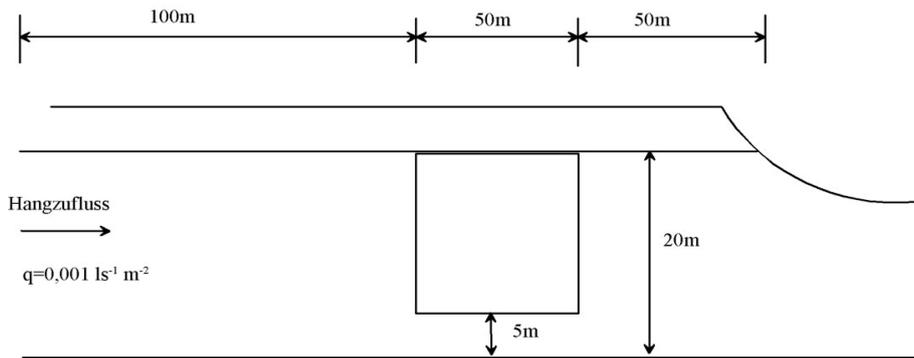


Abbildung 3.3: Einbau eines Tunnelbauwerkes in einem Grundwasserleiter

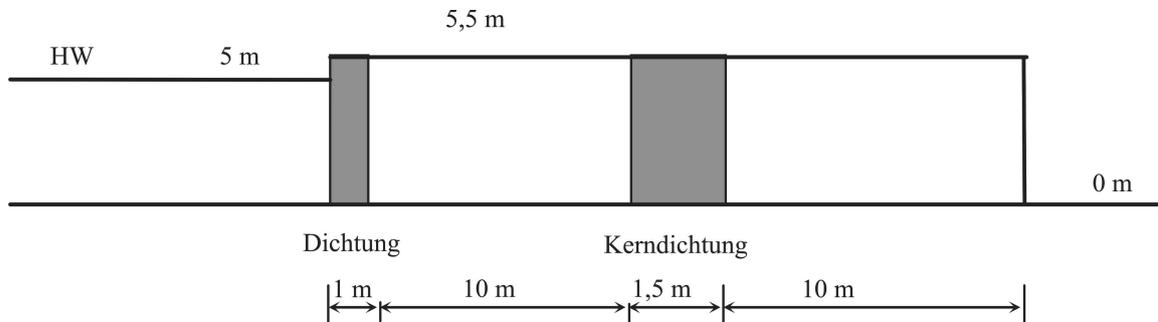


Abbildung 3.4: Deichbauwerk mit Kerndichtung

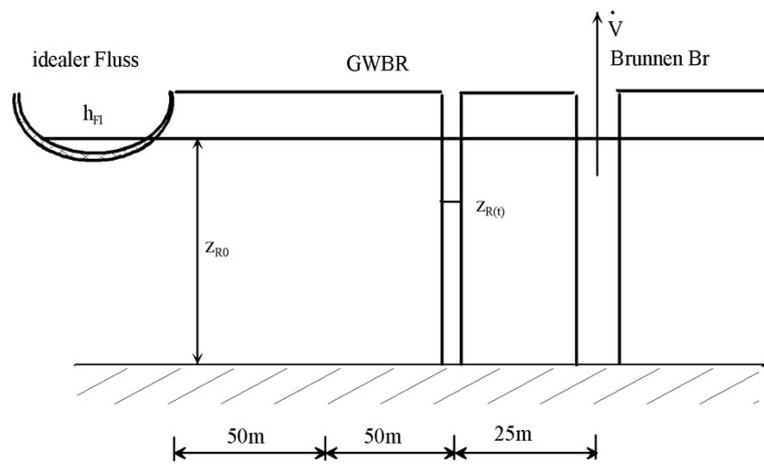


Abbildung 3.5: Grundwasserleiter mit Fluss und Brunnen

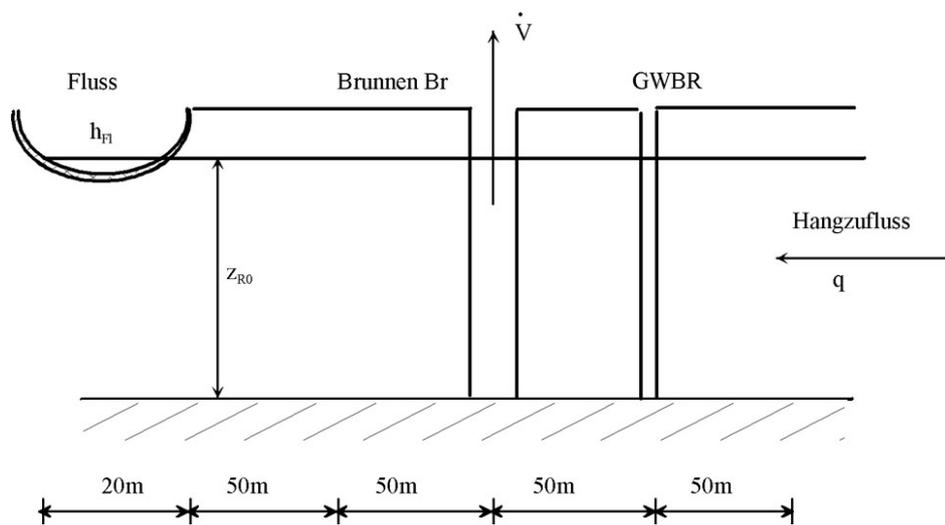


Abbildung 3.6: Wirkung eines Flusses und eines Hangzuflusses auf den Grundwasserleiter

3.2 Lösungen

- zu Aufgabe 1 (s. S. 308)

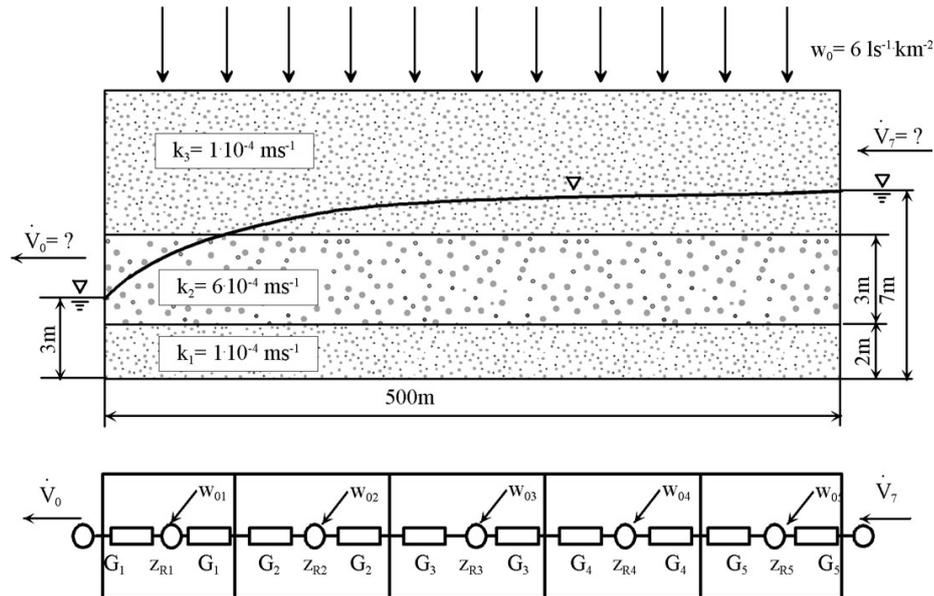


Abbildung 3.7: Quantisierter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime

Als **Lösungsweg** wird vorgeschlagen, wie folgt vorzugehen:

Die Leitwerte ergeben sich bei dem vorgegebenen Quantisierungsabstand und der Breite des Strömungsfeldes zu (siehe Abbildung 3.7):

$$\Delta y_i = 100m$$

$$\Delta x_i = 100m \implies \frac{\Delta x_i}{2} = 50m$$

$$G_i = 2T_i$$

$$G_i = T_i \frac{\Delta y_i}{\frac{\Delta x_i}{2}}$$

Die aneinanderstoßenden Leitwerte können wie folgt zusammengefasst werden:

Nach dem Gesetz der Reihenschaltung von Widerständen gilt:

$$R_{ges} = R_1 + R_2$$

$$G = \frac{1}{R}$$

Daraus folgt:

$$G_{i,i+1} = \frac{2G_i \cdot G_{i+1}}{G_i + G_{i+1}}$$

Für den Fall der äquidistanten Teilung $\Delta x_i = \Delta x_{i+1}$ und der konstanten Breite $\Delta y_i = \Delta y_{i+1}$ sowie dem vorgegebenen Breiten-Längenverhältnis von $\Delta y_i = 2\Delta x_i$ ergibt sich:

$$G_{i,i+1} = \frac{2T_i \cdot T_{i+1}}{T_i + T_{i+1}}$$

Die Transmissibilität T ist definiert zu (ungespannte Grundwasserverhältnisse):

$$T = \int_a^D k \cdot dz$$

$$D = z_R$$

Da der Durchlässigkeitskoeffizient nicht als geschlossene analytische Funktion darstellbar ist, muss der T -Wert über eine Summenformel ermittelt werden. Dabei wird für die Schichten, die gesättigt sind, die Mächtigkeit in Ansatz gebracht. Für die nicht vollständig gesättigten Schichten ist die Lage der freien Oberfläche maßgebend. Für den Anfangswasserspiegel, der in erster Näherung als lineare Funktion zwischen linker und rechter Randbedingung angenommen werden kann, sollen z.B. folgende Werte gelten:

Quantisierungspunkt	z_{R0}	z_{R1}	z_{R2}	z_{R3}	z_{R4}	z_{R5}	z_{R6}
geschätzte Startwasserhöhe	3m	4m	5m	5,5m	6m	6,5m	7m

Mit dieser geschätzten Wasserhöhenverteilung ergibt sich folgende erste Transmissibilitätsverteilung:

$$T_1^{(1)} = k_1 M_1 + k_2 (z_{R1} - M_1) = 1,40 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$$

$$T_2^{(1)} = k_1 M_1 + k_2 (z_{R2} - M_1) = 2,00 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$$

$$T_3^{(1)} = k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 (z_{R3} - M_1 - M_2) = 2,05 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$$

$$T_4^{(1)} = k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 (z_{R4} - M_1 - M_2) = 2,10 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$$

$$T_5^{(1)} = k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 (z_{R5} - M_1 - M_2) = 2,15 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$$

Daheraus lassen sich die Leitwerte nach obiger Formel berechnen:

$$G_{i,i+1} = \frac{2T_i \cdot T_{i+1}}{T_i + T_{i+1}}$$

$G_{01}^{(1)}$	$G_{12}^{(1)}$	$G_{23}^{(1)}$	$G_{34}^{(1)}$	$G_{45}^{(1)}$	$G_{56}^{(1)}$
$2,8 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$	$1,65 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$	$2,02 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$	$2,07 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$	$2,12 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$	$4,3 \cdot 10^{-3} \frac{m^2}{s}$

Für die einzelnen Knotenpunkte des quantisierten Schemas ergeben sich folgende Bilanzgleichungen:

$$\mathbf{Knoten\ 1:} \quad (z_{R1} - z_{R0})G_{01} + (z_{R1} - z_{R2})G_{12} = -w_0 \cdot 0,01km^2$$

$$\mathbf{Knoten\ 2:} \quad (z_{R2} - z_{R1})G_{12} + (z_{R2} - z_{R3})G_{23} = -w_0 \cdot 0,01km^2$$

$$\mathbf{Knoten\ 3:} \quad (z_{R3} - z_{R2})G_{23} + (z_{R3} - z_{R4})G_{34} = -w_0 \cdot 0,01km^2$$

$$\mathbf{Knoten\ 4:} \quad (z_{R4} - z_{R3})G_{34} + (z_{R4} - z_{R5})G_{45} = -w_0 \cdot 0,01km^2$$

$$\mathbf{Knoten\ 5:} \quad (z_{R5} - z_{R4})G_{45} + (z_{R5} - z_{R6})G_{56} = -w_0 \cdot 0,01km^2$$

bzw. nach den Wasserständen geordnet und die Randbedingungen eingeführt

$$z_{R0} = 3m$$

$$z_{R6} = 7m$$

$$\mathbf{Knoten\ 1:} \quad z_{R1}(G_{10} + G_{12}) + z_{R2}(-G_{12}) = -0,06 \frac{l}{s} + 3m \cdot G_{10}$$

$$\mathbf{Knoten\ 2:} \quad z_{R1}(-G_{12}) + z_{R2}(G_{12} + G_{23}) + z_{R3}(-G_{23}) = -0,06 \frac{l}{s}$$

$$\mathbf{Knoten\ 3:} \quad z_{R2}(-G_{23}) + z_{R3}(G_{23} + G_{34}) + z_{R4}(-G_{34}) = -0,06 \frac{l}{s}$$

$$\mathbf{Knoten\ 4:} \quad z_{R3}(-G_{34}) + z_{R4}(G_{34} + G_{45}) + z_{R5}(-G_{45}) = -0,06 \frac{l}{s}$$

$$\mathbf{Knoten\ 5:} \quad z_{R4}(-G_{45}) + z_{R5}(G_{45} + G_{56}) = -0,06 \frac{l}{s} + 7m \cdot G_{56}$$

$$\mathbf{G \cdot Z = R}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} G_{10} \\ +G_{12} \end{pmatrix} & -G_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -G_{12} & \begin{pmatrix} G_{12} \\ +G_{23} \end{pmatrix} & -G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -G_{23} & \begin{pmatrix} G_{23} \\ +G_{34} \end{pmatrix} & -G_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -G_{34} & \begin{pmatrix} G_{34} \\ +G_{45} \end{pmatrix} & -G_{45} \\ 0 & 0 & 0 & -G_{45} & \begin{pmatrix} G_{45} \\ +G_{56} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \\ z_{R3} \\ z_{R4} \\ z_{R5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -0,06 \frac{l}{s} + 3m \cdot G_{10} \\ -0,06 \frac{l}{s} \\ -0,06 \frac{l}{s} \\ -0,06 \frac{l}{s} \\ -0,06 \frac{l}{s} + 7m \cdot G_{56} \end{bmatrix}$$

Das so entstandene Gleichungssystem besteht aus fünf Zeilen und enthält fünf Unbekannte. Damit ist es eindeutig lösbar. Für die Lösung solcher Gleichungssysteme können alle bekannten Methoden benutzt werden. Dabei können die Gesamtschrittverfahren und Iterationsverfahren eingesetzt werden. Da die Koeffizientenmatrix nur aus drei Diagonalen besteht, die außerdem noch symmetrisch sind, können besondere Verfahren für solche Systeme benutzt werden.

Das GAUSSsche Eliminationsverfahren, das zu den universellen Einschrittverfahren gehört, beruht darauf, dass versucht wird, durch sukzessives Einsetzen aus den n Gleichungen mit n Unbekannten, **eine** Gleichung mit **einer** Unbekannten zu machen. Diese kann dann gelöst werden. Durch rückwärtiges Einsetzen werden die anderen Unbekannten bestimmt. In Matrixschreibweise bedeutet dies, dass aus der vollständigen Koeffizientenmatrix eine Dreiecksmatrix erzeugt wird, die dann von unten heraus gelöst werden kann.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{nn-1} & a_{nn} & a_{nn+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{kk-1} & a_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \\ \vdots \\ z_{Rn} \\ \vdots \\ z_{Rk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$$

Nach Umformung erhält man die neue Koeffizientenmatrix (a') mit einer neuen rechten Seite (b'):

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a'_{nn} & a'_{nn+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'_{kk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{R1} \\ z_{R2} \\ \vdots \\ z_{Rn} \\ \vdots \\ z_{Rk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \\ \vdots \\ b'_k \end{bmatrix}$$

Zu dieser Dreiecksform kommt man, indem die $(n - 1)$ -te Zeile nach z_{Rn-1} aufgelöst und in der (n) -ten Zeile eingesetzt wird.

Für die zweite Zeile heißt dies:

$$a_{11}z_{R1} + a_{12}z_{R2} = b_1$$

Daheraus ergibt sich z_{R1} zu:

$$z_{R1} = \frac{b_1 - a_{12} z_{R2}}{a_{11}}$$

Damit erhält die zweite Zeile

$$a_{21} z_{R1} + a_{22} z_{R2} + a_{23} z_{R3} = b_2$$

die Form:

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \right) z_{R2} + a_{23}z_{R3} = b_2 - \frac{a_{21}b_1}{a_{11}}$$

bzw. zusammengefaßt:

$$a_{22'}z_{R2} + a_{23}z_{R3} = b_{2'}$$

Dieser Vorgang wird analog für alle weiteren Zeilen und Unbekannten durchgeführt. Für die letzte Zeile erhält man:

$a_{56}^{(5)} \cdot z_{R5} = b_5^{(5)}$ Diese Gleichung ist für z_{R5} lösbar. Danach können dann z_{R4} , z_{R3} , z_{R2} und z_{R1} gelöst werden. Damit hat man eine erste Näherung der Lage der freien Grundwasseroberfläche $z_R^{(x)}$. Da die Transmissibilität eine Funktion der Grundwasserhöhe ist, muss nun diese für die Quantisierungspunkte neu berechnet werden. Somit ändern sich auch die Leitwerte G_i und es entsteht ein Gleichungssystem mit geänderten Koeffizienten, welches auf die beschriebene Art und Weise zu lösen ist. Dieser Iterationsprozess muss solange fortgesetzt werden, bis die Änderung zwischen zwei aufeinander folgenden iterativen Lösungen kleiner als eine vorgegebene Schranke $|z_{Ri}^{(1)} - z_{Ri}^{(1+1)}| < \varepsilon$ ist.

Nach drei Iterationen ergeben sich folgende Wasserstände:

Quantisierungspunkt	z_{R0}	$z_{R1}^{(3)}$	$z_{R2}^{(3)}$	$z_{R3}^{(3)}$	$z_{R4}^{(3)}$	$z_{R5}^{(3)}$	z_{R6}
Wasserhöhe nach 3. Iteration	3m	3,55m	4,51m	5,25m	5,94m	6,64m	7m

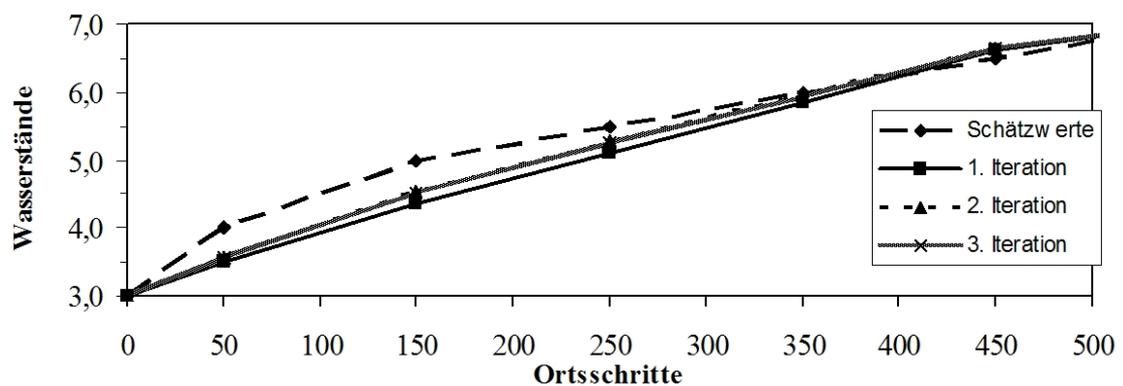


Abbildung 3.8: Iterationsverhalten des Wasserstandes

Weitere Lösungsmethoden sind im Teil I des Scriptes im Kapitel "Lösung von Gleichungssystemen" aufgeführt.

Die gesuchten Volumenströme ergeben sich aus:

$$\dot{V}_0 = (z_{R0} - z_{R1}) \cdot G_1 = (3m - z_{R1}) \cdot G_1$$

$$\dot{V}_0 = 1,25 \frac{l}{s}$$

$$\dot{V}_7 = (z_{R5} - z_{R6}) \cdot G_5 = (z_{R5} - 7m) \cdot G_5$$

$$\dot{V}_7 = -1,56 \frac{l}{s}$$

• zu Aufgabe 2 (s. S. 308)

Die Modellbildung wird hier in zwei Schritte unterteilt. Der erste Schritt ist die örtliche Quantisierung, wie sie auch beim stationären Fall (siehe Lösung zu Aufgabe 1 (s. S. 312) durchgeführt wurde. Im Gegensatz zur stationären muss bei der instationären Strömung die Speicherinhaltsänderung in die Bilanzgleichung mit einbezogen werden. Die Speicherwirkung des Grundwasserleiters wird als Kondensator im Blockschaltbild dargestellt (siehe Abbildung 3.9).

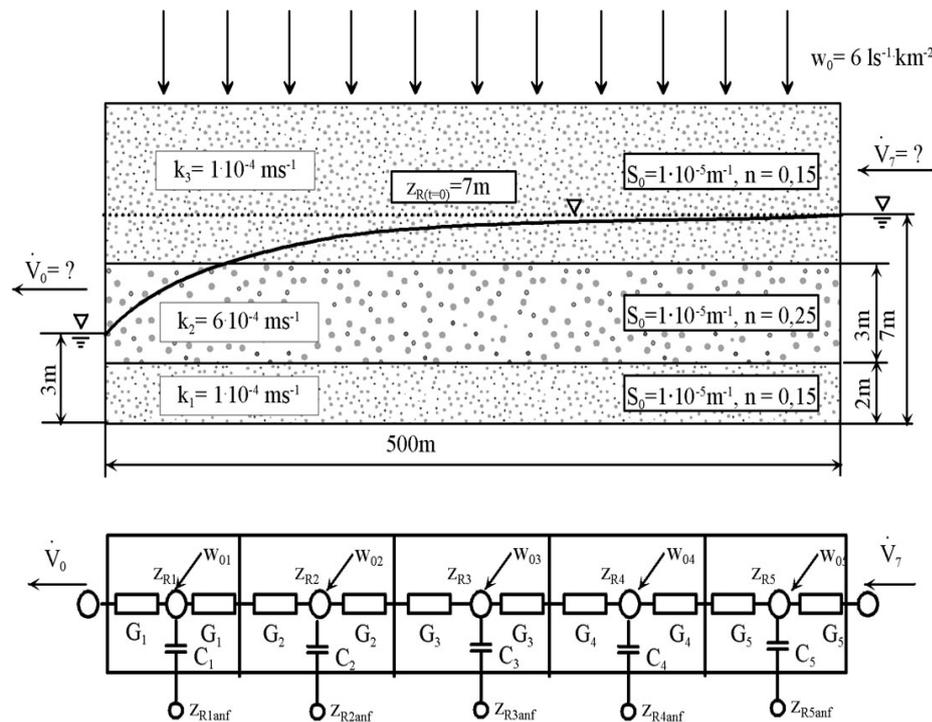


Abbildung 3.9: Quantisierter Grundwasserleiter mit Speicherkapazitäten

Die Wassermenge, die infolge des Speicherverhaltens des Grundwasserleiters ausgetauscht wird, ergibt sich zu:

$\dot{V}_{Zeit} = S \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{dz_R}{dt}$ Der Speicherkoeffizient S repräsentiert die summarische Speicherwirkung über die Höhe z von der undurchlässigen Sohle bis zur freien Grundwasseroberfläche bei den hier vorliegenden ungespannten Grundwasserhältnissen. Innerhalb des gesättigten Bereiches des Strömungsfeldes ($a < z < z_R$) gilt auf Grund der elastischen Speicherwirkung:

$$S = S_{0i} \cdot M_i$$

An der freien Grundwasseroberfläche ($z = z_R$) wirkt die gravimetrische Speicherung mit dem Wert $S = n_0$. Da sich beide Werte in dieser Aufgabenstellung (n_0 und S_0) um den Faktor 10^{-4} unterscheiden und andererseits die Mächtigkeit nur wenige Meter beträgt, kann man annehmen, dass $S \approx n_0$ ist. Damit ergibt sich die Kapazität am Knoten i in Abhängigkeit

des Wasserstandes von der Schichthöhe j zu:

$$C_i = S_{ij} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

Für die einzelnen Knotenpunkte des quantisierten Schemas ergeben sich folgende Bilanzgleichungen:

$$\textbf{Knoten 1:} (z_{R1} - z_{R0})G_{01} + (z_{R1} - z_{R2})G_{12} + C_1 \frac{dz_R}{dt} + w_0 \cdot 0,01km^2 = 0$$

$$\textbf{Knoten 2:} (z_{R2} - z_{R1})G_{12} + (z_{R2} - z_{R3})G_{23} + C_2 \frac{dz_R}{dt} + w_0 \cdot 0,01km^2 = 0$$

$$\textbf{Knoten 3:} (z_{R3} - z_{R2})G_{23} + (z_{R3} - z_{R4})G_{34} + C_3 \frac{dz_R}{dt} + w_0 \cdot 0,01km^2 = 0$$

$$\textbf{Knoten 4:} (z_{R4} - z_{R3})G_{34} + (z_{R4} - z_{R5})G_{45} + C_4 \frac{dz_R}{dt} + w_0 \cdot 0,01km^2 = 0$$

$$\textbf{Knoten 5:} (z_{R5} - z_{R4})G_{45} + (z_{R5} - z_{R6})G_{56} + C_5 \frac{dz_R}{dt} + w_0 \cdot 0,01km^2 = 0$$

Der zeitliche Differentialquotient muss in einen Differenzenquotienten überführt werden, da sonst keine einfache numerische Behandlung möglich ist. Nur durch diese Überführung ist der Aufbau eines entsprechenden Gleichungssystems wieder möglich. Für die Überführung des Differentialquotienten in einen Differenzenquotienten soll als erste Methode die Rückwärtsdifferenz als implizites Verfahren benutzt werden. Dabei wird

$$\frac{dz_R}{dt} \approx \frac{z_{Rt} - z_{Rt-\Delta t}}{\Delta t}$$

gesetzt (siehe Abbildung 3.10).

Damit lautet der Volumestromanteil, der die Speicherwirkung repräsentiert, jetzt

$$\dot{V}_{Zeit} = S \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \frac{(z_{Rt} - z_{Rt-\Delta t})}{\Delta t}$$

Mit der Einführung des so genannten Zeitleitwertes

$$G_{zi} = \frac{S_i \cdot \Delta x_i \cdot \Delta y_i}{\Delta t}$$

wird der Volumenstrom zu:

$$\dot{V}_{Zeit} = G_{zi} \cdot (z_{Rit} - z_{Rit-\Delta t})$$

Dieser repräsentiert die Wassermenge, die infolge der Speicherwirkung vom Grundwasserleiter innerhalb des Zeitschrittes Δt abgegeben oder gespeichert wird. Infolge der Einführung des zeitlichen Differenzenquotienten muss auch der örtliche Strömungsanteil, d.h.

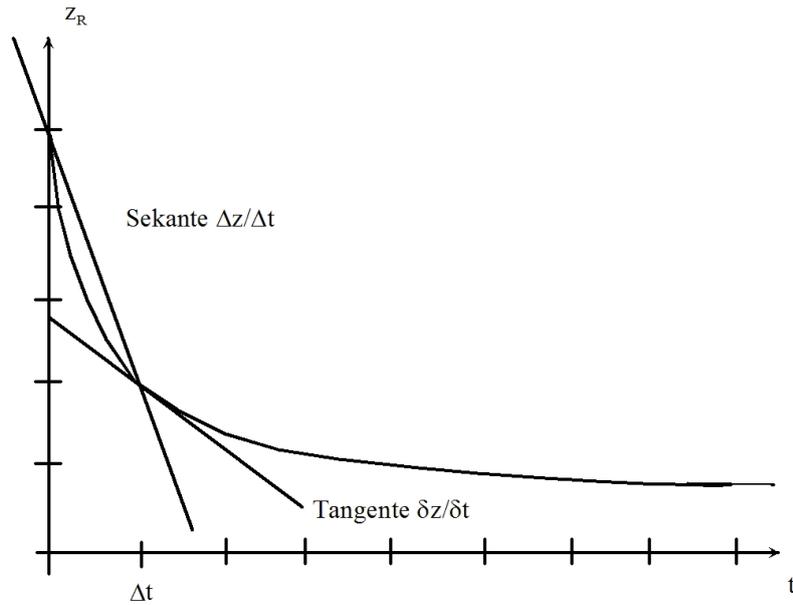


Abbildung 3.10: Verlauf eines Absenkungsvorgangs

die linke Seite der Gleichung, einem Zeitpunkt, bei der Rückwärtsdifferenz dem Zeitpunkt t , zugeordnet werden. Damit erhalten die Knotenpunktgleichungen folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \text{Knoten 1: } & (z_{R1} - z_{R0})_t \cdot G_{01t} + (z_{R1} - z_{R2})_t \cdot G_{12t} + (z_{R1t} - z_{R1t-\Delta t}) \cdot G_{z1t} \\ & = -w_0 \cdot 0,01 \text{ km}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Knoten 2: } & (z_{R2} - z_{R1})_t \cdot G_{12t} + (z_{R2} - z_{R3})_t \cdot G_{23t} + (z_{R2t} - z_{R2t-\Delta t}) \cdot G_{z2t} \\ & = -w_0 \cdot 0,01 \text{ km}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Knoten 3: } & (z_{R3} - z_{R2})_t \cdot G_{23t} + (z_{R3} - z_{R4})_t \cdot G_{34t} + (z_{R3t} - z_{R3t-\Delta t}) \cdot G_{z3t} \\ & = -w_0 \cdot 0,01 \text{ km}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Knoten 4: } & (z_{R4} - z_{R3})_t \cdot G_{34t} + (z_{R4} - z_{R5})_t \cdot G_{45t} + (z_{R4t} - z_{R4t-\Delta t}) \cdot G_{z4t} \\ & = -w_0 \cdot 0,01 \text{ km}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Knoten 5: } & (z_{R5} - z_{R4})_t \cdot G_{45t} + (z_{R5} - z_{R6})_t \cdot G_{56t} + (z_{R5t} - z_{R5t-\Delta t}) \cdot G_{z5t} \\ & = -w_0 \cdot 0,01 \text{ km}^2 \end{aligned}$$

Die Matrixgleichung für das in fünf Elemente geteilte Strömungsfeld lautet somit:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} G_{01t} \\ +G_{12t} \\ +G_{z1t} \end{pmatrix} & -G_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -G_{12} & \begin{pmatrix} G_{12t} \\ +G_{23t} \\ +G_{z2t} \end{pmatrix} & -G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -G_{23} & \begin{pmatrix} G_{23t} \\ +G_{34t} \\ +G_{z3t} \end{pmatrix} & -G_{34} & 0 \\ 0 & 0 & -G_{34} & \begin{pmatrix} G_{34t} \\ +G_{45t} \\ +G_{z4t} \end{pmatrix} & -G_{45} \\ 0 & 0 & 0 & -G_{45} & \begin{pmatrix} G_{45t} \\ +G_{56t} \\ +G_{z5t} \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} z_{R1t} \\ z_{R2t} \\ z_{R3t} \\ z_{R4t} \\ z_{R5t} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} -0,06 \frac{l}{s} + 3m \cdot G_{01t} - G_{z1t} \cdot z_{R1t-\Delta t} \\ -0,06 \frac{l}{s} - G_{z2t} \cdot z_{R2t-\Delta t} \\ -0,06 \frac{l}{s} - G_{z3t} \cdot z_{R3t-\Delta t} \\ -0,06 \frac{l}{s} - G_{z4t} \cdot z_{R4t-\Delta t} \\ -0,06 \frac{l}{s} + 7m \cdot G_{56t} - G_{z5t} \cdot z_{R5t-\Delta t} \end{bmatrix}$$

Die so entstandene Matrixgleichung ist auf Grund der Potentialabhängigkeit der Leitwerte nicht explizit lösbar. Wie bei der Lösung zu Aufgabe 1 (s. S. 312) müssen wieder die Lösungen iterativ herbeigeführt werden. Im ersten Schritt werden die Leitwerte $G_i^{(1)}$ entsprechend den Anfangswasserhöhen ($z_{Rt-\Delta t}$) berechnet. Die Gleichungen zu deren Berechnung können aus der Lösung der Aufgabe 1 (s. S. 312) übernommen werden. Der Unterschied besteht aber darin, dass diesmal keine geschätzten Wasserhöhen für die Berechnung der Transmissibilitäten benutzt werden, sondern für den ersten Zeitschritt die Anfangswasserhöhen (laut Aufgabenstellung z_{R1} bis $z_{R6} = 7m$), für die weiteren Zeitschritte jeweils die Wasserhöhen des vorhergehenden Zeitschrittes.

Man spricht in diesem Zusammenhang von einer äußeren und einer inneren Iteration. Die innere Iteration kennzeichnet die Berechnung der nichtlinearen Koeffizienten des Gleichungssystems auf Grund des nichtlinearen Verhaltens der Transmissibilität. Die äußere Iteration berechnet die Nichtlinearität auf Grund des impliziten Verhaltens der verwendeten Rückwärtsdifferenz.

Für Grundwasserabsenkungsvorgänge bedeutet dies, dass die Transmissibilität und damit auch die Leitwerte zu groß angenommen werden. Die Matrix lässt sich mit diesen Werten lösen, und man erhält eine Wasserhöhe $z_{Rit}^{(1)}$, die gegenüber der wahren Lage zu niedrig ist. Mit dieser ersten Näherung $z_{Rit}^{(1)}$ können verbesserte Leitwerte $G_{it}^{(2)}$ berechnet werden. Sie führen zu einer zweiten Näherung der Wasserhöhe $z_{Rit}^{(2)}$, welche über der wahren Lösung liegt, da die Leitwerte zu klein angenommen wurden und damit zu wenig Abfluss realisiert wurde. Die Näherungslösungen nähern sich der wahren Lösung in Form einer gedämpften Schwingung an. Dieser Iterationsprozess wird so lange durchgeführt, bis die Änderungen zwischen zwei Iterationen eine Fehlerschranke nicht mehr überschreiten. Dann erhält man die Lösung für den Zeitschritt Δt . Trotz der Iteration innerhalb des Zeitschrittes bleibt ein Quantisierungsfehler erhalten. Er wächst proportional mit Δt , da anstatt der Tangente im Punkt t die Sekante zwischen den Punkten t und $t - \Delta t$ berechnet wird. Da sich die Grundwasserströmungsprozesse entsprechend einer abklingenden e -Funktion asymptotisch dem stationären Endzustand nähern, ist der Zeitquantisierungsfehler nicht nur von der Schrittweite Δt , sondern auch von der Dynamik des Prozesses abhängig.

Die nachfolgende Tabelle enthält die Ergebnisse für die quantisierten Zeitschritte und Abbildung 3.11 deren grafische Darstellung.

Zeitpunkt in Tagen	z_{R0}	z_{R1}	z_{R2}	z_{R3}	z_{R4}	z_{R5}	z_{R6}
0,00	3,00	7,00	7,00	7,00	7,00	7,00	7,00
0,25	3,00	6,77	6,99	7,00	7,00	7,00	7,00
0,67	3,00	6,44	6,97	7,00	7,00	7,00	7,00
1,29	3,00	6,04	6,90	6,99	6,99	7,00	7,00
2,54	3,00	5,49	6,74	6,96	6,99	6,99	7,00
5,00	3,00	4,87	6,41	6,85	6,95	6,98	7,00
10,00	3,00	4,48	5,97	6,60	6,85	6,96	7,00
15,00	3,00	4,24	5,66	6,37	6,73	6,92	7,00
30,00	3,00	3,94	5,18	5,93	6,45	6,82	7,00
50,00	3,00	3,77	4,92	5,64	6,23	6,75	7,00
100,00	3,00	3,78	4,93	5,64	6,23	6,74	7,00
stationär	3,00	3,55	4,51	5,25	5,94	6,64	7,00

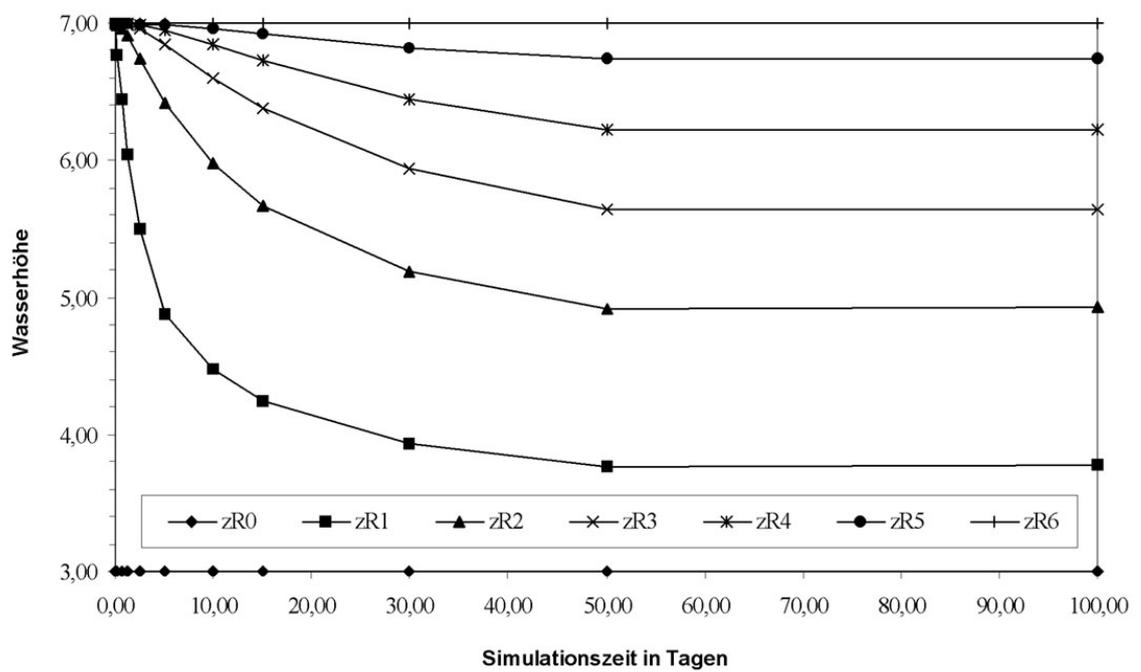


Abbildung 3.11: Wasserstand in Abhängigkeit von Zeit und Ort

• zu Aufgabe 3 (s. S. 308)

Bei dem stationärem Fall kann davon ausgegangen werden, dass der gesamte Betrag des Hangzuflusses durch alle Elemente des Grundwasserleiters, d.h. durch alle quantisierten Leitwerte fließen muss. Dieser Volumenstrom \dot{V}_H ergibt sich aus dem spezifischen Volumenstrom q multipliziert mit der senkrecht durchflossenen Fläche A .

$$\dot{V}_H = q \cdot A$$

Da die Grundwasserstandsänderungen zu ermitteln sind, ist es zweckmäßig, die Wasserstände mit (z_{RnM}) und ohne (z_{RnO}) Tunneleinbau zu berechnen. Durch den Tunneleinbau wird ein stellenweiser Wechsel zwischen gespanntem und ungespanntem Grundwasserleiter verursacht (siehe Abbildung 3.12).

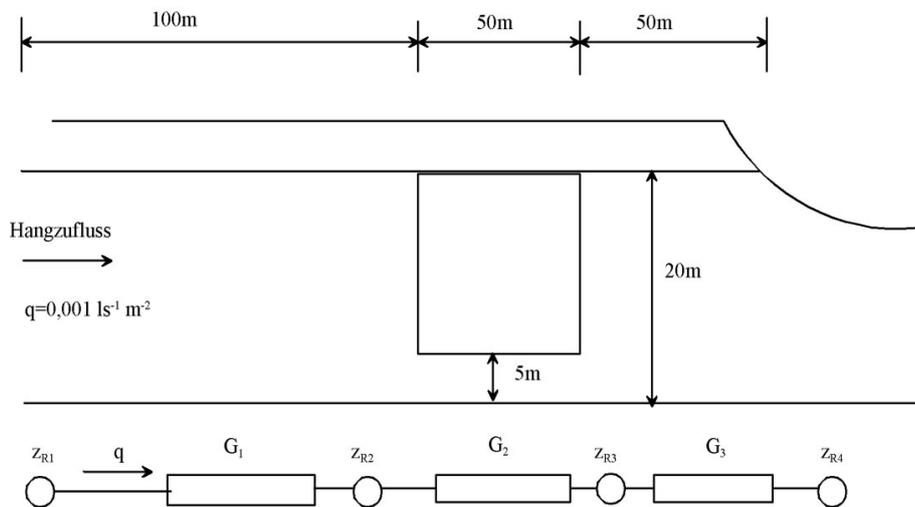


Abbildung 3.12: Schematisierung des Grundwasserleiters mit Tunneleinbau

Die Differenz der Wasserstände zwischen zwei Knoten wird bei dem betrachteten stationären Fließprozess durch den fließenden Volumenstrom \dot{V}_H und den wirksamen Leitwert bestimmt.

$$(z_{Rn} - z_{Rn-1}) = \dot{V}_H$$

Grundwasserstände	
ohne Tunneleinbau	mit Tunneleinbau
$z_{R4O} = \text{const.}$	$z_{R4M} = \text{const.}$
$z_{R3O} = z_{R4O} + \frac{\dot{V}_H}{G_{3O}}$	$z_{R3M} = z_{R4M} + \frac{\dot{V}_H}{G_{3M}}$
$z_{R2O} = z_{R3O} + \frac{\dot{V}_H}{G_{2O}}$	$z_{R2M} = z_{R3M} + \frac{\dot{V}_H}{G_{2M}}$
$z_{R1O} = z_{R2O} + \frac{\dot{V}_H}{G_{1O}}$	$z_{R1M} = z_{R2M} + \frac{\dot{V}_H}{G_{1M}}$

Allgemein kann angenommen werden, dass in dieser Aufgabenstellung ein ungeschichteter Grundwasserleiter vorliegt. Unter Beachtung, dass sowohl gespannte als auch ungespannte Strömungsverhältnisse auftreten können, werden die hydraulischen Leitwerte wie folgt berechnet. Gleichzeitig soll die Breite entsprechend des Quantisierungsschemas möglichst groß gewählt werden (z. B. 100m):

$$G = \frac{k \cdot D \cdot b}{l} = \frac{T \cdot b}{l}$$

Zwischen den Quantisierungspunkten soll in erster Näherung eine ortsunabhängige Transmissibilität herrschen.

$$G_n = \frac{k \cdot D_n \cdot b}{l_n} = \frac{T_n \cdot b}{l_n}$$

Hydraulische Leitwerte		
ohne Tunneleinbau		mit Tunneleinbau
$G_{3O} = \frac{k \cdot z_{R3O} \cdot b}{l_3}$		$G_{3M} = \frac{k \cdot z_{R3M} \cdot b}{l_3}$
$D = z_{R2O}$	Übergang zu gespannten Strömungsverhältnissen	$D = M_{2M}$
$G_{2O} = \frac{k \cdot z_{R2O} \cdot b}{l_2}$		$G_{2M} = \frac{k \cdot M_{2M} \cdot b}{l_2}$
$G_{1O} = \frac{k \cdot z_{R1O} \cdot b}{l_1}$		$G_{1M} = \frac{k \cdot z_{R1M} \cdot b}{l_1}$

Aus diesen Beziehungen sieht man, dass auf alle Fälle gilt:

$$G_{3O} = G_{3M}$$

da $z_{R2O} = 4 \cdot M_{2M}$ ist, gilt:

$$G_{2O} = 4 \cdot G_{2M}$$

Daraus ist zu erkennen, dass der Leitwert G_{2M} (mit Tunneleinbau) viermal kleiner als G_{2O} (ohne Tunneleinbau) ist.

Für den Fall, dass die Grundwasserstandsänderung

$$\Delta z_{Rn} = |z_{RnO} - z_{RnM}| \ll z_{RnO}$$

ist, gilt:

$$G_{1O} \approx G_{1M}$$

Für eine genauere Berechnung sollte der T -Wert aus dem harmonischen Mittel der T -Werte an den Knoten berechnet werden:

$$G_{n,n+1} = \frac{T_n \cdot T_{n+1} \cdot b}{(T_n + T_{n+1}) \cdot l_n}$$

Damit und unter der Voraussetzung, dass $\Delta z_{R4} = 0$ (RB 1. Art) lassen sich folgende Grundwasserstandsänderungen berechnen:

$$\begin{aligned} z_{R3M} &= z_{R4M} + \frac{\dot{V}}{G_{3M}} \\ z_{R3M} &= z_{R4O} + \Delta z_{R4} + \frac{\dot{V}}{G_{3O}} \\ -z_{R3O} &= -z_{R4O} - \frac{\dot{V}_H}{G_{3O}} \\ \Delta z_{R3} &= z_{R3M} - z_{R3O} = 0 \\ z_{R3M} &= z_{R3O} \end{aligned}$$

$$z_{R2M} = z_{R3M} + \frac{\dot{V}}{G_{2M}}$$

$$z_{R2M} = z_{R3O} + \Delta z_{R3} + \frac{\dot{V} \cdot 4}{G_{2M}}$$

$$-z_{R2O} = -z_{R3O} - \frac{\dot{V}_H}{G_{2O}}$$

$$\Delta z_{R2} = z_{R2M} - z_{R2O}$$

$$= \dot{V}_H \frac{3}{G_{2O}}$$

$$\Delta z_{R2} = q \cdot A \cdot \frac{3}{G_{2O}}$$

$$z_{R1M} = z_{R2M} + \frac{\dot{V}}{G_{1M}}$$

$$z_{R1M} = z_{R2O} + \Delta z_{R2} + \frac{\dot{V}}{G_{1O}}$$

$$-z_{R1O} = -z_{R2O} - \frac{\dot{V}_H}{G_{1O}}$$

$$\Delta z_{R1} = z_{R1M} - z_{R1O}$$

$$\Delta z_{R1} = \Delta z_{R2}$$

$$\begin{aligned} G_{20} &= \frac{k \cdot z_{R2O} \cdot b}{l_2} \\ &= \frac{10^{-4}m \cdot 20m \cdot 100m}{s \cdot 50m} \end{aligned}$$

$$G_{20} = 4 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$$

$$\begin{aligned}\Delta z_{R2} &= \frac{q \cdot A \cdot 3}{G_{20}} \\ &= \frac{10^{-6} m^3 \cdot 20m \cdot 100m \cdot 3 \cdot s}{s \cdot m^2 \cdot 4 \cdot 10^{-3} m^2}\end{aligned}$$

$$\Delta z_{R2} = 1,5m$$

Damit entsteht durch den Hangzufluss von $q = 10^{-6} \frac{m^3}{s \cdot m^2}$ ein Aufstau an den Punkten z_{R2} und z_{R1} um jeweils $1,5m$.

- zu Aufgabe 4 (s. S. 308)

(a)

Ein einfaches Quantisierungsschema für die Untersuchung zur Durchströmung des Deiches enthält für jedes Element mindestens einen Strömungswiderstand (hydraulischen Leitwert).

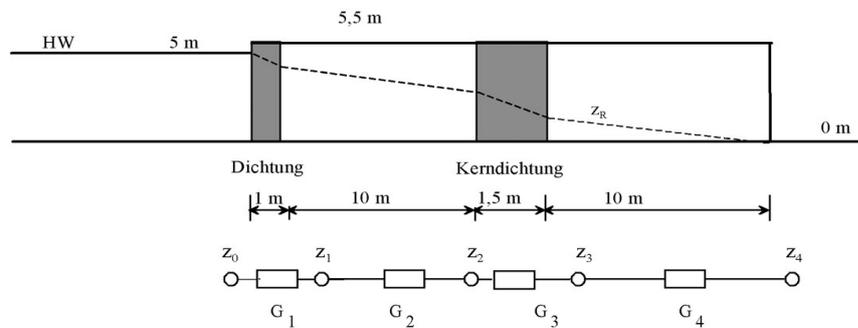


Abbildung 3.13: Deich mit Kerndichtung und Quantisierungsschema

(b)

Für den stationären Fall genügt die Betrachtung der Leitwerte, da in diesem Zeitabschnitt die innerhalb des Deiches strömende Wassermenge zeitlich konstant ist. Somit treten keine Boden- oder Entwässerungseffekte auf. Für die Berechnung dieser Kette gelten folgende Gleichungen:

$$\dot{V} = (z_0 - z_1)G_1$$

$$\dot{V} = (z_1 - z_2)G_2$$

$$\dot{V} = (z_2 - z_3)G_3$$

$$\dot{V} = (z_3 - z_4)G_4$$

z_0 und z_4 wirken als Randbedingungen, d.h. deren Werte sind unabhängig vom Strömungszustand innerhalb des Deiches.

$$z_{R0} = 5m$$

$$z_{R4} = 0m$$

Die Leitwerte berechnen sich wie folgt:

$$G_n = k_n \cdot \frac{z_{Rn} \cdot b}{l_n}$$

Da die Werte pro Meter Deichlänge zu berechnen sind, wird $b = 1m$ gesetzt. z_{Rn} ist zu Beginn der Rechnung nicht bekannt. Deshalb muss mit einem fiktiven Mittelwert bei der T -Wert-Bestimmung gerechnet werden. Dieser ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel zwischen den beiden Randbedingungen.

$$z_{Rn}^{(1)} = \frac{z_{R0} + z_{R4}}{2}$$

$$z_{Rn}^{(1)} = 2,5m$$

Damit ist:

$$G_1^{(1)} = k_1 \cdot \frac{z_{R1} \cdot b}{l_1} = \frac{10^{-5} \frac{m}{s} \cdot 2,5m \cdot 1m}{1m} = 2,5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

$$G_2^{(1)} = k_2 \cdot \frac{z_{R2} \cdot b}{l_2} = \frac{10^{-4} \frac{m}{s} \cdot 2,5m \cdot 1m}{10m} = 2,5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

$$G_3^{(1)} = k_3 \cdot \frac{z_{R3} \cdot b}{l_3} = \frac{10^{-5} \frac{m}{s} \cdot 2,5m \cdot 1m}{1,5m} = 1,7 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

$$G_4^{(1)} = k_4 \cdot \frac{z_{R4} \cdot b}{l_4} = \frac{10^{-4} \frac{m}{s} \cdot 2,5m \cdot 1m}{10m} = 2,5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$$

Generell gilt:

$$R_n = \frac{1}{G_n}$$

$$Q = q \cdot A = \dot{V}$$

Die Gesamtwassermenge \dot{V} , die pro Meter Deichlänge während des stationären Zustandes in den Polder fließt, ergibt sich:

$$z_{R3} = z_{R4} + R_4 \cdot \dot{V} = R_4 \cdot \dot{V}$$

$$z_{R2} = z_{R3} + R_3 \cdot \dot{V} = R_4 \cdot \dot{V} + R_3 \cdot \dot{V}$$

$$z_{R1} = z_{R2} + R_2 \cdot \dot{V} = R_4 \cdot \dot{V} + R_3 \cdot \dot{V} + R_2 \cdot \dot{V}$$

$$z_{R0} = z_{R1} + R_1 \cdot \dot{V} = R_4 \cdot \dot{V} + R_3 \cdot \dot{V} + R_2 \cdot \dot{V} + R_1 \cdot \dot{V} = 5m$$

$$\begin{aligned} \dot{V}^{(1)} &= \frac{5m}{R_4 + R_3 + R_2 + R_1} = \frac{5m}{(4 + 5,9 + 4 + 4) \cdot 10^{+4} \frac{s}{m^2}} \\ &\approx 0,028 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s} = 28 \frac{l}{s} \end{aligned}$$

Das Ergebnis kann man auch schneller erhalten, wenn man die Gesetze der Reihenschaltung von Widerständen und das dynamische Grundgesetz benutzt. Danach addieren sich in Reihe geschaltete Widerstände, und der durchfließende Volumenstrom ist proportional zu dem Potentialabbau (Potentialdifferenz) über dem Widerstand und indirekt proportional zu dessen Wert.

Dieser berechnete Volumenstrom stellt eine erste Näherung dar, da mit geschätzten T -Werten gearbeitet wurde. Setzt man diesen \dot{V} -Wert in die Gleichungen ein, so erhält man verbesserte $z_{Rn}^{(i)}$ -Werte, die auch wieder zu verbesserten T - und \dot{V} -Werten führen.

$$z_{R3}^{(2)} = z_{R4} + R_4 \cdot V = \frac{0,028 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}}{2,5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}}$$

$$= 1,12m$$

$$z_{R2}^{(2)} = z_{R3}^{(2)} + R_3 \cdot V = R_4 \cdot \dot{V} + R_3 \cdot \dot{V} = 1,12m + \frac{0,028 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}}{1,7 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}}$$

$$= 2,76m$$

$$z_{R1}^{(2)} = z_{R2}^{(2)} + R_2 \cdot V = R_4 \cdot \dot{V} + R_3 \cdot \dot{V} + R_2 \cdot \dot{V} = 2,76m + \frac{0,028 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}}{2,5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}}$$

$$= 3,88m$$

$$z_{R0}^{(2)} = z_{R1}^{(2)} + R_1 \cdot V = R_4 \cdot \dot{V} + R_3 \cdot \dot{V} + R_2 \cdot \dot{V} + R_1 \cdot \dot{V}$$

$$= 5,00m$$

$$\begin{aligned} \dot{V}^{(2)} &= \frac{5m}{R_4^{(2)} + R_3^{(2)} + R_2^{(2)} + R_1^{(2)}} \\ &= \frac{5m}{(17,85 + 7,60 + 3,00 + 2,25) \cdot 10^{+4} \frac{s}{m^2}} \\ &= 32,6 \frac{l}{s} \end{aligned}$$

Man sieht, dass dieser Wert um ca. 13% höher als der der ersten Iteration ist. Dieser höhere Wert wird aber wieder zu groß sein, so dass eine oszillierende Anpassung erfolgt. Die Berechnung von z_{R0} erfolgte zur Kontrolle und es ergibt sich richtigerweise der Wert des Oberwassers als Randbedingung.

- zu Aufgabe 5 (s. S. 308)

(a)

Die Quantisierung erfolgt an Hand der vorgegebenen Geometrie. Zu beachten ist, dass ein Knoten zur Nachbildung der unendlichen Ausdehnung des Grundwasserleiters in der flussabgewandten Seite erfolgt. Die instationären Speichervorgänge werden durch entsprechend angeordnete Kapazitäten realisiert.

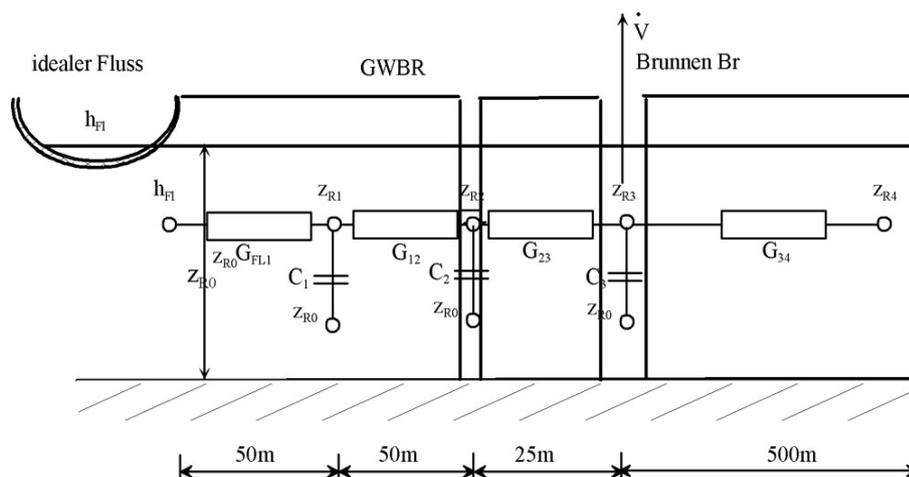


Abbildung 3.14: Darstellung des quantisierten Grundwasserleiters

(b)

$$\text{Knoten 1} \quad : (z_{R1} - h_{Fl}) \cdot G_{FL1} + (z_{R1} - z_{R2}) \cdot G_{12} + C_1 \frac{\partial z_{R1}}{\partial t} = 0$$

$$\text{Knoten 2} \quad : (z_{R2} - z_{R1}) \cdot G_{12} + (z_{R2} - z_{R3}) \cdot G_{23} + C_2 \frac{\partial z_{R2}}{\partial t} = 0$$

$$\text{Knoten 3} \quad : (z_{R3} - z_{R2}) \cdot G_{23} + (z_{R3} - z_{R4}) \cdot G_{34} + C_3 \frac{\partial z_{R3}}{\partial t} = \dot{V}$$

bzw. nach Wasserständen geordnet und unter Einführung des Zeitleitwertes ergibt sich:

$$G_{Zn} = C_n \frac{z_{Rnt} - z_{Rnt-\Delta t}}{\Delta t}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Knoten 1} & : z_{R1t} \cdot (G_{F11} + G_{12} + G_{Z1}) + z_{R2t} \cdot (-G_{23}) \\ & = h_{Fl} \cdot G_{F11} + z_{R1t-\Delta t} \cdot G_{Z1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Knoten 2} & : z_{R1t} \cdot (-G_{12}) + z_{R2t} \cdot (G_{12} + G_{23}) + G_{Z2} + z_{R3t} \cdot (-G_{23}) \\ & = z_{R2t-\Delta t} \cdot G_{Z2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Knoten 3} & : z_{R2t} \cdot (-G_{23}) + z_{R3t} \cdot (G_{23} + G_{34} + G_{Z3}) \\ & = z_{R4t} \cdot G_{34} + z_{R3t-\Delta t} \cdot G_{Z3} + \dot{V} \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (G_{F11} + G_{12} + G_{Z1}) & -G_{23} & 0 \\ -G_{12} & G_{12} + G_{23} + G_{Z2} & -G_{23} \\ 0 & -G_{23} & G_{23} + G_{34} + G_{Z3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} z_{R1t} \\ z_{R2t} \\ z_{R3t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} h_{Fl} \cdot G_{F11} + z_{R1t-\Delta t} \cdot G_{Z1} \\ z_{R2t-\Delta t} \cdot G_{Z2} \\ z_{R4t} \cdot G_{34} + z_{R3t-\Delta t} \cdot G_{Z3} + \dot{V} \end{bmatrix}$$

(c)

Die Hauptaufgabe besteht in der Berechnung der Leitwerte.

Mit der Anfangswasserhöhe $z_{Rt=0} = 10m$ als geschätzte Wasserhöhenverteilung z_{Rnt} ergibt

sich folgende erste Transmissibilitätsverteilung:

$$T_1^{(1)} = k \cdot z_{R1} = 0,01 \frac{m^2}{s}$$

$$T_2^{(1)} = k \cdot z_{R2} = 0,01 \frac{m^2}{s}$$

$$T_3^{(1)} = k \cdot z_{R3} = 0,01 \frac{m^2}{s}$$

Daheraus lassen sich die Leitwerte nach obiger Formel berechnen:

$$G_n = T_n \cdot b / \Delta x_n$$

$$\begin{aligned} G_{n,n+1} &= \frac{G_n \cdot G_{n+1}}{G_n + G_{n+1}} \\ &= \frac{\frac{T_n}{\Delta x_n} \cdot \frac{T_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}}{\frac{T_n}{\Delta x_n} + \frac{T_{n+1}}{\Delta x_{n+1}}} \cdot b \end{aligned}$$

$G_{F11}^{(1)}$	$G_{12}^{(1)}$	$G_{23}^{(1)}$	$G_{34}^{(1)}$
$0,0002 \frac{m^2}{s}$	$0,0002 \frac{m^2}{s}$	$0,0004 \frac{m^2}{s}$	$0,00002 \frac{m^2}{s}$

Die Zeitleitwerte ergeben sich zu:

$$G_{Zn} = \frac{S \cdot b \cdot (\Delta x_n + \Delta x_{n+1})}{2 \cdot \Delta t}$$

Da es sich hier um einen ungespannten Grundwasserleiter geringer Mächtigkeit handelt, wird

$$S = n_0$$

gesetzt.

G_{Z1}	G_{Z2}	G_{Z3}
$0,000145 \frac{m^2}{s}$	$0,000109 \frac{m^2}{s}$	$0,00076 \frac{m^2}{s}$

Damit erhält die Matrixgleichung folgende Gestalt:

$$\begin{bmatrix} 0,000545 \frac{m^2}{s} & -0,0002 \frac{m^2}{s} & 0 \\ -0,0002 \frac{m^2}{s} & 0,000709 \frac{m^2}{s} & -0,0004 \frac{m^2}{s} \\ 0 & -0,0004 \frac{m^2}{s} & 0,00118 \frac{m^2}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{R1t} \\ z_{R2t} \\ z_{R3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00345 \frac{m^3}{s} \\ 0,00109 \frac{m^3}{s} \\ 0,00680 \frac{m^3}{s} \end{bmatrix}$$

Damit ergeben sich die Wasserstände an den Knoten in erster Näherung wie folgt:

$$z_{R1t}^{(1)} = 9,75m$$

$$z_{R2t}^{(1)} = 9,32m$$

$$z_{R3t}^{(1)} = 8,92m$$

Mit diesen Wasserständen müssen neue T -Werte berechnet werden:

$$T_1^{(2)} = k \cdot z_{R1} = 0,01 \frac{m^2}{s}$$

$$T_2^{(2)} = k \cdot z_{R2} = 0,009 \frac{m^2}{s}$$

$$T_3^{(2)} = k \cdot z_{R3} = 0,009 \frac{m^2}{s}$$

Dies führt wiederum zu verbesserten Leitwerten:

$G_{F11}^{(2)}$	$G_{12}^{(2)}$	$G_{23}^{(2)}$	$G_{34}^{(2)}$
$0,000197 \frac{m^2}{s}$	$0,0002 \frac{m^2}{s}$	$0,00036 \frac{m^2}{s}$	$0,0000189 \frac{m^2}{s}$

Die Zeitleitwerte müssen nicht iteriert werden, da hier kein geschichteter Grundwasserleiter vorliegt und es sich noch um den selben Zeitschritt handelt.

Die Matrixgleichung erhält damit die Werte:

$$\begin{bmatrix} 0,000533 \frac{m^2}{s} & -0,00019 \frac{m^2}{s} & 0 \\ -0,00019 \frac{m^2}{s} & 0,00066 \frac{m^2}{s} & -0,00036 \frac{m^2}{s} \\ 0 & -0,00036 \frac{m^2}{s} & 0,00114 \frac{m^2}{s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{R1t} \\ z_{R2t} \\ z_{R3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00342 \frac{m^3}{s} \\ 0,00109 \frac{m^3}{s} \\ 0,00678 \frac{m^3}{s} \end{bmatrix}$$

Die Lösung ergibt sich zu:

$$z_{R1t}^{(2)} = 9,76m$$

$$z_{R2t}^{(2)} = 9,33m$$

$$z_{R3t}^{(2)} = 8,91m$$

Man erkennt, dass sich das Ergebnis innerhalb der Iteration nicht wesentlich, sondern nur im

Zentimeterbereich, geändert hat. Dieses gute Iterationsverhalten ist auf die Nichtlinearität des Gleichungssystems zurückzuführen. Bei Wiederanstiegsproblemen wirkt sich die Nichtlinearität demgegenüber divergierend aus.

Der Grundwasserspiegel hat nach einem Tag demzufolge folgenden Verlauf (siehe Abbildung 3.15):

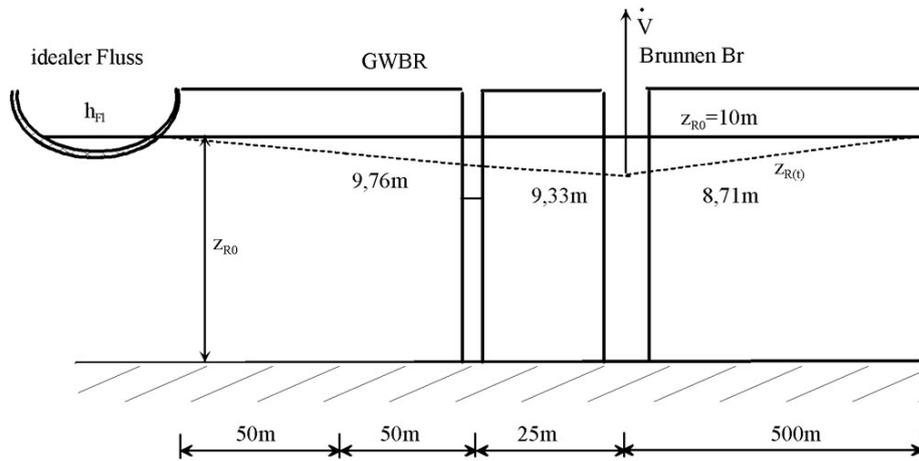


Abbildung 3.15: Grundwasserstand nach einem Tag

• zu Aufgabe 6 (s. S. 308)

(a)

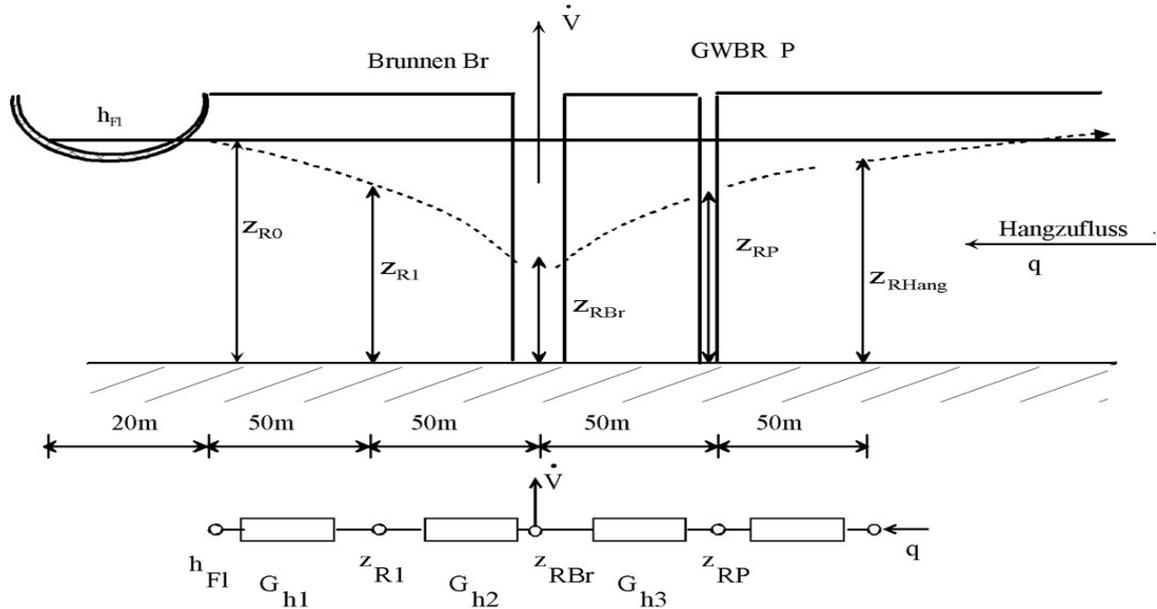


Abbildung 3.16: Grundwasserleiter mit Quantisierungsschema

(b)

Zur Berechnung der Wasserstände im Quantisierungsschema der Abbildung 3.16 werden die Bilanzgleichungen an jedem Knotenpunkt aufgestellt. Da es sich laut Aufgabenstellung um eine stationäre Strömung handelt, sind die Speichereffekte nicht zu berücksichtigen.

Knoten 1: $(z_{R1} - h_{Fl})G_{h1} + (z_{R1} - z_{RBr})G_{h2} = 0$

Knoten 2: $(z_{RBr} - z_{R1})G_{h2} + (z_{RBr} - z_{RP})G_{h3} + \dot{V}_{Br} = 0$

Knoten 3: $(z_{RP} - z_{RBr})G_{h3} - \dot{V}_{Hang} = 0$

Der Hangzufluss wird durch den hydraulischen Leitwert G_{h4} nicht beeinflusst, da keine Verzweigung auftritt. Damit kann auch der rechte Knoten außer Betracht gelassen werden.

Die nach Wasserständen geordneten Knotengleichungen lauten:

Knoten 1: $z_{R1}(G_{h1} + G_{h2}) + z_{RBr}(-G_{h2}) = h_{Fl}G_{h1}$

Knoten 2: $z_{R1}(-G_{h2}) + z_{RBr}(G_{h2} + G_{h3}) + z_{RP}(-G_{h3}) = -\dot{V}_{Br}$

Knoten 3: $z_{RBr}(-G_{h3}) + z_{RP}(G_{h3}) = \dot{V}_{Hang}$

oder in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} (G_{h1} + G_{h2}) & (-G_{h2}) & 0 \\ (-G_{h2}) & (G_{h2} + G_{h3}) & (-G_{h3}) \\ 0 & (-G_{h3}) & (G_{h3}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_{R1} \\ z_{RBr} \\ z_{RP} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{Fl} G_{hl} \\ -\dot{V}_{Br} \\ \dot{V}_{Hang} \end{bmatrix}$$

Dieses System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten lässt sich z. B. nach dem Einsetzverfahren lösen.

Man kann Knotengleichung 3 nach dem Brunnenwasserstand z_{RBr} auflösen:

$$\mathbf{Knoten\ 3:} \quad z_{RBr} = \frac{\dot{V}_{Hang} + z_{RP}(G_{h3})}{G_{h3}}$$

$$\mathbf{Knoten\ 1:} \quad z_{R1}(G_{h1} + G_{h2}) - \frac{\dot{V}_{Hang} + z_{RP}(G_{h3})}{G_{h3}}(-G_{h2}) = h_{Fl} G_{hl}$$

$$z_{R1}(G_{h1} + G_{h2}) - \frac{\dot{V}_{Hang}(-G_{h2})}{G_{h3}} + z_{RP}(-G_{h2}) = h_{Fl} G_{hl}$$

$$\mathbf{Knoten\ 2:} \quad z_{R1}(-G_{h2}) - \frac{\dot{V}_{Hang} + z_{RP}(G_{h3})}{G_{h3}}(G_{h2} + G_{h3}) + z_{RP}(-G_{h3}) = -\dot{V}_{Br}$$

bzw. umgeformt:

$$z_{R1} = \frac{\dot{V}_{Br}}{G_{h2}} - \frac{\dot{V}_{Hang}(G_{h2} + G_{h3})}{G_{h2} \cdot G_{h3}} + z_{RP}$$

Die Gleichung von Knoten 2 in die Gleichung von Knoten 1 eingesetzt ergibt:

$$-\frac{\dot{V}_{Hang}(G_{h2} + G_{h3}) \cdot (G_{h1} + G_{h2})}{G_{h2} \cdot G_{h3}} + z_{RP}(-G_{h2}) = h_{Fl} G_{hl} \frac{\dot{V}_{Hang}(-G_{h2})}{G_{h3}}$$

Diese Gleichung zusammengefasst liefert:

$$z_{RP} = h_{Fl} - \frac{\dot{V}_{Br}(G_{h1} + G_{h2})}{G_{h1} \cdot G_{h2}} + \frac{\dot{V}_{Hang}(G_{h2} + G_{h3}) \cdot (G_{h1} + G_{h2})}{G_{h1} \cdot G_{h2} \cdot G_{h3}} + \frac{\dot{V}_{Hang}(-G_{h2})}{G_{h1} \cdot G_{h3}}$$

$$z_{RP} = h_{Fl} - \frac{\dot{V}_{Br}(G_{h1} + G_{h2})}{G_{h1} \cdot G_{h2}} + \dot{V}_{Hang} \left(\frac{1}{G_{h1}} + \frac{1}{G_{h2}} + \frac{1}{G_{h3}} \right)$$

Die Absenkung gegenüber dem stationären Ausgangszustand, d.h. Grundwasserspiegel gleich Flusswasserspiegel, ergibt sich am Pegel zu:

$$z_{RP} = h_{Fl} - \dot{V}_{Br}(R_{h1} + R_{h2}) + \dot{V}_{Hang}(R_{h1} + R_{h2} + R_{h3})$$

$$s = h_{Fl} - z_{RP} = \dot{V}_{Br}(R_{h1} + R_{h2}) - \dot{V}_{Hang}(R_{h1} + R_{h2} + R_{h3})$$

Man beachte, dass trotz der in den Zwischenschritten etwas komplizierten Gleichungen ein relativ einfaches und leicht interpretierbares Ergebnis erhalten wird.

Der Grundwasserspiegel, identisch mit dem Flusswasserspiegel ($h_{Fl} = z_{R0}$), wird um den Anteil, der durch den Förderstrom des Brunnens hervorgerufen wird, vermindert und durch den des Hangzuflusses erhöht. Die Absenkung durch den Brunnen hätte man auch direkt aus dem Ersatzschaltbild ablesen können, denn der Quotient drückt nichts anderes aus als die Reihenschaltung der beiden Leitwerte G_{h1} und G_{h2} aus. Würde keine Förderung stattfinden, käme es, hervorgerufen durch den Hangzufluss, zu einem Grundwasseranstieg.

Zur überschlägigen Prüfung von derartigen Gleichungen sollte man feststellen, ob die Dimensionen der einzelnen Summanden stimmen. Des Weiteren darf in Gleichungen solcher Widerstandsnetzwerke ein Widerstand oder Leitwert nicht mit sich selbst multipliziert werden (G_n^2 bzw. R_n^2 sind unzulässig!).

(c)

Die hydraulischen Leitwerte berechnen sich aus der Reihenschaltung der Teilleitwerte der Planungselemente:

$$\begin{aligned} G_{hn} &= \frac{G_{hn} \cdot G_{hn+1}}{G_{hn} + G_{hn+1}} \\ &= k \cdot \frac{z_{Rn} \cdot z_{Rn+1} \cdot b}{(z_{Rn} + z_{Rn+1}) \cdot \frac{\Delta x}{2}} \\ G_{hn} &= k \cdot \frac{z_{Rn} \cdot z_{Rn+1} \cdot 2b}{(z_{Rn} + z_{Rn+1}) \cdot \Delta x_n} \end{aligned}$$

Als wirksame Länge wird jeweils die halbe Ortsquantisierungsschrittweite angesetzt, da jedes Planungselement zwei Teilleitwerte besitzt.

Für die einzelnen Leitwerte gilt:

$$\begin{aligned} G_{h1} &= \frac{h_{Fl} \cdot z_{R1}}{h_{Fl} + z_{R1}} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s} \\ G_{h2} &= \frac{z_{R1} \cdot z_{RBr}}{z_{R1} + z_{RBr}} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s} \\ G_{h3} &= \frac{z_{RP} \cdot z_{RBr}}{z_{RP} + z_{RBr}} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Für die erste Näherung dieser nichtlinearen hydraulischen Leitwerte setzt man z.B. die Ausgangswasserhöhe von $z_{R0} = 15m$ für alle Knoten ($z_{R1}^{(1)} = z_{RBr}^{(1)} = z_{RP}^{(1)} = 15m$) an und erhält:

$$G_{h1}^{(1)} = G_{h2}^{(1)} = G_{h3}^{(1)} = 3 \cdot 10^{-2} \frac{m^2}{s}$$

Mit der Lösung von Aufgabe 6b (s. S. 340) ergibt sich ein Wasserstand am GWBR P in erster Näherung zu:

$$\begin{aligned} z_{RP}^{(1)} &= h_{Fl} - \frac{\dot{V}_{Br}(G_{h1} + G_{h2})}{G_{h1} \cdot G_{h2}} + \dot{V}_{Hang} \left(\frac{1}{G_{h1}} + \frac{1}{G_{h2}} + \frac{1}{G_{h3}} \right) \\ &= 15m - \frac{50 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s} \cdot 2}{3 \cdot 10^{-2} \frac{m^2}{s}} + 0,001 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s \cdot m^2} \cdot 100m \cdot 15m \frac{3}{3 \cdot 10^{-2} \frac{m^2}{s}} \\ &= 15m - 3,333m + 0,15m \\ z_{RP}^{(1)} &= 11,82m \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis stellt eine erste Näherung dar, da für die Leitwerte eine konstante durchströmte Mächtigkeit von $15m$ angenommen wurde. Mit der erzielten Lösung müssten jetzt neue Wasserstände $z_{R1}^{(2)}$ und $z_{RBr}^{(2)}$ und daraus neue Leitwerte berechnet werden, daraus wiederum ein neuer Wasserstand $z_{RP}^{(2)}$ am GWBR P .

(d)

Die beiden Effekte Kolmation und Unvollkommenheit werden durch zusätzliche Strömungswiderstände bzw. Leitwerte berücksichtigt (siehe Abbildung 3.17):

Damit ergibt sich eine neue Knotenpunktgleichung für den Knoten Fl':

$$\textbf{Knoten Fl'} \quad (h_{Fl} - h_{Fl})G_{Fl} + (h_{Fl} - z_{R1})G_{h1} = 0$$

$$\textbf{Knoten 1:} \quad (z_{R1} - h_{Fl})G_{h1} + (z_{R1} - z_{RBr})G_{h2} = 0$$

$$\textbf{Knoten 2:} \quad (z_{RBr} - z_{R1})G_{h2} + (z_{RBr} - z_{RP})G_{h3} + \dot{V}_{Br} = 0$$

$$\textbf{Knoten 3:} \quad (z_{RP} - z_{RBr})G_{h3} - \dot{V}_{Hang} = 0$$

Damit erhält man vier Gleichungen mit vier Unbekannten. Die nach Wasserständen geordneten Knotengleichungen lauten:

$$\textbf{Knoten Fl'} \quad h_{Fl}(G_{Fl} + G_{h1}) + z_{R1}(-G_{h1}) = h_{Fl}G_{Fl}$$

$$\textbf{Knoten 1:} \quad h_{Fl}(-G_{h1}) + z_{R1}(G_{h1} + G_{h2}) + z_{RBr}(-G_{h2}) = 0$$

$$\textbf{Knoten 2:} \quad z_{R1}(-G_{h1} - G_{h2}) + z_{RBr}(G_{h2} + G_{h3}) + z_{RP}(-G_{h3}) = -\dot{V}_{Br}$$

$$\textbf{Knoten 3:} \quad z_{RBr}(-G_{h3}) + z_{RP}(G_{h3}) = \dot{V}_{Hang}$$

bzw. in Matrixschreibweise:

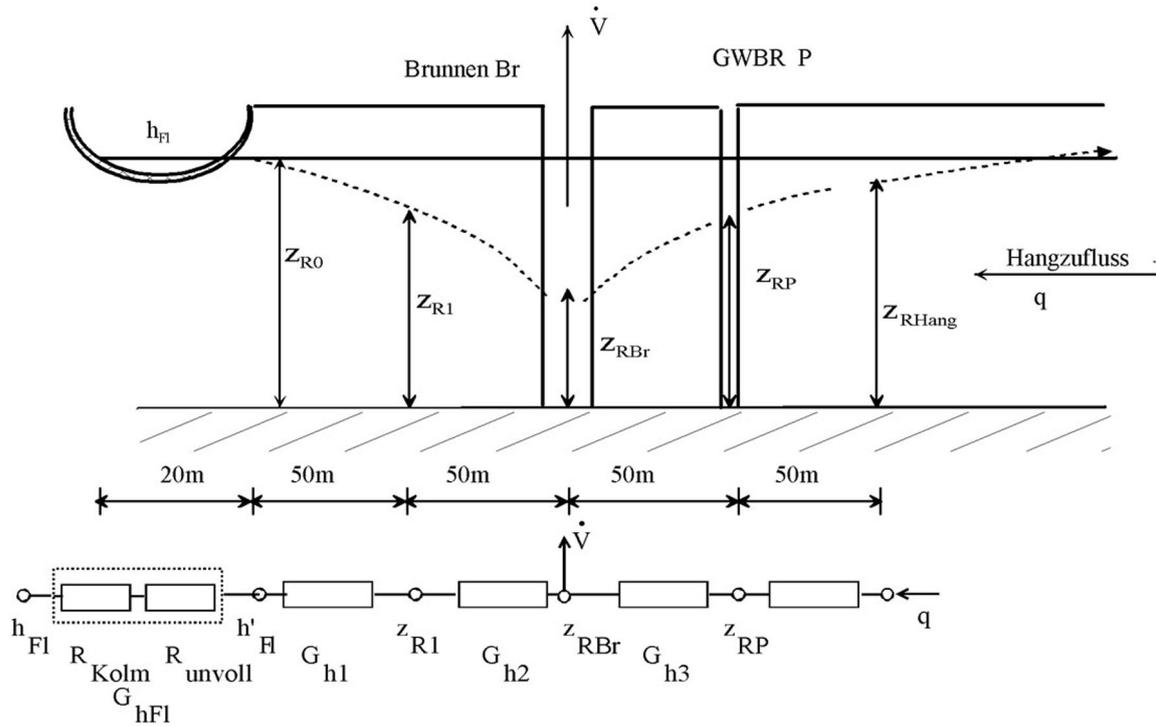


Abbildung 3.17: Anknüpfung des Flusses über zusätzliche Widerstände

$$\begin{bmatrix} G_{Fl} + G_{h1} & -G_{h1} & 0 & 0 \\ -G_{h1} & G_{h1} + G_{h2} & -G_{h2} & 0 \\ 0 & -G_{h2} & G_{h2} + G_{h3} & -G_{h3} \\ 0 & 0 & -G_{h3} & G_{h3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{Fl} \\ z_{R1} \\ z_{R2} \\ z_{R3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{Fl} G_{Fl} \\ 0 \\ -\dot{V}_{Br} \\ \dot{V}_{Hang} \end{bmatrix}$$

Die Berechnung des "Flussleitwertes" G_{Fl} erfolgt nach dem Gesetz der Reihenschaltung von Leitwerten:

$$G_{1,2} = \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2}$$

$$G_{Fl} = \frac{1}{R_{Kolm} + R_{unvoll}} = \frac{G_{Kolm} \cdot G_{unvoll}}{G_{Kolm} + G_{unvoll}}$$

Kolmationswiderstand

Der Widerstand der Kolmationsschicht berechnet sich entsprechend den geometrischen Verhältnissen und der Durchlässigkeit.

Der allgemeine hydraulische Widerstand ist geprägt durch die spezifische Leitfähigkeit (k -Wert), die senkrecht durchströmte Fläche (A_{\perp} = Bogenlänge der Flusssohle B_{Fl}) multipliziert

mit einer Breite b) und die Länge ($d =$ Dicke der Kolmationsschicht):

$$R_{hydr} = \frac{1}{k} \cdot \frac{d}{A_{\perp}}$$

Mit der Bogenlänge der Flusssohle ($A_{\perp} = \frac{\pi}{2} B_{Fl}$)

$$\begin{aligned} R_{Kolm} &= \frac{1}{k_{Kolm}} \cdot \frac{M_{Kolm}}{\frac{\pi}{2} B_{Fl} \cdot b} \\ &= \frac{1}{5 \cdot 10^{-5} \frac{m}{s}} \frac{1m}{10m \cdot 100m} \\ R_{Kolm} &= 6,37 \frac{s}{m^2} \end{aligned}$$

Unvollkommenheit

Für die Berücksichtigung der Unvollkommenheit kann man vorteilhafterweise den gleichen Weg beschreiben, wie er bei der analytischen Lösung im gleichen Zusammenhang beschrieben wird. Damit ergibt sich hier aus dem entsprechenden Diagramm eine Ersatzlänge von

$$\frac{\Delta L_1}{B} \approx 0,43$$

$$\Delta L_1 \approx 6m$$

und der entsprechende Widerstand

$$\begin{aligned} R_{unvoll} &= \frac{1}{k} \cdot \frac{\Delta L_1}{z_{R0} \cdot b} \\ &= \frac{1}{10^{-5} \frac{m}{s}} \frac{6m}{15m \cdot 100m} \\ R_{unvoll} &= 4 \frac{s}{m^2} \end{aligned}$$

Gesamtleitwert

Damit ergibt sich der Gesamtleitwert zu

$$\begin{aligned} G_{Fl} &= \frac{1}{R_{Kolm} + R_{unvoll}} \\ &= \frac{1}{6,37 + 4} \frac{m^2}{s} \\ G_{Fl} &= 0,09643 \frac{m^2}{s} \end{aligned}$$

Durch den zusätzlichen Widerstand, hervorgerufen durch die Kolmation, und die Unvollständigkeit des Flusses als Randbedingung, ergibt sich ein zusätzlicher Potentialverlust, d.h. die Absenkung wird größer. Vergleicht man die anderen Leitwerte mit dem Zusatzleitwert, so erkennt man dessen Einfluss:

Das Ergebnis der Lösung zu Aufgabe 6c. (s. S. 342) war:

$$\begin{aligned} z_{RP} &= h_{Fl} - \frac{\dot{V}_{Br}(G_{h1} + G_{h2})}{G_{h1} \cdot G_{h2}} + \dot{V}_{Hang} \left(\frac{1}{G_{h1}} + \frac{1}{G_{h2}} + \frac{1}{G_{h3}} \right) \\ &= h_{Fl} - \dot{V}_{Br}(R_{h1} + R_{h2}) + \dot{V}_{Hang}(R_{h1} + R_{h2} + R_{h3}) \end{aligned}$$

Dabei sind die Leitwerte in Widerstände umgeformt worden. Substituiert man in obiger Gleichung den Widerstand R_{h1} durch $R_{hFl} + R_{h1}$, so ergibt sich das veränderte Potential am GWBR P .

$$z_{RP} = h_{Fl} - \dot{V}_{Br}((R_{hFl} + R_{h1}) + R_{h2}) + \dot{V}_{Hang}((R_{hFl} + R_{h1}) + R_{h2} + R_{h3})$$

Für die erste Näherung dieser nichtlinearen hydraulischen Leitwerte setzt man z.B. die Ausgangswasserhöhe von $z_{R0} = 15m$ für alle Knoten ($z_{R1}^{(1)} = z_{RBr}^{(1)} = z_{RP}^{(1)} = 15m$) an und erhält:

$$G_{h1} = G_{h2} = G_{h3} = 3 \cdot 10^{-2} \frac{m^2}{s}$$

$$R_{h1} = R_{h2} = R_{h3} = 33,33 \frac{s}{m^2}$$

$$R_{hFl} = 10,37 \frac{s}{m^2}$$

Die Absenkung gegenüber dem stationären Ausgangszustand, d.h. Grundwasserspiegel = Flusswasserspiegel, ergibt sich am Pegel P zu:

$$z_{RP} = h_{Fl} - \dot{V}_{Br}((R_{hFl} + R_{h1}) + R_{h2}) + \dot{V}_{Hang}((R_{hFl} + R_{h1}) + R_{h2} + R_{h3})$$

$$s = h_{Fl} - z_{RP} = \dot{V}_{Br}((R_{hFl} + R_{h1}) + R_{h2}) + \dot{V}_{Hang}((R_{hFl} + R_{h1}) + R_{h2} + R_{h3})$$

$$s = (\dot{V}_{Br} \cdot R_{hFl} - \dot{V}_{Hang} \cdot R_{hFl}) + (\dot{V}_{Br} \cdot (R_{h1} + R_{h2}) - \dot{V}_{Hang} (R_{h1} + R_{h2} + R_{h3}))$$

$$s = s_{R_{Fluss}} + s_{R_{GWL}}$$

Da der Flusswiderstand R_{hFl} rund ein Sechstel der Summe von $R_{h1} + R_{h2} + R_{h3}$ ausmacht, ergibt sich der geringe Einfluss.

Man sieht, dass mit dem Zusatzwiderstand des Flusses die Absenkung um ca. 13% stärker wird. Auf Grund der Nichtlinearität der ungespannten Grundwasserströmung lässt sich keine genauere Abschätzung geben.

Kapitel 4

Simulationsprogrammssystem ASM

4.1 Aufgaben

1. Simulieren Sie die Absenkung für die gegebenen Punkte im Abstand r und die Zeiten (t) infolge einer Wasserförderung \dot{V} im Brunnen für folgenden Grundwasserleiter und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar:

$$k = 1 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}; M = 10m; S = 0,001; a = \frac{S}{T} = 0,1 \frac{s}{m^2}; r_0 = 0,25m; \dot{V} = 0,015 \frac{m^3}{s}$$

$$h_n = 16m;$$

$$r = 5m; 10m; 20m; 50m$$

$$t = 1min; 2min; 5min; 10min; 20min; 30min; 45min; 60min; 90min; 120min$$

2. Simulieren Sie für den o.g. Grundwasserleiter die Absenkung im Punkt ($r = 10m$) aller $10min$ bis maximal $100min$, wenn der Volumenstrom des Förderbrunnens folgender Zeitstaffelung unterliegt und stellen Sie das Ergebnis grafisch dar:

Volumenstrom [$\frac{m^3}{s}$]	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,030	0,000
Förderbeginn [min]	0	10	20	30	40	50	60

3. In einem Grundwasserleiter in der Nähe eines Flusses soll eine Baugrube abgesenkt werden. Die Mitte der Baugrube ist $100m$ vom Fluss entfernt, die Entwässerungsbrunnen $80m$. Es sind drei Brunnen parallel zum Fluss angeordnet, die jeweils $25m$ voneinander entfernt sind. Die Brunnen besitzen einen Durchmesser von $r_0 = 0,3m$ und fördern mit jeweils $\dot{V} = 0,015 \frac{m^3}{s}$.

Der Fluss besitzt eine Breite von $B = 20m$ und eine Kolmationsschicht von $k' = 3 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s}; M' = 1m$.

Der Grundwasserleiter hat folgende Eigenschaften:

$$k = 5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}; n_0 = 0,20; h_n = 15m; M = 20m.$$

Wird nach zehn Tagen im Zentrum der Baugrube die Zielabsenkung von $2,5m$ erreicht?

4. Überprüfen Sie mittels des Simulationsprogramms ASM, ob der Mittelpunkt der Baugrube nach einer Zeit von 7 Tagen bei einer Förderleistung von $\dot{V} = 0,01 \frac{m^3}{s}, r_0 = 0,30m$ mit einer Sicherheit von $0,5m$ entwässert ist (siehe Abbildung 4.1).
5. Aus einem Brunnen, der an einem idealen Fluss liegt ($Br_{(100m,500m)}$) wird ein konstanter Volumenstrom von $25 \frac{l}{s}$ gefördert. Der Brunnen hat einen Radius von $r_0 = 0,35m$. Der Grundwasserleiter ist durch folgende Parameter gekennzeichnet:
 $h_n = 15m, M = 17m, k = 1 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}, S_0 = 0,0002, n_0 = 0,25$.

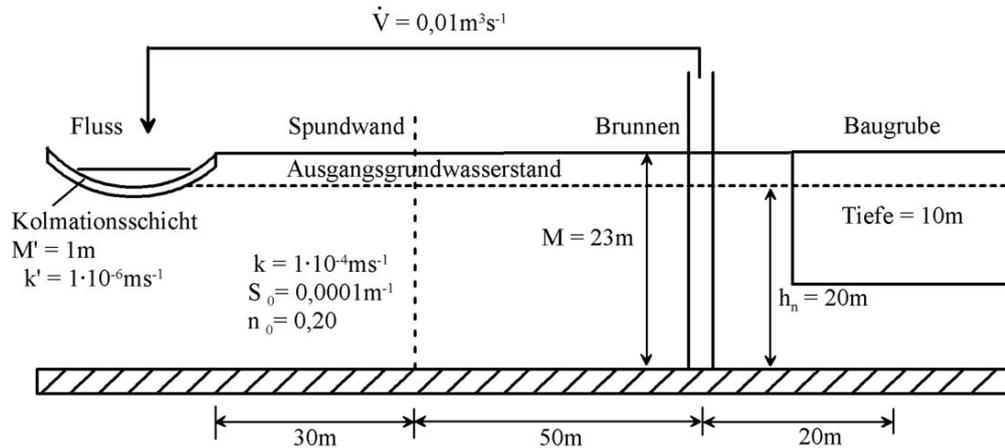


Abbildung 4.1: Grundwasserleiter mit Brunnen und Baugrube

Simulieren Sie den stationären Endzustand (Anteil der zeitlichen Funktionalität soll kleiner als 0,001 sein) für den Punkt ($P_{(600m,200m)}$). Ab wann ist mit ihm zu rechnen?

6. Simulieren Sie folgende eindimensionalen Grundwasserströmungen:

- (a) Simulieren Sie mittels einer eindimensionalen stationären Grabenströmung (siehe Abbildung 4.2) die Lage der freien Oberfläche in Abhängigkeit von x und ermitteln Sie den Abfluss aus dem Oberwasser und den Zufluss zum Unterwasser. Verwenden Sie dabei fünf Quantisierungselemente.

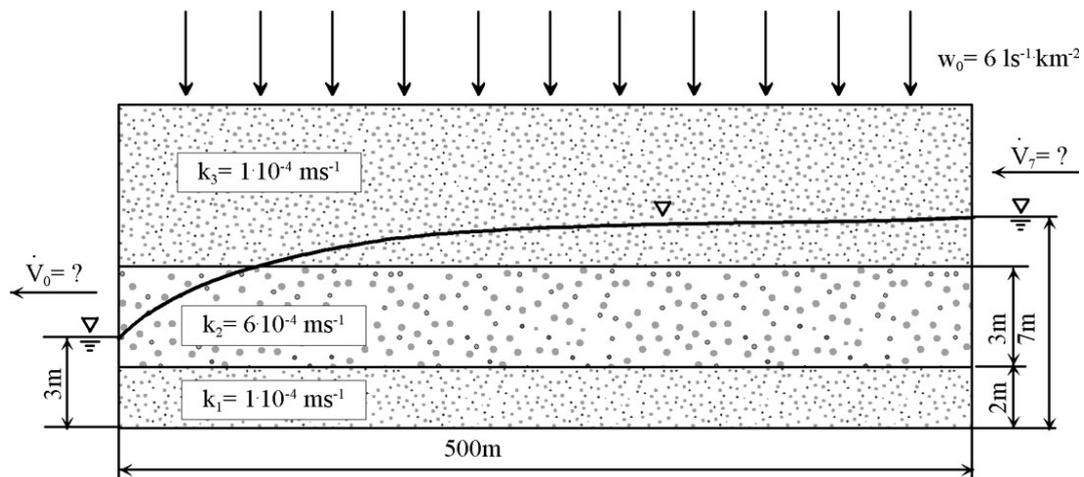


Abbildung 4.2: Geschichteter Grundwasserleiter mit stationärem Strömungsregime

- (b) Simulieren Sie mittels einer eindimensionalen instationären Grabenströmung (siehe Abbildung 4.3) die Lage der freien Oberfläche in Abhängigkeit von x und der Zeit t .

7. In einem Grundwasserleiter soll ein Tunnel (U-Bahn) parallel zu einem Fluss eingebaut werden (siehe Abbildung 4.4). Simulieren Sie, zu welchen Grundwasserstands-

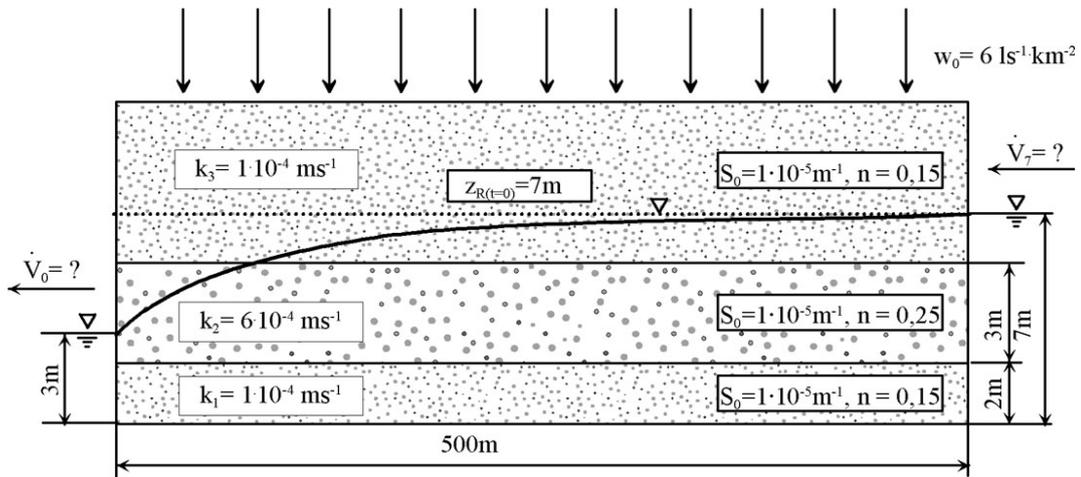


Abbildung 4.3: Geschichteter Grundwasserleiter mit instationärem Strömungsregime

änderungen es für den stationären Fall durch diesen Einbau kommt. Wählen Sie dazu ein geeignetes grobes Quantisierungsschema.

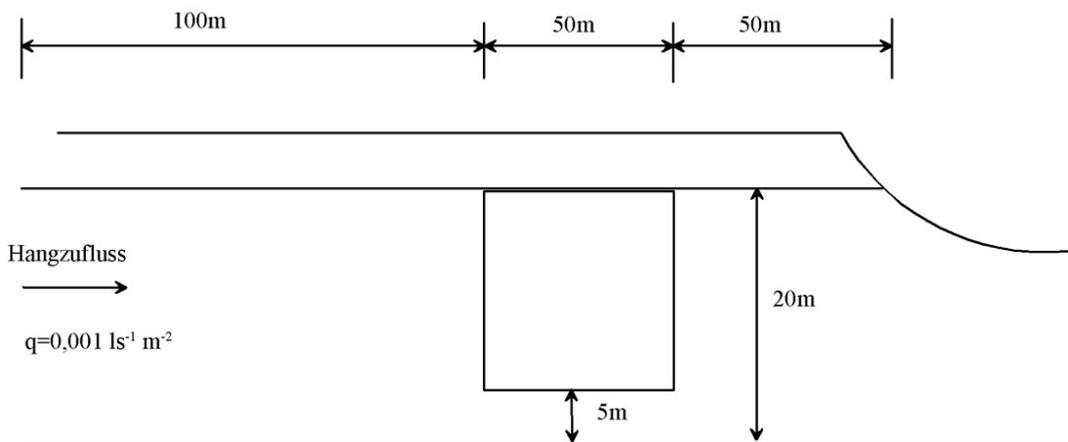
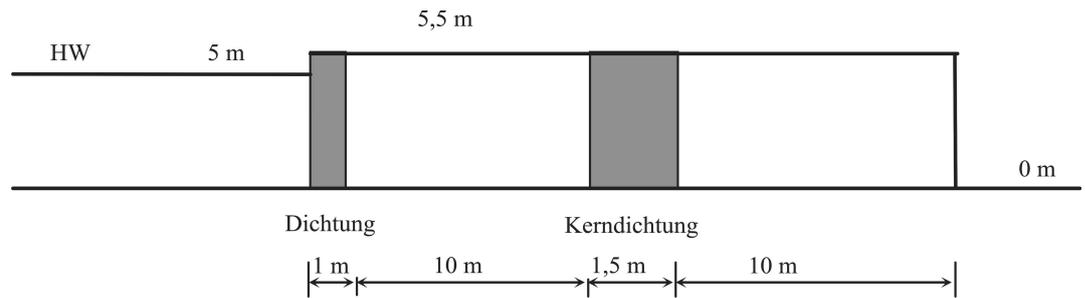


Abbildung 4.4: Einbau eines Tunnelbauwerkes in einem Grundwasserleiter

8. In einer Flussniederung soll mittels eines Deichbauwerkes entsprechend dem vereinfachten Schema in Abbildung ?? das Poldergebiet vor Hochwasser geschützt werden.
 - (a) Ermitteln Sie die Zeit, nach welcher sich ein stationäres Strömungsregime eingestellt hat, wenn das Hochwasser über lange Zeit $5m$ über Normal steht.
 - (b) Wieviel Wasser fließt pro Meter Deichlänge in das Poldergebiet?
 Deich: $k = 10^{-4} \frac{m}{s}$, $n_0 = 0,15$, $S_0 = 0,002m^{-1}$;
 Dichtungsmaterial: $k = 10^{-5} \frac{m}{s}$; $n_0 = 0,05$; $S_0 = 0,001m^{-1}$



Deichbauwerk mit Kerndichtung

9. Modellieren Sie mittels des Programmsystems ASM folgenden horizontalen Grundwasserleiter, der rechts und links von zwei vollkommen ausgebauten Vorflutern mit einer Wasserhöhe von 50 m begrenzt wird. Der Grundwasserleiter besitzt eine Mächtigkeit von 20 m , eine Transmissibilität von $T = 0,01 \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, einen Speicherkoeffizienten von $S = 0,001$ und eine Porosität von $0,1$. In der Mitte des Modellgebietes liegt ein Brunnen mit einer Förderleistung von $\dot{V} = 0,05 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.
- Simulieren Sie die Wasserstandsverteilung (Isohypsenplan) nach einer Förderzeit des Brunnens von einem Tag.
 - Stellen Sie grafisch die Wasserstandsganglinien am Brunnen und jeweils 200 m entfernt dar (parallel und senkrecht zum Vorfluter)
 - Berechnen Sie die Wasserbilanz für das Modellgebiet nach eintägiger Förderung, sowie den Zufluss von dem linken Vorfluter
 - Untersuchen Sie zu dem hydraulischen System der Aufgabe (c) den Einfluss der Orts- und Zeitquantisierungsschrittweiten und den der Lösungsverfahren. Stellen Sie dazu vor allem die Hydroisohypsen nach einem Tag dar und vergleichen Sie diese.

Kapitel 5

Prozessanalyse

5.1 Aufstellen von Gleichungen

5.1.1 Aufgaben

1. Der Grundwasserwiederanstieg und damit das Auffüllen der Restlöcher in den ehemaligen Braunkohletagebauen dauert unter natürlichen Bedingungen zu lange. Deshalb wird versucht durch Fremdeinspeisung den Auffüllvorgang zu beschleunigen. Stellen Sie für den Auffüllvorgang $h_{(1,2)}(t)$, ohne Berücksichtigung des Grundwasserleiters und eventuellen Grundwasserneubildungsraten, die Differentialgleichung auf. In allen Fällen soll die Anfangsbedingung ($h_{t=0(1,2)} = 0$) gelten. (Lösung s. S. 360)
 - (a) konstanter Volumenstrom (siehe Abbildung 5.1)
 - (b) variabler Volumenstrom (siehe Abbildung 5.2)
 - (c) gekoppelte Speicherkaskade (siehe Abbildung 5.3)
 - (d) $V_1 + V_2 = \text{const}$

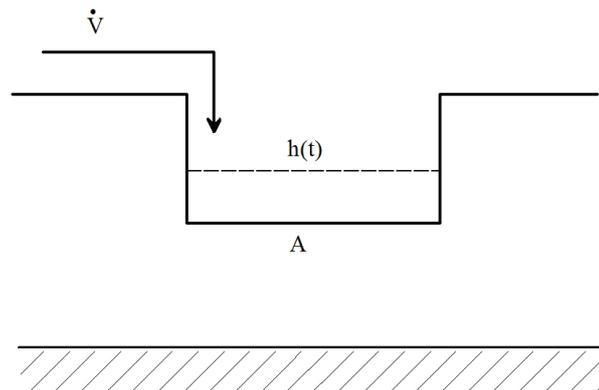


Abbildung 5.1: Füllvorgang eines Restloches mit konstantem Volumenstrom

2. Stellen Sie für folgendes hydraulische Schema (siehe Abbildung 5.4) mit zugehörigem Blockmodell die Differentialgleichung auf. Gehen Sie dabei von linearisierten Verhältnissen und einem homogenen, isotropen Grundwasserleiter mit folgenden Parametern $k = 5 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s}$; $n_0 = 0,2$; $z_{Rmittel} = 20m$; $l = 50m$ aus: (Lösung s. S. 364)
3. Für die Wasserstandsregelung eines Bewässerungsgrabens wird eine Schwimmerregelung eingesetzt (siehe Abbildung 5.5).

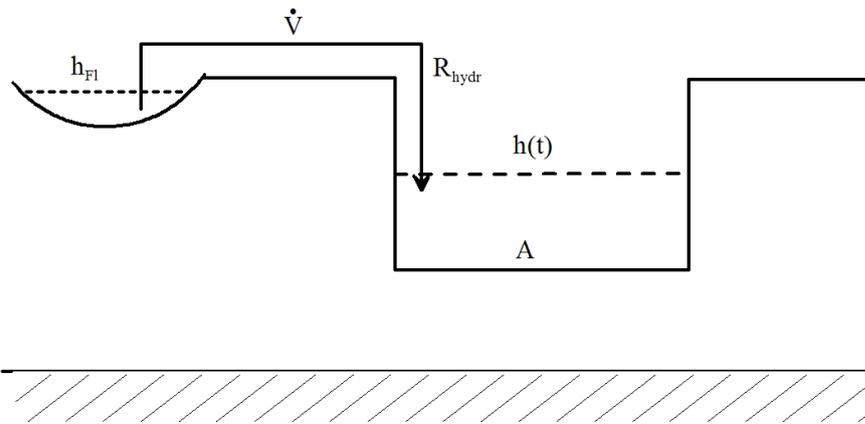


Abbildung 5.2: Füllvorgang eines Restloches mit variablem Volumenstrom

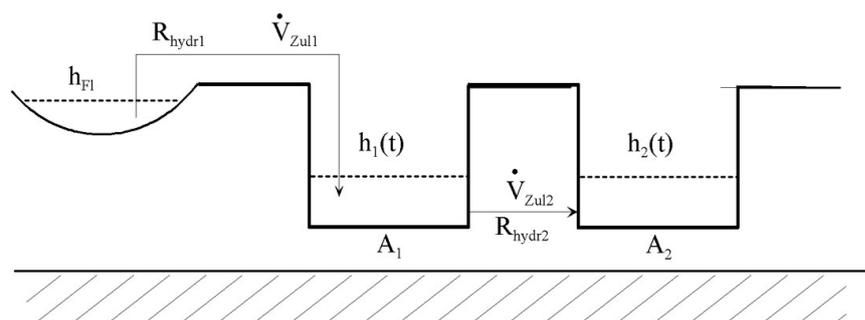


Abbildung 5.3: Gekoppelte Speicherkaskade

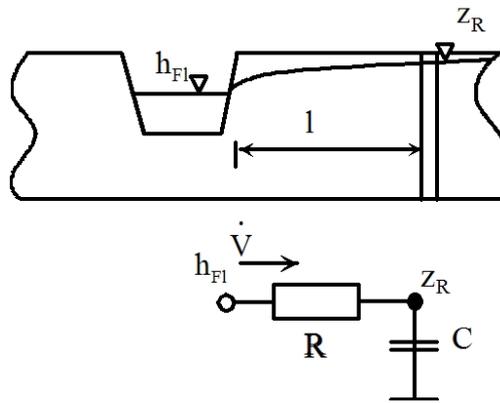


Abbildung 5.4: Schematische Darstellung des Grundwasserspiegels mit Blockschaltbild

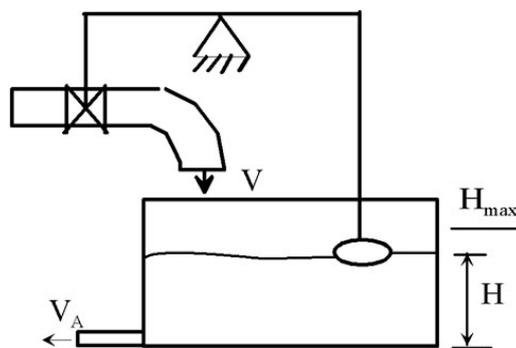


Abbildung 5.5: Wasserstandsregelung eines Bewässerungsgrabens

Stellen Sie die Differentialgleichungen auf, mit denen der Wasserstand H berechnet werden kann. Die Fläche des Behälters beträgt A . Der Volumenstrom \dot{V} ist abhängig vom Wasserstand H (Lösung s. S. 366).

$$\dot{V} = K \cdot \dot{V}_{max} \cdot (H_{max} - H)$$

4. Bei einem statischen Batch-Versuch wird eine Bodenprobe mit einem Volumen V_B in einem Becherglas mit Wasser V_{H_2O} in Berührung gebracht. Die Schadstoffkonzentration im Boden soll $C_B = 125 \frac{mg}{l}$ betragen, die im Wasser $C_{H_2O, t=0} = 0 \frac{mg}{l}$ zum Zeitpunkt $t = 0$. In erster Näherung wird sich ein Schadstofftransport aus dem Boden in das Wasser auf Grund der Diffusion einstellen. (siehe Abbildung 5.6)

Stellen Sie für den Konzentrationsverlauf im Wasser die Differentialgleichung auf. Das Wasser/Feststoffverhältnis ($W/F = 1$) soll gleich eins sein. Der Diffusionswiderstand R_{Diff} ist gegeben.

Gegeben: $m_{qu} = 125 mg$ (Schadstoffmenge im Boden), $V_B = V_{H_2O} = 1l$, R_{Diff} (Lösung s. S. 368).

5. Zwei Körper mit unterschiedlicher Temperatur (T_1 und T_2) werden zum Zeitpunkt $t = 0$ verbunden. Der Wärmeübergang wird durch den thermischen Übergangswi-

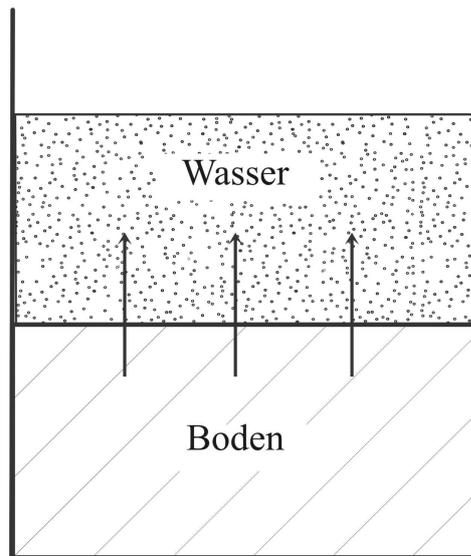


Abbildung 5.6: Schadstofftransport aus dem Boden in das Wasser

derstand R_{therm} und durch die Wärmekapazitäten (W_1 und W_2) der beiden Körper bestimmt.

Zeichnen Sie dafür das thermische Blockschema und stellen Sie die dazugehörige Differentialgleichung für die Änderung der Temperatur $T_2(t)$ auf.

(Lösung s. S. 369).

5.1.2 Lösungen

- zu Aufgabe 1 (s. S. 356)

(a) Konstanter Volumenstrom

Das Wasservolumen im Restloch (siehe Abbildung 5.7) berechnet sich zu:

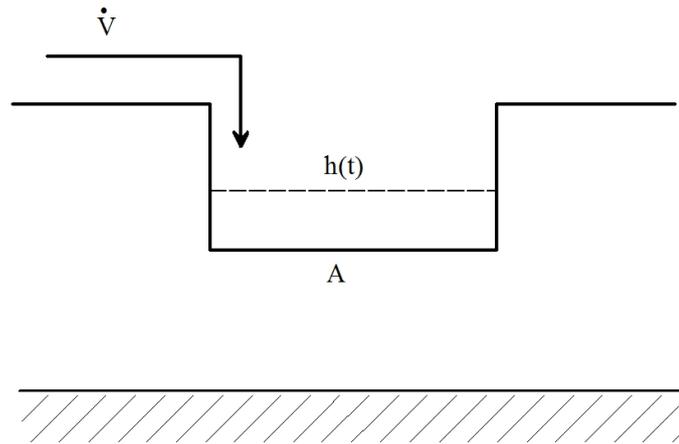


Abbildung 5.7: Füllvorgang eines Restloches mit konstantem Volumenstrom

$$V = A \cdot h$$

Die Änderung des Volumens pro Zeiteinheit ergibt sich zu:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(A \cdot h)}{dt}$$

Stellt man jetzt die Bilanzgleichung auf, dass die Änderung des Volumens im Restloch dem Zustrom gleich sein muss, so erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{Zustr} &= \frac{dV_{Restl}}{dt} \\ &= \frac{d(A \cdot h)}{dt} \\ &= h \frac{dA}{dt} + A \frac{dh}{dt} \end{aligned}$$

Für den hier vorliegenden Fall, dass die Füllfläche konstant ist $A = const.$ ergibt sich:

$$A \frac{dh}{dt} = \dot{V}_{Zustr}$$

Bei der Lösung dieser Differentialgleichung müssen die Zeitabhängigkeit des Zustrom beachtet und entsprechende Anfangsbedingungen eingeführt werden.

(b) Variabler Volumenstrom

An Hand des Schemas (siehe Abbildung 5.8) können folgende Bilanz- und Energiegleichungen aufgestellt werden.

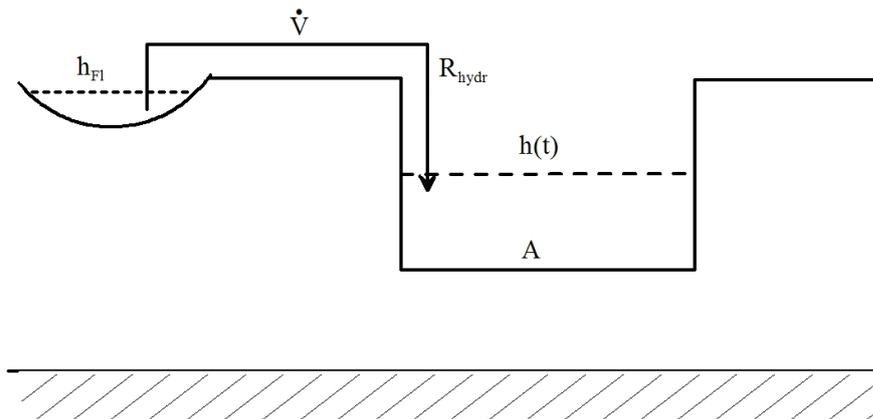


Abbildung 5.8: Füllvorgang eines Restloches mit variablem Volumenstrom

$$\frac{dV}{dt} = \frac{h_{Fl} - h(t)}{R_{hydr}}$$

$$V = A \cdot h(t)$$

$$\frac{dV}{dt} = A \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

Diese beiden Gleichungen werden im Sinn der Bilanzierung gleichgesetzt.

$$\frac{h_{Fl} - h(t)}{R_{hydr}} = A \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

$$R_{hydr} \cdot A \cdot \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = h_{Fl}$$

(c) Gekoppelte Speicherkaskade

An Hand des Schemas (siehe Abbildung 5.9) können folgende Bilanz- und Energiegleichungen aufgestellt werden.

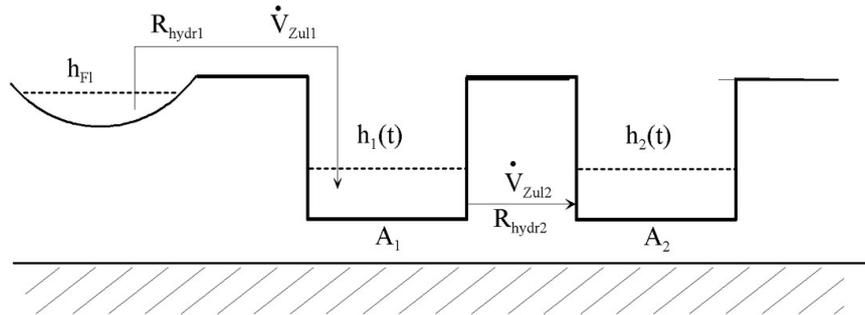


Abbildung 5.9: Gekoppelte Speicherkaskade

$$\frac{dV_{Zul1}}{dt} = \frac{h_{Fl} - h_1(t)}{R_{hydr1}}$$

$$V_1 = A_1 \cdot h_1(t)$$

$$\frac{dV_1}{dt} = A_1 \cdot \frac{dh_1(t)}{dt}$$

Diese beiden Gleichungen werden im Sinn der Bilanzierung gleichgesetzt.

$$\frac{h_{Fl} - h(t)}{R_{hydr}} = A_1 \cdot \frac{dh_1(t)}{dt}$$

$$R_{hydr1} \cdot A_1 \cdot \frac{dh_1(t)}{dt} + h_1(t) = h_{Fl} \quad (5.1)$$

Die Flächen sollen hier als konstant angenommen werden. Für den Fall der zeitlich variablen Flächen muss die Differentiation entsprechend Lösung 1a durchgeführt werden. Für das Restloch 2 gilt entsprechend:

$$\frac{dV_{Zul2}}{dt} = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_{hydr2}}$$

$$V_2 = A_2 \cdot h_2(t)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = A_2 \cdot \frac{dh_2(t)}{dt}$$

Diese beiden Gleichungen werden im Sinn der Bilanzierung gleichgesetzt.

$$\frac{h_1(t) - h_2(t)}{R_{hydr2}} = A_2 \cdot \frac{dh_2(t)}{dt}$$

$$R_{hydr2} \cdot A_2 \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} + h_2(t) = h_1(t) \quad (5.2)$$

Damit hat man zwei gekoppelte Differentialgleichungen erster Ordnung (Gleichungen 5.1 und 5.2) erhalten. Setzt man Gleichung 5.2 in Gleichung 5.1 ein, so erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (siehe Gleichung 5.3). Dabei soll

$$R_{hydrn} \cdot A_n = T_n$$

gesetzt werden:

$$\begin{aligned} R_{hydr1} \cdot A_1 \cdot \frac{dh_1(t)}{dt} + h_1(t) &= h_{Fl} \\ T_1 \cdot \frac{d\left(T_2 \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} + h_2(t)\right)}{dt} + \left(T_2 \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} + h_2(t)\right) &= h_{Fl} \\ T_1 \cdot T_2 \cdot \frac{d^2 h_2(t)}{dt^2} + (T_1 + T_2) \cdot \frac{dh_2(t)}{dt} + h_2(t) &= h_{Fl} \end{aligned} \quad (5.3)$$

(d) $V_1 + V_2 = const = V$

$$h_1 - h_2 = R_{hydrn} \cdot A \cdot \frac{dh_2}{dt}$$

$$V_1 = A_1 \cdot h_1; \quad V_2 = A_2 \cdot h_2$$

$$h_1 = \frac{V - A_2 h_2}{A_1}$$

$$\frac{V}{A_1} - \frac{A_2}{A_1} h_2 - h_2 = R_{hydrn} \cdot A \frac{dh_2}{dt}$$

$$R_{hydrn} \cdot A_2 \frac{dh_2}{dt} + h_2 \left(1 + \frac{A_2}{A_1}\right) = \frac{V}{A_1}$$

• zu Aufgabe 2 (s. S. 356)

Nach den Grundgesetzen der Dynamik und des Massenerhaltungsgesetzes (Bilanzgleichung) können folgende Gleichungen (siehe auch Gesetze der Rohr- und Gerinnehydraulik) für das angegebene Blockschaltbild (siehe Abbildung 5.10) formuliert werden.

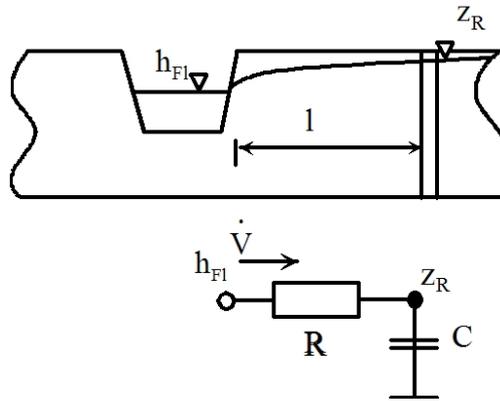


Abbildung 5.10: Schema der Grundwasserfließverhältnisse

In Anlehnung an das DARCY-Gesetz erhält man:

$$v_x = k \cdot \frac{\Delta z_R}{\Delta x}$$

$$\dot{V} = A \cdot v = k \cdot b \cdot D \cdot \frac{h_{Fl} - z_R}{l}$$

b senkrechte Breite des Grundwasserleiters

l Länge zwischen Fluss und Grundwasserbeobachtungsrohr (GWBR)

D durchströmte Mächtigkeit des Strömungsfeldes

Unter Definition eines Strömungswiderstandes

$$R = \frac{l}{k \cdot z_R \cdot b} = \frac{l}{T \cdot b}$$

erhält man:

$$h_{Fl} = \dot{V} \cdot R + z_R$$

Die Bilanzgleichung gibt die gespeicherte oder freigegebene Wassermenge pro Zeiteinheit

wider:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= S \cdot A \frac{dz_R}{dt} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} S_0 \text{ gespannter GWL} \\ n_0 \text{ ungespannter GWL} \end{array} \right\} \cdot l \cdot b \cdot \frac{dz_R}{dt} \\ \dot{V} &= C \cdot \frac{dz_R}{dt}\end{aligned}$$

Damit erhält man folgende DGL

$$h_{Fl} = R \cdot C \frac{dz_R}{dt} + z_R$$

Führt man die Zeitkonstante T_1 , nicht zu Verwechseln mit der Transmissibilität T , ein, so lautet die Differentialgleichung:

$$T_1 = R \cdot C$$

$$T_1 \frac{dz_R}{dt} + z_R = h_{Fl}$$

• zu Aufgabe 3 (s. S. 356)

An Hand des Schemas (siehe Abbildung 5.11) können folgende Bilanz- und Energiegleichungen aufgestellt werden.

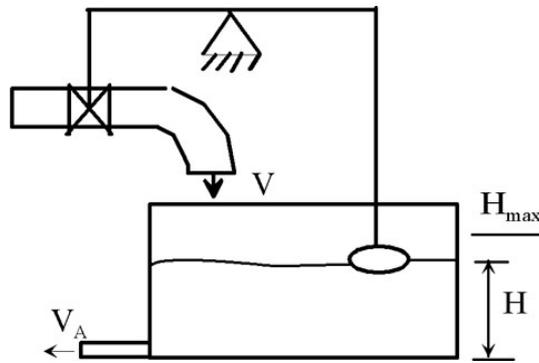


Abbildung 5.11: Wasserstandsregelung eines Bewässerungsgrabens

Das Wasservolumen im Behälter berechnet sich zu:

$$V_{Beh} = A \cdot H$$

Die Änderung des Volumens pro Zeiteinheit ergibt sich zu:

$$\frac{dV_{Beh}}{dt} = \frac{d(A \cdot H)}{dt}$$

Stellt man jetzt die Bilanzgleichung auf, dass die Änderung des Volumens im Behälter der Differenz zwischen Zustrom und Abfluss gleich sein muss, so erhält man:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{Zustr} - \dot{V}_A &= \frac{dV_{Beh}}{dt} \\ &= \frac{d(A \cdot H)}{dt} \\ &= H \frac{dA}{dt} + A \frac{dH}{dt} \end{aligned}$$

Für den hier vorliegenden Fall, dass die Füllfläche konstant ist $A = const.$ ergibt sich:

$$A \frac{dH}{dt} = \dot{V}_{Zustr} - \dot{V}_A$$

Bei der Lösung dieser Differentialgleichung müssen die Zeitabhängigkeit des Zustroms beachtet und entsprechende Anfangsbedingungen eingeführt werden.

Laut Aufgabenstellung ist:

$$\dot{V}_{Zustr} = K \cdot \dot{V}_{\max} \cdot (H_{\max} - H)$$

Damit erhält man folgende Differentialgleichung:

$$A \frac{dH}{dt} = K \cdot \dot{V}_{\max} \cdot (H_{\max} - H) - \dot{V}_A$$
$$A \frac{dH}{dt} + K \cdot \dot{V}_{\max} \cdot H = K \cdot \dot{V}_{\max} \cdot H_{\max} - \dot{V}_A$$

• zu Aufgabe 4 (s. S. 356)

Gegeben:

$$m_{qu} = 125\text{mg}, \quad V_{Boden} = V_{H_2O} = 1\text{l}$$

$$\text{zur Zeit } t = 0 \implies C_B = 125 \frac{\text{mg}}{\text{l}}, \quad C_{H_2O} = 0 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$$

Bilanzgleichung:

$$m_{qu_{Boden}} + m_{qu_{H_2O}} = m_{qu} \quad | \quad \div m_{qu_{Boden}}; \quad C = \frac{m}{V}$$

$$\frac{m_{qu_{Boden}}}{V_{Boden}} + \frac{m_{qu_{H_2O}}}{V_{Boden}} = \frac{m_{qu}}{V_{Boden}} \quad (\text{Anfangszustand})$$

$$\text{für } V_{Boden} = V_{H_2O} \text{ gilt: } C_B(t) + C_{H_2O}(t) = \frac{m_{qu}}{V_B} \implies C_B(t) = \frac{m_{qu}}{V_B} - C_{H_2O}(t)$$

Dynamische Grundgleichung:

$$\frac{dC_{H_2O}}{dt} = \frac{C_B(t) - C_{H_2O}(t)}{R_{diff}} \implies R_{diff} \cdot \frac{dC_{H_2O}(t)}{dt} = C_B(t)$$

$$R_{diff} \cdot \frac{dC_{H_2O}}{dt} + 2C_{H_2O} = \frac{m_{qu}}{V_B}$$

- zu Aufgabe 5 (s. S. 356)

Bilanzgleichung:

$$W_1 + W_2 = W_{ges.} = const.$$

$$c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2 = const.$$

Dynamische Grundgleichung

$$Q_{therm} = \frac{T_1 - T_2}{R_{therm}}$$

Die Änderung der Wärmemenge ergibt den Wärmestrom Q_{therm} .

$$\frac{d(W_1 + W_2)}{dt} = \frac{dW_{ges.}}{dt} = 0$$

$$\frac{dW_1}{dt} + \frac{dW_2}{dt} = Q_{therm1} + Q_{therm2} = 0$$

$$Q_{therm1} = -Q_{therm2}$$

Unter Berücksichtigung der dynamischen Grundgleichung folgt:

$$\frac{dW_2}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{R_{therm}}$$

$$\frac{d(c_2 m_2 T_2)}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{R_{therm}}$$

$$\frac{dT_2}{dt} + \frac{T_2}{c_2 m_2 R_{therm}} = \frac{T_1}{c_2 m_2 R_{therm}}$$

5.2 Übertragungsfunktionen

5.2.1 Aufgaben

1. Berechnen Sie die Absenkungskurve für eine Förderleistung von $\dot{V} = 0,005 \frac{m^3}{s}$ mittels der Methode der Übertragungsglieder bei einem Volumenstrom von $\dot{V} = 0,015 \frac{m^3}{s}$, wenn ein Pumpversuch folgende Werte lieferte (siehe Tabelle). Stellen Sie das Ergebnis grafisch dar. (Lösung s. S. 376)

Zeit [s]	Absenkung [m]
320	0,63
426	0,69
564	0,73
743	0,77
976	0,81
1279	0,85
1673	0,88

Zeit [s]	Absenkung [m]
2185	0,92
2850	0,96
3715	0,99
4839	1,03
6302	1,06
8202	1,10
10.000	1,14

2. Bestimmen Sie für folgende Messreihe, die durch Einspeisung einer Funktion entstanden ist, die Übertragungsfunktion einschließlich deren Parameter: (Lösung s. S. 379)

t [min]	0	1	2	4	8	15
\dot{V} [$\frac{m^3}{s}$]	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
s [m]	0	0,1	0,08	0,13	0,19	0,25

3. Bei einem Pumpversuch ist für einen Grundwasserstandort folgende Abhängigkeit zwischen Förderstrom \dot{V} und Grundwasserabsenkung s gefunden worden:

$\dot{V} \left[\frac{m^3}{s} \right]$	0	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
$s [cm]$	0	0	3	8	20	30	35	37	38	
$t [min]$	-1	0	1	2	4	10	20	40	100	

Berechnen Sie den Verlauf der Absenkung bei einer Förderrate von $\dot{V} = 0.15 \frac{m^3}{s}$. Verwenden Sie dazu die Methode der Übertragungsfunktionen. Stellen Sie die Messwerte und die Berechnungsergebnisse grafisch dar. (Lösung s. S. 383)

4. Bei einem Gütepumpversuch wurden für zwei unterschiedliche Standorte $P1$ und $P2$, die sich in einer Entfernung vom Infiltrationsbrunnen von $r_1 = 350m$ und $r_2 = 1000m$ befinden, nachfolgende Konzentrationswerte C des eingebrachten Tracers gemessen. In den Infiltrationsbrunnen wird eine dauerhafte Konzentration von $C_{(0,t)} = 10 \frac{g}{m^3}$ beigegeben.

$t [10^7 s]$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
$C_{r1} \left[\frac{g}{m^3} \right]$	2,4	2,7	3,05	3,55	4,80	6,50	7,95	8,70	9,10	9,20	9,25
$C_{r2} \left[\frac{g}{m^3} \right]$	2,4	2,7	3,04	3,32	3,57	3,81	4,01	4,20	4,37	4,53	4,67

Berechnen Sie die Übertragungsfunktionen für diese Systeme.

5. Bei einem Tracerversuch wird an dem Brunnen 1 eine Stoffkonzentration von $50kg$ konzentrierte NaCl-Lösung $5min$ lang in den Boden infiltriert. Berechnen Sie den Verlauf einer möglichen Schadstoffausbreitung, wenn durch eine Havarie $1000kg$ Lösung in den Boden gelangt wären. Stellen Sie die Messwerte und die prognostizierten Wertegrafisch dar. (Lösung s. S. 390)

$t [min]$	24	30	35	40	42	50	60	70	80	90	100	120
$C \left[\frac{mg}{l} \right]$	0	2,0	7,0	9,7	9,8	7,5	5,0	3,5	1,5	0,5	0,3	0

6. Bei einem Pumpversuch wurden folgende Grundwasserstände gemessen:

$t [min]$	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135
$s [cm]$	16,00	15,25	15,12	15,07	15,01	14,96	14,95	14,94	14,94	14,938
$\dot{V} \left[\frac{m^3}{s} \right]$	0	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015	0,015

Der Grundwasserleiter hat folgende Parameter:

$$h_n = 16m, M = 10m, k = 0,001 \frac{m}{s}, S_0 = 0,0001, n_0 = 0,20$$

Stellen Sie für dieses Modell die ersten vier Gleichungen des Faltungsintegrals bis zum Beobachtungszeitpunkt von $t = 135min$ auf. (Lösung s. S. 393)

7. Bei einem Säulen-Durchlaufversuch wurde folgende Impulsantwortfunktion auf einen Konzentrationsstoß eines Schadstoffes von $30mg/l$ gemessen (siehe Abbildung 5.12). (Lösung s. S. 395)

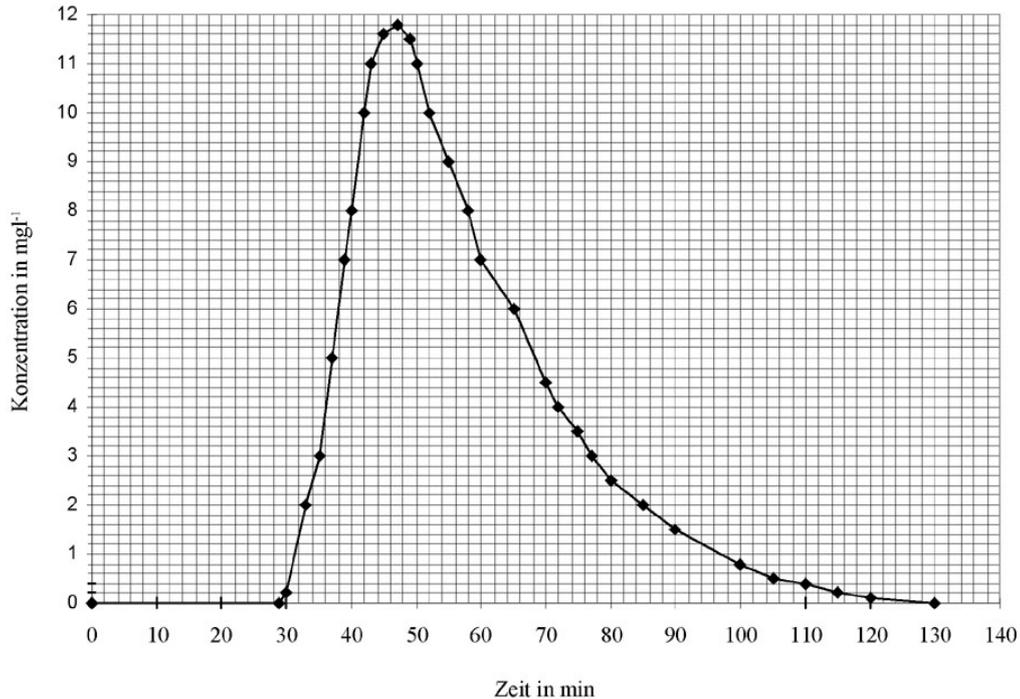


Abbildung 5.12: Impulsantwort eines Säulen-Durchlaufversuches

- (a) Bestimmen Sie zu diesen Messwerten die Gewichtsfunktion und die Übertragungsfunktion.
 (b) Prognostizieren Sie die Konzentration nach $160min$, wenn die Eingangskonzentration folgenden zeitlichen Verlauf hat:

$t [min]$	0	20	40	60	80	100	120	140
$C [\frac{mg}{l}]$	30	50	80	60	100	50	10	0

8. In einem Grundwasserbeobachtungsrohr wurden nachfolgende Konzentrationen infolge eines Tracerversuches gemessen. Bei dem Tracerversuch wurden $50kg$ konzentrierte NaCl-Lösung innerhalb von 5 Stunden infiltriert.
 (a) Berechnen Sie den Verlauf des Gesamtsalztransportes im Pegelrohr, wenn folgende Einzelmesswerte gewonnen wurden.

- (b) Stellen Sie die Messkurve und die berechnete Funktion grafisch dar.

$t [d]$	0	1	2	4	5	7	9
$C_{NaCl} \left[\frac{mg}{l} \right]$	0	0	1	2	1,5	1	0

- (c) Berechnen Sie mittels der Methode der Übertragungsfunktion die zu erwartende Durchbruchkurve und stellen Sie sie grafisch dar, wenn mit einer Infiltration von $100kg$ innerhalb von 2,5 Stunden gearbeitet wurde.

9. Bei einem Pumpversuch wurden folgende Grundwasserstände gemessen (siehe Abbildung 5.13)

- (a) Berechnen Sie das Wasserdefizit (Volumen) des Absenkungstrichters, wenn der Grundwasserleiter folgende Kennwerte besitzt.

$$h_n = 16m, M = 10m, k = 0,001m \cdot s^{-1}, S_0 = 0,0001m^{-1}, n_0 = 0,20$$

- (b) Berechnen Sie mittels der Methode der Übertragungsglieder und dem unter a) gefundenen Wert für den Volumenstrom \dot{V} die Absenkungskurve für eine Förderleistung von $0,005m^3 \cdot s^{-1}$.

Stellen Sie für dieses Modell die ersten vier Gleichungen des Faltungsintegrals bis zum Beobachtungszeitpunkt von $t = 1d$ auf.

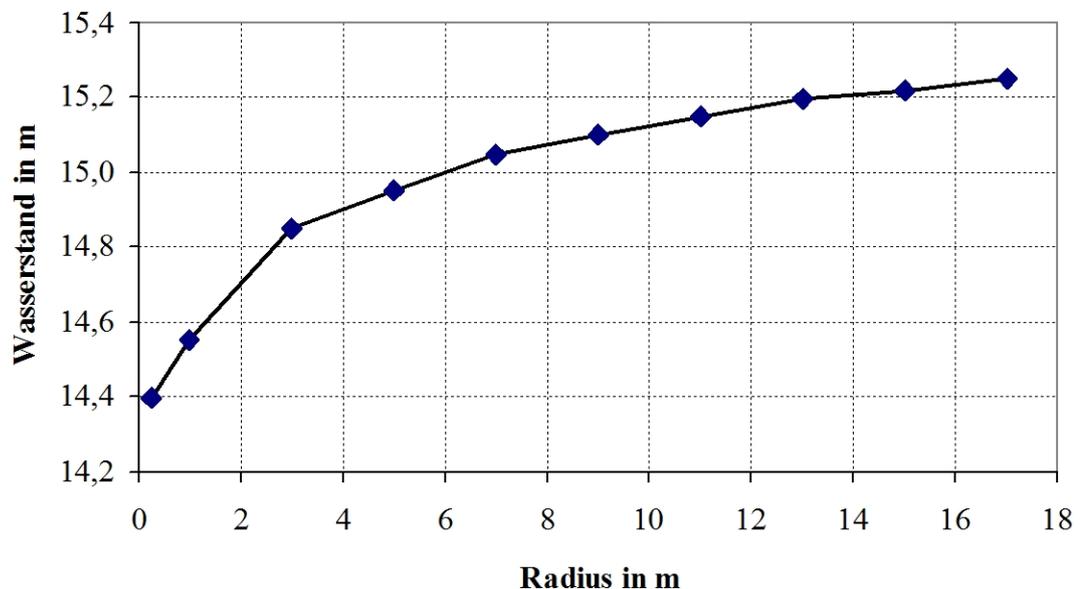


Abbildung 5.13: Grundwasserstand in Abhängigkeit vom Radius

10. Mittels Säulendurchlaufversuchen ist das Transportverhalten des Bodens für einen bestimmten Schadstoff ermittelt worden. Als Eingangssignal ist ein Impuls (DIRAC-Impuls) verwendet worden. Welche von den drei Beschreibungsformen des Übertragungsverhaltens erhält man am Auslauf der Säule, wenn das Verhalten der Säule als Black-Box betrachtet wird.

(Lösung s. S. 399)

11. Bei einem anderen Säulendurchlaufversuch hat man folgende Konzentrationen am Ausgang gemessen, nachdem die Säule mit einem Impuls von einer Dauer von $10d$ beauflagt wurde.

t in d	0	30	60	90	120	150	180	320	340	300
C in mg/l	0	15	45	55	45	20	10	5	2	0

Prognostizieren Sie mittels des Faltungsintegrals die Konzentration am Auslauf der Säule, nach einer Zeit von $600d$ wenn folgende Eingangskonzentrationen gemessen wurden.

t in d	450	480	510	540	570	600
C in mg/l	100	80	70	60	70	50

(Lösung s. S. 400)

12. Prognostizieren Sie den Temperaturverlauf in einer Uferfiltratsfassung $\delta_{Fa,p}$ unter Verwendung des Faltungsintegrals, wenn für den Fluss δ_{Fl} und für die Fassung $\delta_{Fa,g}$ folgende Messwerte bekannt sind:

(Lösung s. S. 401)

$\delta_{Fl} [^{\circ}C]$	14,2	16,0	17,7	19,4	17,2	16,0	17,6	18,6	14,8	12,0	13,7
$\delta_{Fa,g} [^{\circ}C]$	8,5	10,0	11,4	14,0	14,1	14,7	15,4	15,8	15,6	14,9	14,1
$\delta_{Fa,p} [^{\circ}C]$											
Zeit[d]	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150

- (a) Berechnen Sie den Temperaturverlauf ab dem siebenten Zeitpunkt unter Verwendung von jeweils drei Gleichungen des Faltungsintegrals und prognostizieren Sie den zehnten und elften Zeitpunkt.

- (b) Berechnen Sie den Temperaturverlauf ab dem fünften Zeitpunkt unter Verwendung von jeweils fünf Gleichungen des Faltungsintegrals und prognostizieren Sie

den zehnten und elften Zeitpunkt.

(c) Vergleichen Sie die berechnete Temperatur in der Fassung mit dem gemessenen.

5.2.2 Lösungen

- zu Aufgabe 1 (s. S. 370)

Der zeitliche Verlauf des Grundwasserstandes kann durch ein Verzögerungsverhalten 1. Ordnung angenähert werden:

$$x_a = K \cdot x_e \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Dieses Übertragungsverhalten ergibt sich aus der Lösung der Differentialgleichung

$$T \cdot \frac{dx_a}{dt} + x_a = f(t)$$

unter der Besonderheit, dass $f(t)$ eine Sprungfunktion mit der Sprunghöhe x_e ist (siehe Abschnitt Analytische Methoden, Differentialgleichungen erster Ordnung, z. B. Aufgabe 4, Seite 137 und GRÄBER, LB Systemanalyse, Abschnitt Analytische Methoden, Differentialgleichungen erster Ordnung) ergibt sich:

$$s = K \cdot \dot{V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

$$s_{t \rightarrow \infty} = s_{\max}$$

$$s_{t \rightarrow \infty} = 1,14m$$

$$\dot{V} = 0,015 \frac{m^3}{s}$$

$$K = \frac{x_{a\infty}}{x_{e\infty}} = \frac{s_{\max}}{\dot{V}}$$

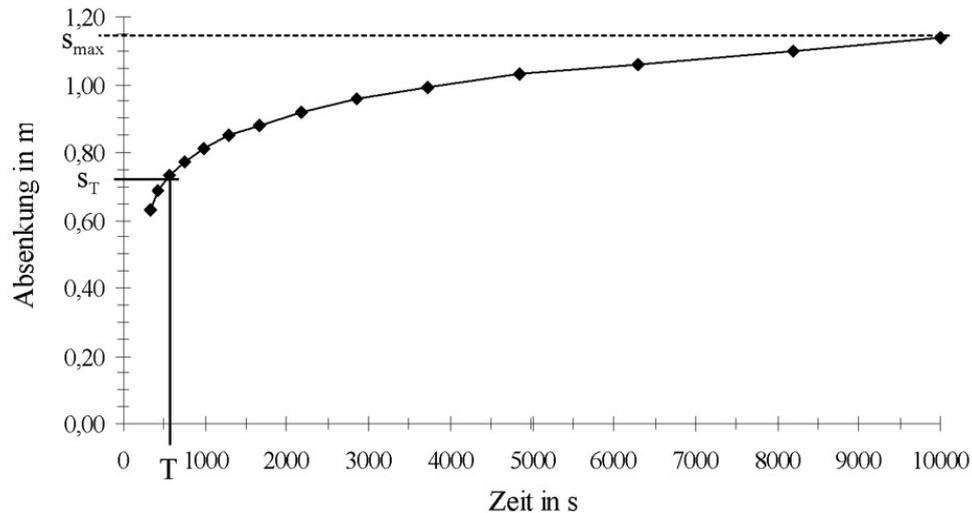
$$= \frac{1,14m}{0,015m^3}$$

$$K = 76 \frac{s}{m^2}$$

Die Zeitkonstante T wird aus dem Diagramm in Abbildung 5.14 abgelesen.

Für den Zeitpunkt $t = T$ und unter Beachtung von $K = \frac{s_{\max}}{\dot{V}}$ gilt z. B.:

$$s = K \cdot \dot{V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Abbildung 5.14: Bestimmung der Zeitkonstanten T aus dem Absenkungsverlauf

$$\begin{aligned}
 s_{t=T} &= K \cdot \dot{V} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \\
 &= s_{\max} \cdot (1 - e^{-1}) \\
 s_{t=T} &= s_{\max} \cdot 0,632
 \end{aligned}$$

D.h. wenn die Absenkung den Wert $s = 0,632s_{\max}$ erreicht hat, ist eine Zeit $t = T$ vergangen.

Für diese Aufgabenstellung erhält man:

$$s_{t=T} = 0,632s_{\max} = 0,72m$$

Aus dem Diagramm kann ein Wert von $T \approx 9min$ abgelesen werden. Damit ergibt sich die Lösung der Aufgabenstellung für eine Förderleistung von $\dot{V} = 0,005 \frac{m^3}{s}$ zu:

$$\begin{aligned}
 s &= \dot{V} \cdot 0,76 \frac{s}{m^3} (1 - e^{-\frac{t}{9min}}) \\
 &= 0,005 \frac{m^3}{s} \cdot 0,76 \frac{s}{m^3} (1 - e^{-\frac{t}{9min}}) \\
 s &= 0,38m (1 - e^{-\frac{t}{9min}})
 \end{aligned}$$

s_{0min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-0})$	$= 0,000m$
s_{1min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-\frac{1}{9}})$	$= 0,040m$
s_{2min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-\frac{2}{9}})$	$= 0,076m$
s_{4min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-\frac{4}{9}})$	$= 0,136m$
s_{9min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-1})$	$= 0,240m$
s_{18min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-2})$	$= 0,329m$
s_{27min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-3})$	$= 0,361m$
s_{36min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-4})$	$= 0,373m$
s_{72min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-8})$	$= 0,380m$
s_{144min}	$= 0,38m \cdot (1 - e^{-16})$	$= 0,380m$

Die Werte dieser Tabelle sind in Abbildung 5.15 grafisch dargestellt.

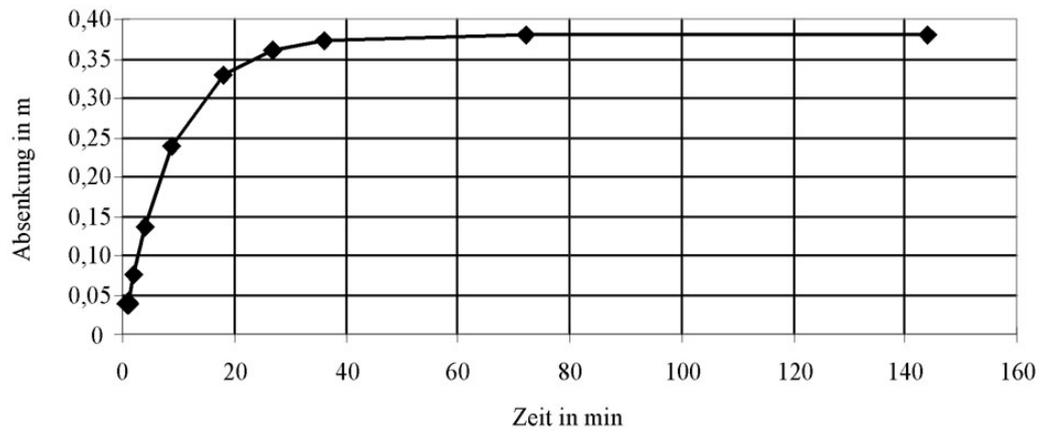


Abbildung 5.15: Absenkungsverlauf bei $\dot{V} = 0,005m^3s^{-1}$

- zu Aufgabe 2 (s. S. 370)

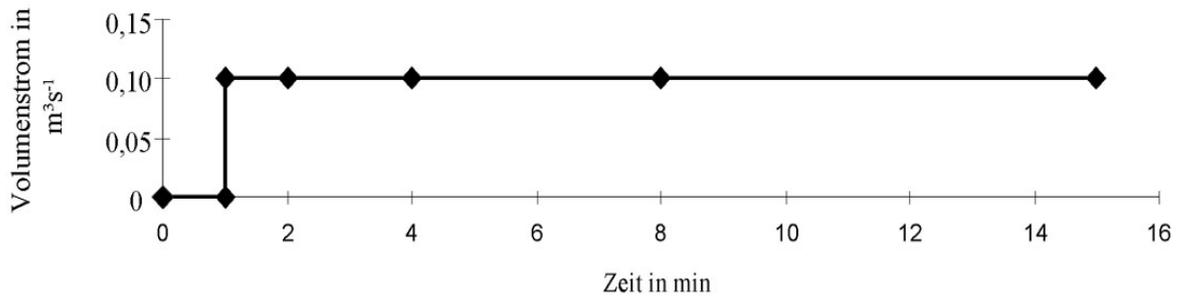
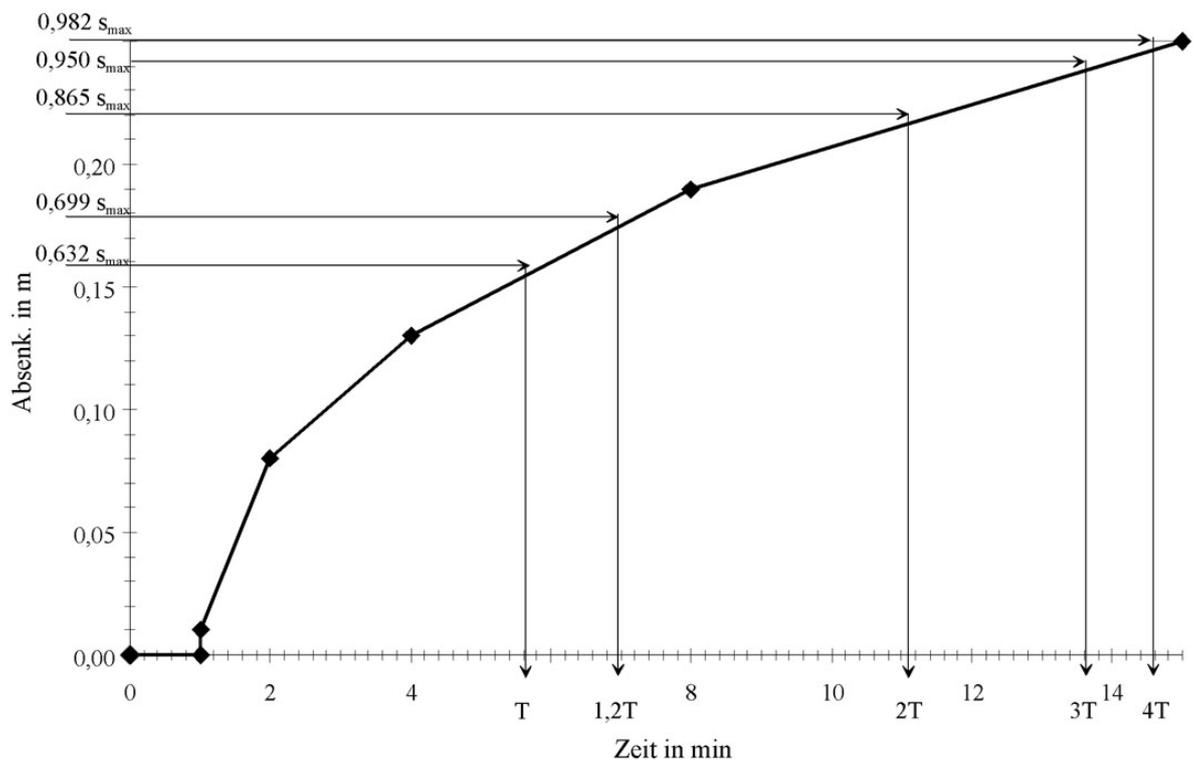
Abbildung 5.16: Eingangssignal $\dot{V} = 0,1 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ 

Abbildung 5.17: Bestimmung der Zeitkonstante

Übertragungsverhalten

Bei dem vorliegenden System, dessen Sprungantwortsignal in Abbildung 5.17 dargestellt ist, handelt es sich offensichtlich um ein Übertragungsverhalten mit Verzögerung 1. Ordnung, ein so genanntes PT_1 -Glied. Dabei muss beachtet werden, dass das Sprungsignal erst zum Zeitpunkt 1 min beginnt. Die vorliegende Absenkung von 1 cm nach einer Sekunde ist dabei Messfehlern zuzuordnen, da beim Anspringen der Pumpe noch keine Absenkung vorhanden sein kann. Damit müssen auch die Parameter der Übertragungsfunktion auf diesen Zeitpunkt

bezogen werden, d.h. es wird eine neue Zeitachse definiert, die gegenüber der Originalachse genau um der Laufzeit $t_L = 1min$ verschoben ist:

$$x_a = K \cdot x_e \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_1}}) \quad \text{bzw.}$$

$$G(P) = \frac{K}{(1 + pT_1)}$$

$$s = K \cdot \dot{V} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

Parameter:

Ermittlung von K:

$$s_{t=\infty} = K \cdot \dot{V}_{t=\infty} \cdot (1 - e^{-\frac{\infty}{T_1}})$$

$$s_{t=\infty} = K \cdot \dot{V}_{t=\infty}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{s_{t=\infty}}{\dot{V}_{t=\infty}} \\ &= \frac{0,25m \cdot s}{0,1m^3} \end{aligned}$$

$$K = 2,5 \frac{s}{m^2}$$

Die Bestimmung von T_1 ist nach drei Varianten möglich:

Variante 1

\implies bei $t = T_1$ gilt:

$$s_{t=T_1} = K \cdot \dot{V}_{t=T_1} \cdot (1 - e^{-\frac{T_1}{T_1}})$$

$$= K \cdot \dot{V}_{t=T_1} \cdot 0,632$$

Unter Beachtung, dass das Sprungsignal über alle Zeiten T den gleichen Wert besitzt (Def. des Sprungsignals), kann gesetzt werden:

$$K \cdot \dot{V}_{t=T_1} = K \cdot \dot{V}_{t=\infty} = s_{t=\infty}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} s_{t=T_1} &= s_{t=\infty} \cdot 0,632 \\ &= 0,25m \cdot 0,632 \\ s_{t=T_1} &= 0,158m \end{aligned}$$

Aus dem Diagramm lässt sich ablesen:

$$\Rightarrow t = T_1 = 5,6min - 1min$$

$$T_1 = 4,6min$$

Variante 2

\Rightarrow aus dem Anstieg im Null-Punkt:

$$\begin{aligned} \tan \delta_{t'=0} &= \frac{s_{t'=0} - s_{t'=1min}}{t'_0 - t'_{1min}} \\ &= \frac{0,08m}{1min} \\ \tan \delta_{t'=0} &= 0,08 \frac{m}{min} \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der Tangente (Sekante) mit der Asymptote ist:

$$s_{tTangente} = \tan \delta \cdot T_1$$

$$s_{tTangente} \equiv s_{t=\infty}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{s_{t=\infty}}{\tan \delta} \\ &= \frac{0,25m \cdot min}{0,08m} \end{aligned}$$

$$T_1 = 3,125min$$

Der Unterschied zwischen der ersten und der zweiten Berechnung resultiert daraus, dass Messfehler sich besonders stark in der Anfangsphase des Pumpversuchs auswirken. Weiterhin wurde statt der geforderten Tangente die Sekante benutzt.

Variante 3

Hier wird das Verfahren der Variante 1 auf das ganzzahlige Vielfache der Zeitkonstanten ausgedehnt. Setzt man in der Übergangsfunktion die Werte $t = 1 \cdot T_1; 1,2 \cdot T_1; 2 \cdot T_1; 3 \cdot T_1$ und $4 \cdot T_1$ ein, so ergibt sich folgende Tabelle:

$n = \frac{t_n}{T}$	1	1,2	2	3	4
$\frac{x_a}{x_{a\infty}}$	0,632	0,699	0,865	0,950	0,982
$s_{t=nT} = 0,25m \frac{x_a}{x_{a\infty}}$	0,158	0,175	0,216	0,238	0,246
$t_n [min]$	4,6	6,2	9,8	12,2	13,4
$T = \frac{t_n}{T} [min]$	4,6	5,2	4,9	4,1	3,35
Mittelwert T [min]	4,5				

Dieses Verfahren ermöglicht die Eliminierung statistischer Messfehler. Die Abweichung der Zeitkonstanten bei steigender Zeit liegt u.a. an der fehlerhaften Ermittlung des asymptotischen Endwertes $s_{a\infty}$. Auch liegen für den Bereich zwischen $8min$ und $15min$ keine Messwerte vor. Es sind dort nur die linear interpolierten Werte benutzt worden. Das Übergangsverhalten dieses Pumpversuchs hat damit folgendes Aussehen:

$$s_t = 2,5 \frac{s}{m^2} \cdot \dot{V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{4,6min}} \right)$$

- zu Aufgabe 3 (s. S. 370)

Der erste Schritt bei der Bestimmung von Übertragungsfunktionen ist die grafische Darstellung der Messwerte.

Es handelt sich hier um zwei Übertragungsfunktionen (Wirkungen), welche die gleiche Ursache haben. Man sollte sie zur besseren Übersicht in getrennten Diagrammen behandeln.

Bestimmung der Konzentration C_{r1}

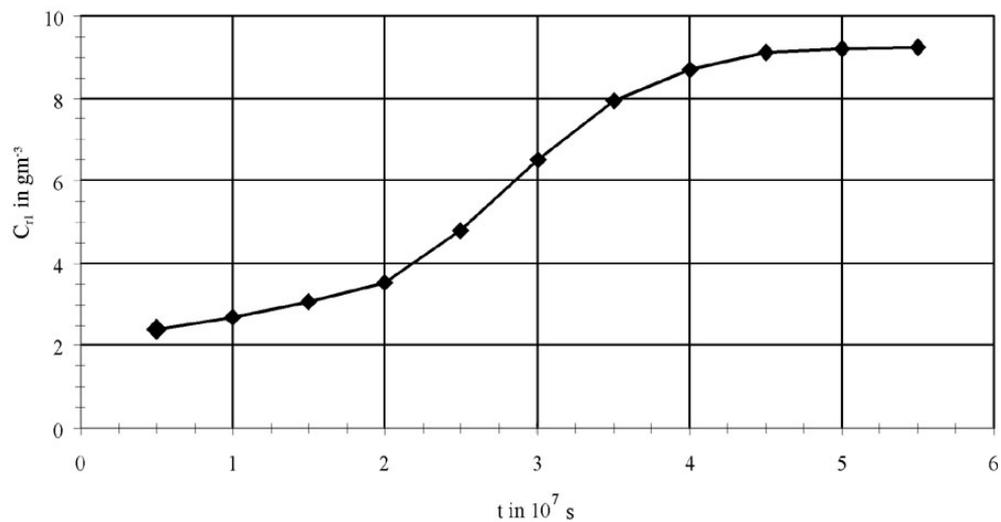


Abbildung 5.18: Konzentrationsverlauf C_{r1}

Aus der Abbildung 5.18 sieht man deutlich, dass es sich um ein Übertragungsverhalten mit Verzögerung zweiter Ordnung handelt. Da der Vorgang nicht mit einer Konzentration von $C_{r1} = 0 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ beginnt, muss man, bevor die charakteristischen Werte eingetragen werden, eine Koordinatentransformation durchführen. Der Wert von $0,5 \text{ s}$ muss als Laufzeit T_L abgezogen werden.

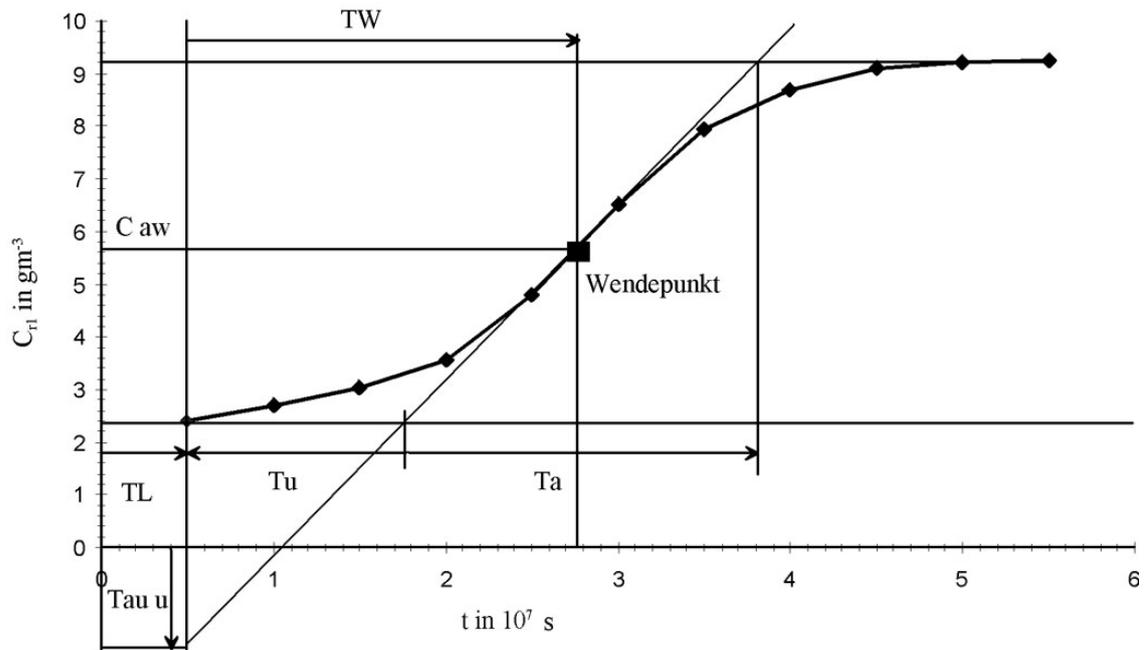


Abbildung 5.19: Konzentrationsverlauf mit ausgewählten Punkten zur Parameterbestimmung

Aus der Abbildung 5.19 lassen sich alle charakteristischen Werte ablesen:

Laufzeit:	T_L	$0,5 \cdot 10^7 s$
Verzugszeit:	T_u	$1,3 \cdot 10^7 s$
Wendepunktzeit:	T_w	$2,4 \cdot 10^7 s$
Anlaufzeit:	T_a	$2 \cdot 10^7 s$
	τ_u	$\tau_u = C_u = 4,2 \frac{g}{m^3}$
Wendepunktkonz.:	C_{aW}	$(5,6 \frac{g}{m^3} - 2,4 \frac{g}{m^3}) = 3,2 \frac{g}{m^3}$
Konz. für $t = \infty$	C_∞	$6,8 \frac{g}{m^3}$

Die Konzentration am Wendepunkt ergibt sich aus der gemessenen Konzentration, vermindert um die "Ruhekonzentration" bei der Laufzeit T_L . Dies entspricht der Verschiebung des Koordinatensystems um die "Ruhekonzentration". Außerdem wurde eine Verschiebung des Koordinatensystems um die Totzeit T_L vorgenommen.

Mit diesen Werten lässt sich unterscheiden, ob es sich um ein Übertragungsverhalten nach Modell I oder II handelt. Dazu werden die normierten Werte h_{aW} und τ_u berechnet und mit den Werten der Tabelle nach SREJC in Vergleich gesetzt:

Modelltyp nach STREJC	$\frac{x_{aW}}{x_{a\infty}}$	$\frac{\tau_u}{x_{a\infty}}$
I	$\leq 0,264$	$\leq 0,104$
II	$> 0,264$	$> 0,104$

$$h_{aW} = \frac{C_{aW}}{C_{\infty}} = \frac{3,2 \frac{g}{m^3}}{6,8 \frac{g}{m^3}} = 0,47 > 0,264$$

$$\tau_u = \frac{C_U}{C_{\infty}} = \frac{4,2 \frac{g}{m^3}}{6,8 \frac{g}{m^3}} = 0,62 > 0,104$$

Damit handelt es hier um ein Übertragungsverhalten nach Modell II, d.h. mit gleichen Zeitkonstanten:

$$G(p) = \frac{K e^{pT_L}}{(1 - p\tau)^n} \quad \text{für Modelltyp II}$$

n	$\frac{\tau_U}{x_{a\infty}}$	$\frac{x_{aW}}{x_{a\infty}}$	$\frac{T_W}{\tau}$	$\frac{T_u}{\tau}$	$\frac{T_a}{\tau}$
1	0	0	0	0	1
2	0,104	0,264	1	0,282	2,718
3	0,218	0,323	2	0,805	3,695
4	0,319	0,352	3	1,425	4,463
5	0,410	0,371	4	2,100	5,119
6	0,493	0,384	5	2,811	5,699
7	0,570	0,394	6	3,549	6,226
8	0,642	0,401	7	4,307	6,711

Wenn man in oben aufgeführter Tabelle 3, Kenngrößenbestimmung für Modelltyp II, die Werte für $\frac{h_{aW}}{h_{a\infty}}$ und $\frac{\tau_u}{h_{a\infty}}$ vergleicht, so erkennt man, dass es sich hier um eine Übergangsfunk-

tion mit $n = 8$ gleichen Zeitkonstanten handelt.

$$x_a = x_e \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}}\right)^8 \quad \text{bzw.}$$

$$C'_{r1} = C'_{0,t} \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}}\right)^8$$

Berechnung der Zeitkonstanten τ

Dazu gibt es, entsprechend den unterschiedlichen charakteristischen Werten, drei Methoden:

Gleichung	Messwert [$10^7 s$]	Zeitkonstante τ [$10^7 s$]
$\frac{T_W}{\tau} = 7$	2,40	0,34
$\frac{T_u}{\tau} = 4,307$	1,30	0,30
$\frac{T_a}{\tau} = 6,711$	2,00	0,30
Mittelwert		0,31

Die Konstante K wird, wie bereits mehrfach durchgeführt, aus dem Wert $C_{t=\infty}$ berechnet.

$$K = \frac{C_{r1,t=\infty}}{C'_{0,t}} = \frac{6,8 \frac{g}{m^3}}{10 \frac{g}{m^3}} = 0,68$$

oder man setzt die Gleichung direkt in die Übergangsfunktion ein und berücksichtigt, dass für das Sprungsignal gilt: $C_{0,t=\infty} = C_{0,t}$

In der endgültigen Gleichung muss die eingangs durchgeführte Koordinatentransformation bezüglich der Zeitachse um den Betrag der Laufzeit T_L wieder rücktransformiert werden: $t = t' + T_L$

Auch für die Konzentrationswerte muss die eingeführte Koordinatentransformation rückgängig gemacht werden: $C_{r1} = C_{r1}' + C_{Grund}$

Damit erhält man die Übergangsfunktion, mit deren Hilfe sich das Zeitverhalten der Konzentration C_{r1} am Punkt P_{r1} für beliebige Eingangskonzentrationen berechnen lässt:

$$C_{r1} = \left\{ \begin{array}{ll} C_{Grund} & 0 \leq t < T_L \\ C'_{r1,t=\infty} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-T_L}{\tau}}\right)^8 + C_{Grund} & t \geq T_L \end{array} \right\}$$

bzw. mit konkreten Zahlenwerten:

$$C_{r1} = \left\{ \begin{array}{ll} 2,4 \frac{g}{m^3} & 0 \leq t < 0,5 \cdot 10^7 s \\ 6,85 \frac{g}{m^3} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-0,5 \cdot 10^7 s}{0,31 \cdot 10^7 s}} \right)^8 + 2,4 \frac{g}{m^3} & t \geq 0,5 \cdot 10^7 s \approx 58d \end{array} \right\}$$

Nach dieser ermittelten Übergangsfunktion kann eine Überprüfung der angepassten Kurve durchgeführt werden (siehe Abbildung 5.20).

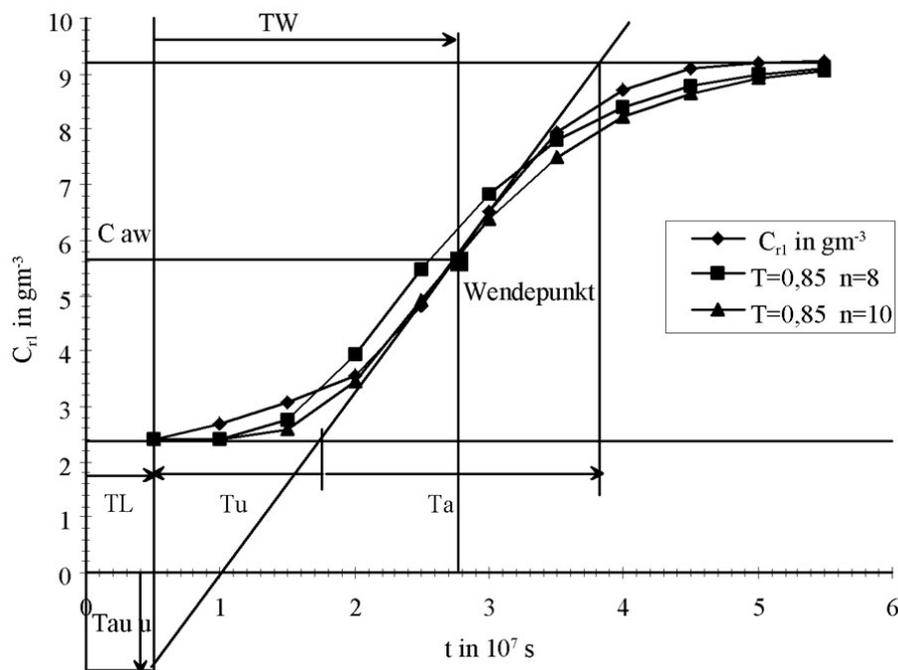


Abbildung 5.20: Konzentrationsverlauf C_{r1} mit Bestimmung der Parameter

Dabei zeigt sich, dass für eine brauchbare Anpassung der berechneten Funktionswerte an die gemessenen der Parameter T auf einen höheren Wert gesetzt werden muss (siehe Reihe 2, $T = 0,85$). Eine weitere Verbesserung der Anpassung erreicht man, wenn auch der Exponent erhöht wird (siehe Reihe 3, $T = 0,85$, $n = 10$).

Bestimmung der Konzentration C_{r2}

Die Auswertung der Messwerte des zweiten Messpunktes erfolgt in analoger Weise.

Aus dem Diagramm (siehe Abbildung 5.21) lassen sich alle charakteristischen Werte ablesen. Dabei ist zu beachten, dass eine Verschiebung des Koordinatensystems um die Laufzeit T_L und die Hintergrundkonzentration C_L (=Konzentration, die unabhängig vom betrachteten Prozess ständig vorhanden ist) erfolgen muss.

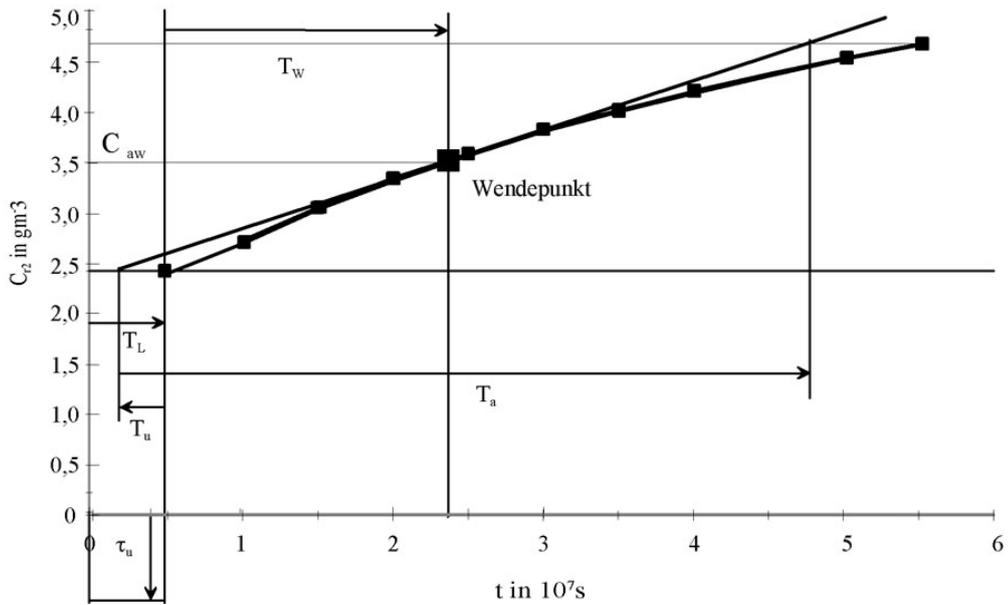


Abbildung 5.21: Konzentrationsverlauf C_{r2} und Parameterbestimmung

Laufzeit:	T_L	$0,5 \cdot 10^7\text{s}$
Verzugszeit:	T_u	$0,3 \cdot 10^7\text{s}$
Wendepunktzeit:	T_w	$1,975 \cdot 10^7\text{s}$
Anlaufzeit:	T_a	$4,55 \cdot 10^7\text{s}$
Hintergrundkonzentration	C_L	$2,4 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$
Wendepunktkonzentration:	C_{au}	$1,1 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$
Konzentration für $t = \infty$	C_∞	$2,3 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$
Konzentration für $t = 0$:	C_L	$2,4 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$

Mit diesen Werten lässt sich nach STREJC (siehe Tabelle, Seite ??) unterscheiden, ob es sich um das Modell I oder II handelt. Dazu werden die normierten Werte h_{au} berechnet und mit

den Tabellenwerten verglichen:

$$h_{aW} = \frac{C_{aW}}{C_{\infty}}$$

$$= \frac{1,1 \frac{g}{m^3}}{2,3 \frac{g}{m^3}}$$

$$h_{aW} = 0,478 > 0,264$$

Damit handelt es hier um ein Übertragungsverhalten nach Modell II, d.h. mit gleichen Zeitkonstanten.

Wenn man in Tabelle II die Werte für h_{aW} vergleicht, so erkennt man, dass es sich um eine Übergangsfunktion mit $n = 8$ gleichen Zeitkonstanten handelt.

Berechnung von τ :

Gleichung	Messwert [$10^7 s$]	Zeitkonstante τ [$10^7 s$]
$\frac{T_W}{\tau} = 7$	1,98	0,28
$\frac{T_u}{\tau} = 4,307$	0,30	0,07
$\frac{T_a}{\tau} = 6,711$	4,55	0,68
Mittelwert		0,34

Man sieht hier, dass die berechneten Werte für t sehr stark streuen. Das deutet darauf hin, dass die angesetzte Übergangsfunktion wenig geeignet ist, diesen Vorgang anzunähern. Wahrscheinlich ist es sinnvoller, die Näherung durch eine Übergangsfunktion 1. Ordnung nachzubilden. Eine weitere Fehlerquelle besteht darin, dass die Messwerte nicht bis zum stationären Endzustand aufgenommen wurden, d.h. der Versuch wurde zu zeitig abgebrochen. Dies erkennt man daran, dass die Kurve noch nicht das typisch asymptotische Verhalten bei großen Zeiten zeigt.

• zu Aufgabe 5 (s. S. 370)

Der erste Schritt bei der Bestimmung von Übertragungsfunktionen ist die grafische Darstellung der Messwerte: (siehe Abbildung 5.22)

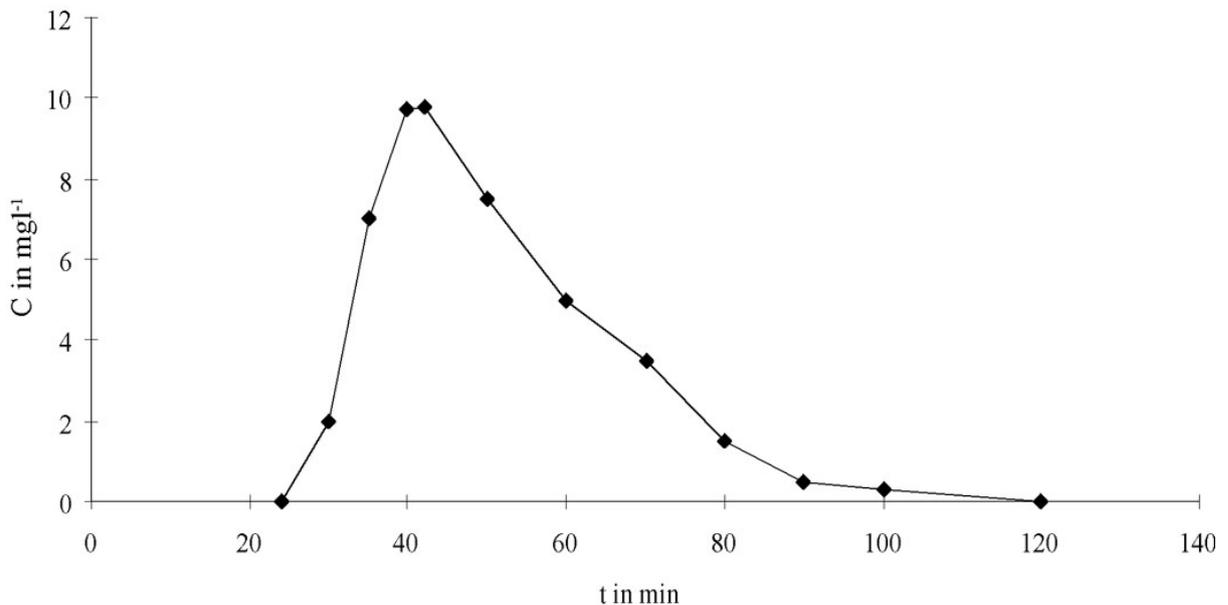


Abbildung 5.22: Impulsantwort eines Säulen-Durchlaufversuches

Man sieht hier die Antwortfunktion auf eine Impulsanregung, die in der Aufgabenstellung auch angedeutet war.

Die Übergangsfunktion für ein solches System lautet:

$$x_a = x_e \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t'}{T'}}\right)^n \quad \text{bzw.}$$

$$C'_{r1} = C'_{0,t} \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t'}{T'}}\right)^n$$

Auch hier gilt es, aus der grafischen Darstellung die unbekanntenen Größen T und n zu bestimmen (siehe Abbildung 5.23).

Aus diesem Diagramm lassen sich folgende Werte ablesen, wobei beachtet werden muss, dass hier eine Koordinatentransformation um den Wert der Laufzeit von $T_L = 24min$ erfolgen muss:

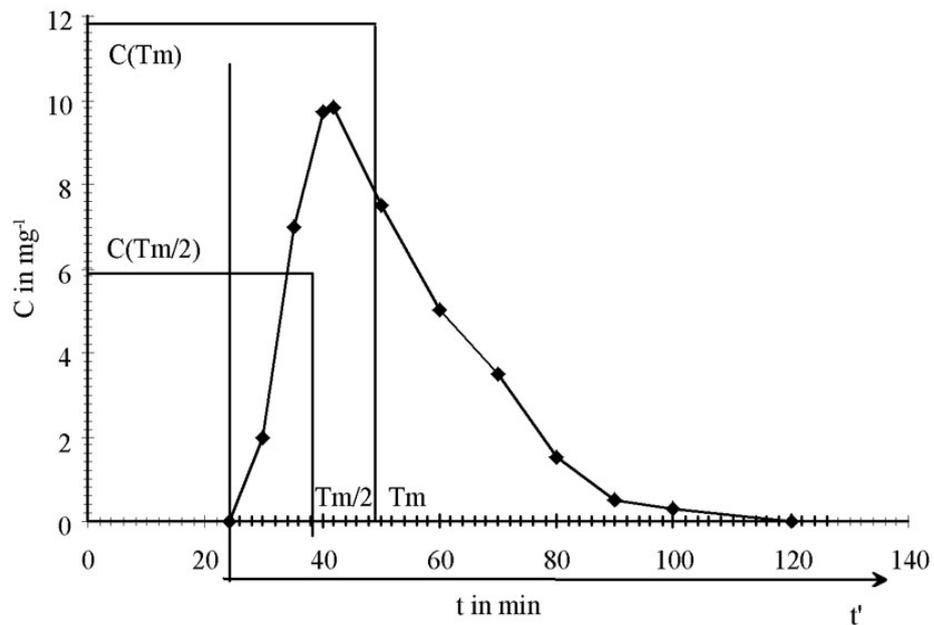


Abbildung 5.23: Auswertung der Impulsantwort

maximale Konzentration:	$C_{(T_m)}$	$9,8 \frac{mg}{l}$
Zeitpunkt der maximalen Konzentration:	T_m	$18min$
Halbierte Zeitspanne:	$\frac{T_m}{2}$	$9min$
Konzentration bei $\frac{T_m}{2}$	$C_{(\frac{T_m}{2})}$	$4,9 \frac{mg}{l}$

Aus dem Verhältnis von

$$\frac{C_{(T_m)}}{C_{(\frac{T_m}{2})}} = \frac{9,8 \frac{mg}{l}}{4,9 \frac{mg}{l}} = 2,0$$

und der Tabelle 3, Seite 385 ergibt sich, dass n zwischen 4 und 5 liegen muss. Daraus resultiert auch die Berechnung der Zeitkonstanten τ und der Konstanten K :

n	$\frac{T_m}{T}$	T	$\frac{T \cdot C_{(T_m)}}{A \cdot K}$	K
4	3	6	0,224	$1,05 \cdot 10^{-6}$
5	4	4,5	0,196	$9,0010 \cdot 10^{-7}$

$$T_m = 18 \text{ min}$$

$$C_{(T_m)} = 9,8 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$$

$$A = 50 \text{ kg} \cdot 5 \text{ min}$$

Die Größe A ist der Energie- bzw. Masseinhalt des realen Impulses, der eingewirkt hat. Dies entspricht der Gesamtmenge des eingebrachten Tracers.

Damit lautet die Übergangsfunktion unter Berücksichtigung der Koordinatenrücktransformation:

$$C = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \leq t < T_L \\ C_0 \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-T_L}{T'}}\right)^n & T_L \leq t \end{array} \right\}$$

bzw. mit Zahlenwerten für das Modell $n = 4$:

$$C = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \leq t < 24 \text{ min} \\ 50 \text{ kg} \cdot 1,05 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mg}}{\text{l} \cdot \text{kg}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-24 \text{ min}}{6 \text{ min}}}\right)^4 & 24 \text{ min} \leq t \end{array} \right\}$$

bzw. für das Modell mit $n = 5$:

$$C = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \leq t < 24 \text{ min} \\ 50 \text{ kg} \cdot 0,9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{mg}}{\text{l} \cdot \text{kg}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-24 \text{ min}}{4,5 \text{ min}}}\right)^4 & 24 \text{ min} \leq t \end{array} \right\}$$

- zu Aufgabe 6 (s. S. 370)

Ausgangspunkt für den Ansatz des Faltungsintegrals ist die zeitliche Grundwasserstandskurve am Punkt P mit $x_p = 105,00m$ und $y_p = 100m$. (siehe Abbildung 5.24). Als Eingangsfunktion wird die Förderrate der Pumpe angesetzt, die konstant $0,015 \frac{m^3}{s}$ betragen soll. Das Abtastzeitintervall ergibt sich daraus, dass laut Aufgabenstellung die ersten vier Gleichungen aufgestellt werden sollen. Daraus folgt, dass sieben Zeitintervalle (x_{e1} bis x_{e7}) zu berücksichtigen sind.

$$\begin{aligned}\Delta t &= T \\ &= \frac{t_{\max}}{8} \\ &= \frac{120min}{8} \\ \Delta t &= 15min\end{aligned}$$

Die ersten vier Gleichungen des Faltungsintegrals lauten:
allgemein:

$$x_{an} = T(g_n x_{en-3} + g_{n-1} x_{en-2} + g_{n-2} x_{en-1} + g_{n-3} x_{en})$$

speziell:

$$h_4 = T(g_4 \dot{V}_1 + g_3 \dot{V}_2 + g_2 \dot{V}_3 + g_1 \dot{V}_4)$$

$$h_5 = T(g_4 \dot{V}_2 + g_3 \dot{V}_3 + g_2 \dot{V}_4 + g_1 \dot{V}_5)$$

$$h_6 = T(g_4 \dot{V}_3 + g_3 \dot{V}_4 + g_2 \dot{V}_5 + g_1 \dot{V}_6)$$

$$h_7 = T(g_4 \dot{V}_4 + g_3 \dot{V}_5 + g_2 \dot{V}_6 + g_1 \dot{V}_7)$$

mit $T = 15min$, V_1 bis $V_7 = 0,015 \frac{m^3}{s}$, $h_4 = 14,96m$, $h_5 = 14,95m$, $h_6 = 14,945m$ und $h_7 = 14,94m$ kann das Gleichungssystem gelöst und h_8 prognostiziert werden.

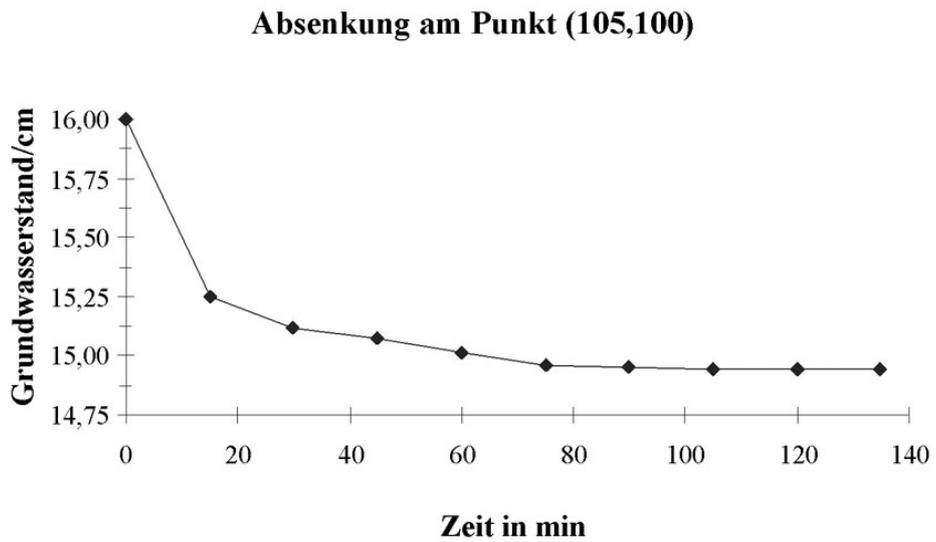
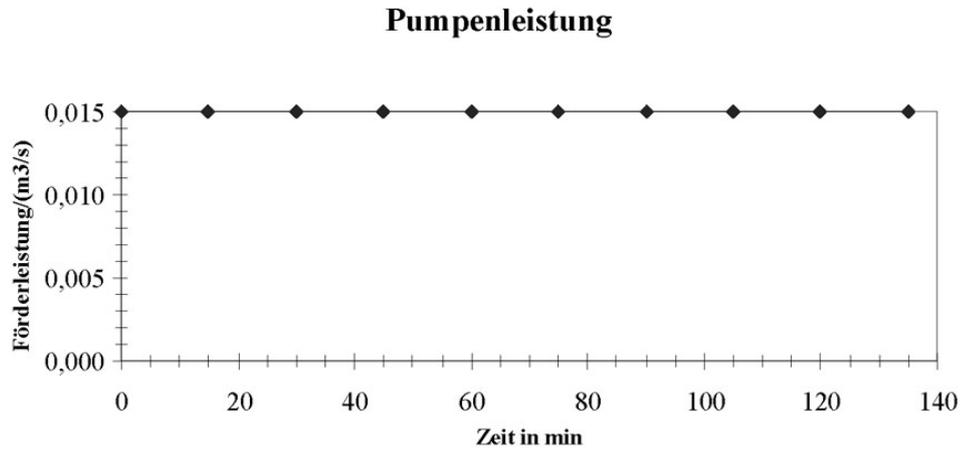


Abbildung 5.24: Antwortsignal eines Pumpversuches

- zu Aufgabe 7 (s. S. 370)

(a)

Aus der Theorie der Übertragungsglieder ist bekannt, dass in Fällen der Impulsantwortfunktionen folgende Übertragungsfunktion gilt:

$$G(p) = \frac{K e^{pT_L}}{(1 + p\tau)^n}$$

Die unbekannt Parameter T_L , t und n sind aus der Messwertkurve zu bestimmen. Entsprechend dem gegebenen Diagramm (siehe Abbildung 5.25) gilt:

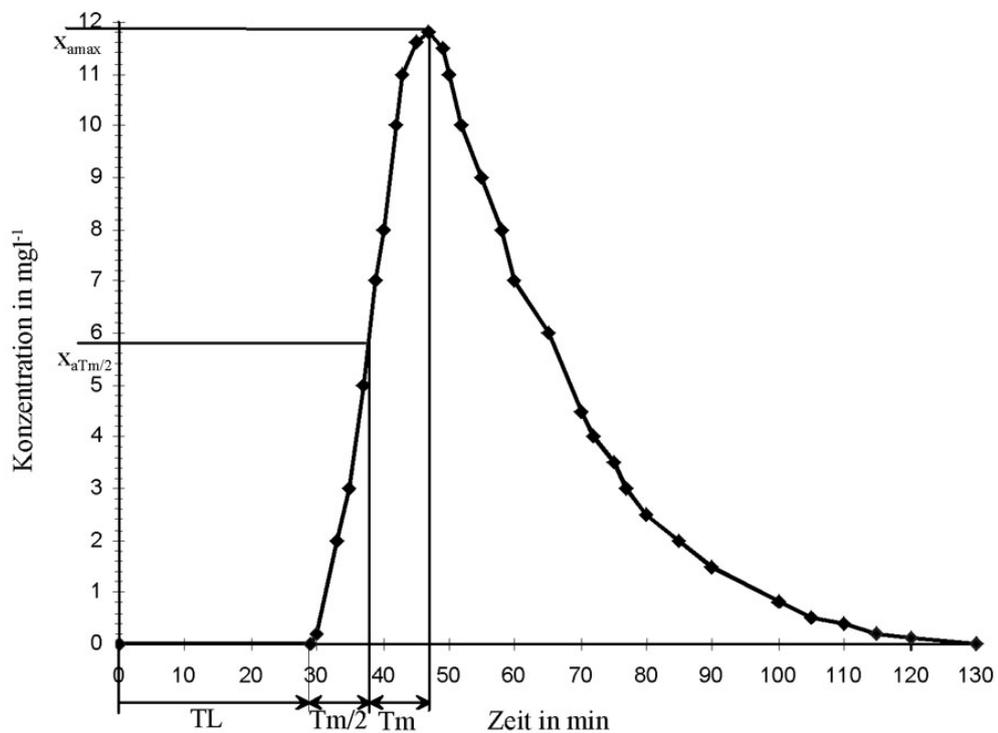


Abbildung 5.25: Impulsantwort mit Parameterbestimmung

Hieraus lassen sich folgende Werte ablesen:

$$T_L = 29 \text{ min} \quad x_a(T_m) = 11,9 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$$

$$T_m = 18 \text{ min} \quad x_a\left(\frac{T_m}{2}\right) = 5,8 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$$

Aus diesen Werten erhält man das Verhältnis von:

$$\frac{x_a(T_m)}{x_a\left(\frac{T_m}{2}\right)} = \frac{11,9 \frac{\text{mg}}{\text{l}}}{5,8 \frac{\text{mg}}{\text{l}}} = 2,05$$

Aus der Tabelle für Systeme n -ter Ordnung

$\frac{x_a(Tm)}{x_a(\frac{Tm}{2})}$	n	$\frac{Tm}{\tau}$	$\frac{\tau x_a(Tm)}{A \cdot K}$
1,785	4	3	0,224
2,165	5	4	0,196

findet man unter der Anpassung auf ganzzahlige n , dass n zwischen 4 und 5 liegt.

Da der Wert des Verhältnisses $\frac{x_a(Tm)}{x_a(\frac{Tm}{2})}$ näher an 2,165 liegt, wird $n = 5$ angenommen. Damit ergibt sich für die Zeitkonstante ein Verhältnis von $\frac{Tm}{\tau} = 4$ bzw. $t = \frac{18min}{4min} = 4,5$.

Die Übertragungskonstante K wird aus der letzten Spalte obiger Tabelle gewonnen, wobei berücksichtigt wird, dass A die Impulsfläche darstellt und hier mit $30 \frac{mg}{l}$ (oder $30 \frac{mg}{l} \cdot 1min$) angenommen wird:

$$\begin{aligned}
 0,196 &= \frac{\tau x_a(Tm)}{A \cdot K} \\
 \leadsto K &= \frac{\tau x_a(Tm)}{A \cdot 0,196} \\
 &= \frac{4,5min \cdot 11,9mg \cdot l}{30mg \cdot l}
 \end{aligned}$$

$$K = 9,11min$$

Damit lautet die Übertragungsfunktion:

$$G(p) = \frac{K e^{-pT_L}}{(1+p\tau)^n} = \frac{9,11min \cdot e^{-p \cdot 29min}}{(1+p \cdot 4,5min)^5}$$

Zur Erzeugung der Gewichtsfunktion kann man entweder die Gleichung benutzen oder die Übertragungsfunktion mittels der LAPLACESchen Rücktransformation in die Zeitebene bringen.

Für die Gewichtsfunktion erhält man den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
 x_a(t) &= \frac{A \cdot K}{\tau^n} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{30mg \cdot 9,11min}{(4,5min)^5 l} \frac{t [min]^4}{4!} e^{-\frac{t [min]}{4,5min}} \\
 &= \frac{30mg \cdot 9,11}{4,5^5 l} \frac{t^4}{4!} e^{-\frac{t}{270s}}
 \end{aligned}$$

bzw. als normierte Größe ohne Berücksichtigung der Laufzeit:

$$g(t) = \frac{9,11}{4,5^5 4!} t^4 e^{-\frac{t}{270s}}$$

bzw. mit Berücksichtigung der Laufzeit:

$$g(t) = \frac{9,11}{4,5^5} \frac{(t - T_L)^4}{4!} e^{-\frac{t-T_L}{270s}}$$

$$g(t) = \frac{9,11}{4,5^5} \frac{(t - 29min)^4}{4!} e^{-\frac{t-29min}{270s}}$$

(b)

Die Prognose des Wertes für 160min ergibt sich entsprechend des quantisierten Faltungsin-
tegrals zu:

$$C_{160min} = \Delta t (g_1 x_{e8} + g_2 x_{e7} + g_3 x_{e6} + g_4 x_{e5} + g_5 x_{e4} + g_6 x_{e3} + g_7 x_{e2} + g_8 x_{e1})$$

Δt ist entsprechend den gegebenen Werten zu 20min zu setzen.

Die Werte für die Gewichtsfunktion erhält man aus der Aufgabenstellung, bzw. aus der Lösung von (a). Die Kurve der Aufgabenstellung ist eine Antwort auf ein impulsförmiges Eingangssignal, d.h. diese Antwort entspricht, bis auf einen Normierungsfaktor und eine Zeitverschiebung um eventuelle Laufzeiten, der Gewichtsfunktion. Wenn man die Kurve der Aufgabenstellung zugrunde legt, muss man beachten, dass die Werte der Kurve an den einzelnen Zeitstützstellen noch durch die Impulsfläche A (hier $30 \frac{mg}{l}$) dividiert werden müssen. Bei Verwendung des analytischen Ausdrucks für $g(t)$ können diese direkt eingesetzt werden. Man erhält also aus der Kurve der Aufgabenstellung unter Beachtung einer Normierung folgende Gewichtsfunktionsanteile $g(t)$:

τ	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(\tau)$	0	0	0,270	0,230	0,083	0,033	0,003	0

Die aktuelle Eingangskonzentration, für die eine Prognose aufgestellt werden soll, hat laut Aufgabenstellung folgenden zeitlichen Verlauf:

Zeit [min] (t_n)	0	20	40	60	80	100	120	140
Index	1	2	3	4	5	6	7	8
C_n [$\frac{mg}{l}$]	30	50	80	60	100	50	10	0

Entsprechend den Vorschriften zur Faltungsoperation ergibt sich die Prognose zu:

$$C_{160min} = \Delta t (g_1 x_{e8} + g_2 x_{e7} + g_3 x_{e6} + g_4 x_{e5} + g_5 x_{e4} + g_6 x_{e3} + g_7 x_{e2} + g_8 x_{e1})$$

In dieser Gleichung sieht man, dass die Indizes von Gewichts- und von Eingangsfunktion

eine entgegengesetzte Laufrichtung aufweisen. Der Impuls (Anteil der Eingangsfunktion), der am "ältesten" ist (Index 1, $x_e(t_1) = C_1$), wird deshalb mit dem "letzten" Gewichtungsfunktionsanteil (Index 8, g_8) multipliziert.

Zur besseren rechnerischen Behandlung werden deshalb die Eingangswerte rückläufig notiert:

τ	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{g}(\tau)$	0	0	0,27	0,23	0,083	0,033	0,003	0
$\mathbf{x}_e(8 - \tau + 1)$	0	10	50	100	60	80	50	30
$\mathbf{g}(\tau) \cdot \mathbf{x}_e(8 - \tau + 1)$	0	0	13,5	23	4,98	2,64	0,15	0

Damit ergibt sich der zu prognostizierende Wert von C_{160min} als Summe der letzten Zeile, multipliziert mit $\Delta t = 20min$, zu $C_{160min} = 44,27 \frac{mg}{l}$.

- zu Aufgabe 10 (s. S. 370)

Die Beschreibung der Systeme durch die an ihnen wirkenden Ein- und Ausgangssignale kann in verschiedensten Formen stattfinden. Die gebräuchlichsten sind die mathematischen Gleichungen und die grafische Darstellung des Zeitverhaltens der Sprungantwortfunktion. Für die Beschreibung des Übertragungsverhaltens werden drei Arten von Definitionsgleichungen benutzt. Entsprechend der Bezeichnung der Grundsignale, die an den Eingang angelegt werden, erhält man die Bezeichnungen Übergangs-, Gewicht- und Übertragungsfunktion:

Die **Übergangsfunktion** $h(t)$

erhält man, wenn am Eingang ein Einheitssprungsignal angelegt wird. Dies wird auch als Sprungantwortfunktion bezeichnet:

$$h(t) = x_a |_{x_e=1(t)}$$

Die **Gewichtsfunktion** $g(t)$

ergibt sich, wenn am Eingang ein DIRAC-Impuls wirkt, auch als Impulsantwortfunktion bezeichnet:

$$g(t) = x_a |_{x_e=\delta(t)}$$

Die **Übertragungsfunktion** $G(p)$

ergibt sich aus der LAPLACE-transformierten Beschreibung des Ausgangssignals, wenn das Eingangssignal ein DIRAC-Impuls ist:

$$G(p) = X_a |_{X_e=L\{\delta(t)\}}$$

Diese drei Arten, Übergangs-, Gewicht- und Übertragungsfunktion, der mathematischen Darstellung des Übertragungsverhaltens sind äquivalent, da sie nur verschiedene mathematische Berechnungsformen für die selben technischen Prozesse physikalischer und/oder chemischer Art sind. Sie sind deshalb mittels mathematischer Beziehungen ineinander überführbar

Tabelle 5.1: Zusammenhang zwischen den verschiedenen Funktionen des Übertragungsverhaltens

	h(t)	g(t)	G(p)
h(t)		$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$	$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} G(p) \right\}$
g(t)	$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$		$g(t) = L^{-1} \{G(p)\}$
G(p)	$G(p) = p L \{h(t)\}$	$G(p) = L\{g(t)\}$	

Das in der Aufgabenstellung dargestellte Experiment stellt damit die Definition zur Bestimmung der Gewichtsfunktion dar.

• zu Aufgabe 11 (s. S. 370)

Wie in Aufgabe 11 bereits beschrieben wird durch einen derartigen Versuch die Gewichtsfunktion definiert.

Die **Gewichtsfunktion** $g(t)$

ergibt sich, wenn am Eingang ein DIRAC-Impuls wirkt, auch als Impulsantwortfunktion bezeichnet:

$$g(t) = x_a |_{x_e=\delta(t)}$$

Damit stellt die Tabelle die Gewichtsfunktion dar.

t in d	0	30	60	90	120	150	180	320	340	300
C in mg/l	0	15	45	55	45	20	10	5	2	0
g(τ)	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}

Für die Prognose muss deshalb nur die entsprechende Gleichung aufgestellt werden.

$$x_{a6Prog} = T \cdot (g_9x_{e2} + g_7x_{e3} + g_5x_{e4} + g_3x_{e5} + g_1x_{e6})$$

Als Eingangssignal fungieren die Messwerte aus dem Feldversuch. Dabei ist zu beachten, dass die Zeitschrittweite bei der Laborversuchssäule 30 Tage betrug, während im Feld mit einer Schrittweite von 60 Tagen gearbeitet wurde. Dadurch können der letzte Wert der Gewichtsfunktion (g_{10}) und der erste Wert des Feldversuches nicht berücksichtigt werden.

t in d	300	360	420	480	540	600
C in mg/l	100	80	70	60	70	50
$x_e(t)$	x_{e1}	x_{e2}	x_{e3}	x_{e4}	x_{e5}	x_{e6}

Damit ergibt sich der prognose Wert zu:

$$x_{a6Prog} = T \cdot (g_9x_{e2} + g_7x_{e3} + g_5x_{e4} + g_3x_{e5} + g_1x_{e6})$$

$$x_{a6Prog} = 60d(0 \cdot 50 + 45 \cdot 70 + 45 \cdot 60 + 10 \cdot 70 + 2 \cdot 80)$$

$$x_{a6Prog} = 363000$$

- zu Aufgabe 12 (s. S. 370)

Der Temperaturverlauf des Flusses δ_{Fl} und des Grundwassers an der Fassung $\delta_{Fa,g}$ hat entsprechend der Messwerte:

Zeitpunkt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\delta_{Fl} [^{\circ}C]$	14,2	16,0	17,7	19,4	17,2	16,0	17,6	18,6	14,8	12,0	13,7
$\delta_{Fa,g} [^{\circ}C]$	8,5	10,0	11,4	14,0	14,1	14,7	15,4	15,8	15,6	14,9	14,1
$\delta_{Fa,p} [^{\circ}C]$											
Zeit[d]	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150

folgenden Verlauf (siehe Abbildung 5.26).

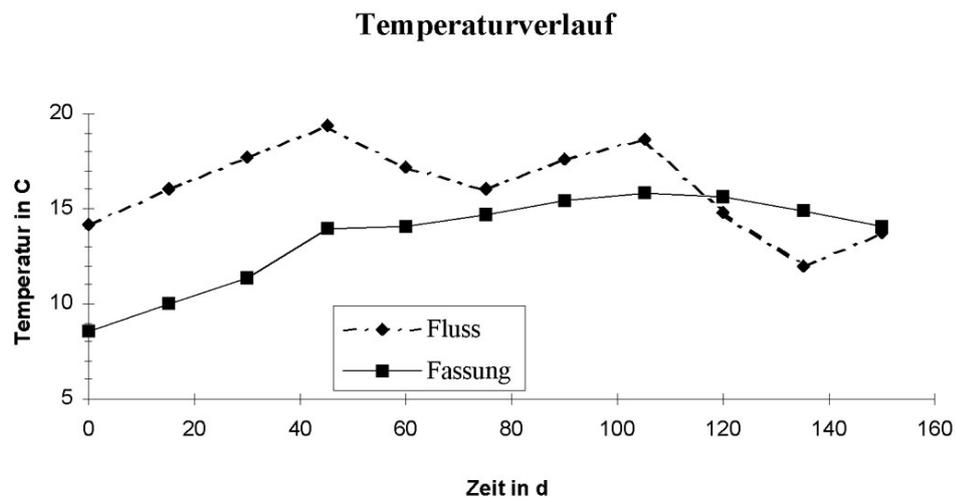


Abbildung 5.26: Temperaturverlauf des Flusswassers und des Grundwassers in der Fassung

Entsprechend der Bildung der Gleichungen zur Bestimmung der Übergangsfunktion $g(t)$ können nachfolgende Gleichungen aufgestellt werden. Laut Aufgabenstellung sind nur drei Gleichungen mit drei Unbekannten g_1 , g_2 und g_3 aufzustellen und zu lösen:

Allgemein gilt:
$$x_{an} = T(g_n x_{en-2} + g_{n-1} x_{en-1} + g_{n-2} x_{en})$$

oder in konkreter Form:
$$\delta_{Fan} = T(g_n \delta_{Fln-2} + g_{n-1} \delta_{Fln-1} + g_{n-2} \delta_{Fln})$$

(a)

Mit dem vorgegebenen Abtastintervall von $T = 15d$ ergibt sich speziell:

$$15,4 = 15d(g_3 \cdot 17,2 + g_2 16,0 + g_1 \cdot 17,6)$$

$$15,8 = 15d(g_3 \cdot 16,0 + g_2 17,6 + g_1 \cdot 18,6)$$

$$15,6 = 15d(g_3 \cdot 17,6 + g_2 18,6 + g_1 \cdot 14,8)$$

Dieses Gleichungssystem mit drei Unbekannten kann z. B. mit den Methoden der Determinantenrechnung bestimmt werden:

$$\begin{bmatrix} 258,0 & 240,0 & 264,0 \\ 240,0 & 264,0 & 279,0 \\ 264,0 & 279,0 & 222,0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_3 \\ g_2 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15,4 \\ 15,8 \\ 15,6 \end{bmatrix}$$

Man erhält folgende Werte:

$$g_3 = 0,021 \quad g_2 = 0,021 \quad g_1 = 0,018$$

Werden diese Werte in die Prognosegleichung eingesetzt, so erhält man:

$$\begin{aligned} \text{prognostiziert:} \quad \delta_{Fa10} &= 15d \cdot (g_3 \cdot 18,6 + g_2 14,8 + g_1 \cdot 12,0) \\ &= 13,9^{\circ}C \end{aligned}$$

$$\text{gemessen:} \quad \delta_{Fa10} = 14,9^{\circ}C$$

Die schlechte Übereinstimmung zwischen Prognose und Messung rührt hier von dem sehr kurzen Beobachtungszeitraum her (nur drei Zeitintervalle).

(b)

Bei Erweiterung des Beobachtungszeitraumes auf fünf Zeitpunkte ergeben sich folgende Werte:

$$14,1 = 15d \cdot (g_5 \cdot 14,2 + g_4 \cdot 16,0 + g_3 \cdot 17,7 + g_2 \cdot 19,4 + g_1 \cdot 17,2)$$

$$14,7 = 15d \cdot (g_5 \cdot 16,0 + g_4 \cdot 17,7 + g_3 \cdot 19,4 + g_2 \cdot 17,2 + g_1 \cdot 16,0)$$

$$15,4 = 15d \cdot (g_5 \cdot 17,7 + g_4 \cdot 19,4 + g_3 \cdot 17,2 + g_2 \cdot 16,0 + g_1 \cdot 17,6)$$

$$15,8 = 15d \cdot (g_5 \cdot 19,4 + g_4 \cdot 17,2 + g_3 \cdot 16,0 + g_2 \cdot 17,6 + g_1 \cdot 18,6)$$

$$15,6 = 15d \cdot (g_5 \cdot 17,2 + g_4 \cdot 16,0 + g_3 \cdot 17,6 + g_2 \cdot 18,6 + g_1 \cdot 14,8)$$

$$\begin{bmatrix} 213 & 240 & 265,5 & 291 & 258 \\ 240 & 265,5 & 291 & 258 & 240 \\ 265,5 & 291 & 258 & 240 & 264 \\ 291 & 258 & 240 & 264 & 279 \\ 258 & 240 & 264 & 279 & 222 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_5 \\ g_4 \\ g_3 \\ g_2 \\ g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,1 \\ 14,7 \\ 15,4 \\ 15,8 \\ 15,6 \end{bmatrix}$$

$$g_5 = 0,028 \quad g_4 = 0,026 \quad g_3 = -0,007 \quad g_2 = 0,028 \quad g_1 = -0,016$$

(c)

Für die Prognoserechnung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{prognostiziert: } \delta_{Fa10} &= 15d \cdot (g_5 \cdot 16,0 + g_4 \cdot 17,6 + g_3 \cdot 18,6 + g_2 \cdot 14,8 + g_1 \cdot 12,0) \\ &= 14,7^{\circ}C \end{aligned}$$

$$\text{gemessen: } \delta_{Fa10} = 14,9^{\circ}C$$

