

3.3 Absenkungsverlauf

3.3.1 Aufgabe

3.3.1.1 Verzögerungsfunktion

Der Absenkungsverlauf des Grundwassers auf Grund einer Entnahme aus einem Brunnen (z.B. durch einen so genannten Pumpversuch) kann in erster Näherung durch ein Übertragungsverhalten für Verzögerungssysteme 1. Ordnung approximiert werden.

Derartige Verzögerungssysteme 1. Ordnung können durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$x_a(t) = x_e(t) \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$x_{a(t=\infty)} = x_e(t) \cdot K$$

Für das Produkt $x_{a(t=\infty)} = x_e(t) \cdot K$ soll der Wert 1,24 eingesetzt werden. Die Zeit, bei der die Absenkung den Wert von $0,632 \cdot x_{a(t=\infty)}$ erreicht hat, wird mit τ bezeichnet. Dabei bezeichnet $x_{a(t=\infty)}$ die maximale Absenkung.

1. Stellen Sie den Absenkungsverlauf aus den Werten des Pumpversuches (siehe Abb. 3.49) in einem Diagramm dar.
2. Bestimmen Sie aus dem Diagramm die Werte für $x_{a(t=\infty)}$ und τ .
3. Berechnen Sie die Absenkungskurve nach der oben genannten Übertragungsfunktion.
4. Berechnen Sie die quadratische Abweichung (Q) zwischen den gemessenen (x_{Mtn}) und den berechneten ($x_a(tn)$) Werten ($Q = (x_M(tn) - x_a(tn))^2$) und stellen Sie diese drei Funktionen (gemessene, approximierte Absenkung und die quadratische Abweichung) grafisch dar.

3.3.1.2 THEIS-Funktion

Exakterweise kann die Absenkung $s = x_{at=0} - x_{at}$ eines Brunnens mittels der THEIS-Funktion berechnet werden. $W(\sigma)$ bezeichnet dabei die so genannte Brunnenfunktion.

$$s = h_n - \sqrt{h_n^2 - \frac{V}{2 \cdot \pi \cdot k} W(\sigma)}$$

mit

$$W(\sigma) = -\ln(1,78 \cdot \sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\sigma^4}{4 \cdot 4!} + \dots$$

und

$$\sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

5. Berechnen Sie die Absenkung s mittels der THEIS-Funktion!

6. Benutzen Sie für die Werte S und k bzw. T geschätzte Werte! (z. B. $S = 0,20$; $k = 0,0001m/s$; $T = 0,001m^2/s$) Diese können Sie nach Belieben ändern, um eine optimale Anpassung der berechneten Werte an die Messwerte (quadratische Abweichung minimieren) zu erreichen. Als Radius kann $r = 5m$ angesetzt werden.

3.3.2 Arbeitsschritte

3.3.2.1 Verzögerungsfunktion

zu 1. Die Absenkungen werden durch Subtraktion des gemessenen GWST vom GWST zum Zeitpunkt Null (Namenfeld = Ruhewasser) ermittelt.

⇒ Diagramm (Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit) erstellen und beschriften (⇒ Abb. 3.50)

zu 2. Zur genaueren Bestimmung von τ aus dem Diagramm wird die x-Achse gestreckt und das darzustellende Zeitmaximum auf $2000s$ gesetzt ⇒ **Achse formatieren** ⇒ **Skalierung** ⇒ **Maximum** = 2000 (⇒ Abb. 3.51).

τ lässt sich aus dem Diagramm ablesen (⇒ Abb. 3.52).

zu 3. Die Absenkung wird gemäß vorgegebener Formel und mit Hilfe des Funktionsassistenten für alle Werte der Tabelle berechnet. Das Produkt $xe(t) \cdot K = 1,24$ wird als Namenfeld definiert.

Für die Eingabe der Exponentialfunktion: ⇒ **Einfügen** ⇒ **Funktion** ⇒ **Math.& Trigon.** ⇒ **EXP** ⇒ minus t (Variable) / τ (Namenfeld) (⇒ Abb. 3.53)

zu 4. Die quadratische Abweichung zwischen den gemessenen Werten und den berechneten wird mit Hilfe des Funktionsassistenten durch Potenzierung der Differenz berechnet.

⇒ **Einfügen** ⇒ **Funktion** ⇒ **Math.& Trigon.** ⇒ **POTENZ** ⇒ (F13-G13;2) (⇒ Abb. 3.54).

Die Potenzierung kann auch über den Potenzoperator " ^ " erfolgen ⇒ (F13-G13)^2

Beide Messwertreihen werden in die Diagrammdarstellung mit aufgenommen. (⇒ Abb. 3.55).

3.3.2.2 THEIS-Funktion

zu 5. Zur Ermittlung der Absenkung mittels THEIS-Funktion ist zuerst

⇒ σ **zu berechnen**; t ist Variable, T , S und r sind als Namenfelder zu definieren. Unter Benutzung des Funktionsassistenten für die Berechnung der Potenz oder dem Potenzoperator "^^" ist die Formel in die Tabelle einzugeben (⇒ Abb. 3.56)

⇒ In die Brunnenfunktion $\mathbf{W}(\sigma)$ sind die Werte für σ zu übernehmen.

Für eine ausreichende Genauigkeit ist die Formel für 10 Glieder zu berechnen.

Die Funktionen für **ln**, **Potenz** und **Fakultät** sind mittels Funktionsassistenten einzufügen (⇒ Abb. 3.57)

⇒ In einer dritten Spalte ist die Absenkung s mittels vorgegebener THEIS-Funktion unter Übernahme der jeweiligen Werte für $W(\sigma)$ zu berechnen (⇒ Abb. 3.58).

zu 6. Die quadratische Abweichung wird wie unter 4. berechnet und in das Diagramm übertragen (⇒ Abb. 3.59).

Durch Variation der Werte für S bzw. k ist die Kurve der quadratischen Abweichung dem Wert Null möglichst stark anzunähern, zu minimieren (⇒ Abb. 3.60 - S ist von 0,0040 auf 0,0035 gesetzt worden).

| | A | B | C | D |
|----|--------------------|-------------------|--------|-------------------|
| 1 | Variablen : | | | |
| 2 | | tau= | 1000 | s |
| 3 | | r = | 5 | m |
| 4 | | S = | 0,005 | |
| 5 | | k = | 0,0002 | m/s |
| 6 | | hn = | 15 | m |
| 7 | | V-Punkt= | 0,005 | m ³ /s |
| 8 | | m=GW-St(t=0 sec)= | 0 | m |
| 9 | | T= S*m= | 0,003 | m ² /s |
| 10 | | | | |
| 11 | Messwerte : | | | |
| 12 | | Zeit in sec. | GW-St. | |
| 13 | | | 0 | 6,455 |
| 14 | | | 15 | 6,63 |
| 15 | | | 30 | 6,71 |
| 16 | | | 45 | 6,77 |
| 17 | | | 60 | 6,805 |
| 18 | | | 90 | 6,85 |
| 19 | | | 120 | 6,87 |
| 20 | | | 150 | 6,905 |
| 21 | | | 180 | 6,93 |
| 22 | | | 210 | 6,975 |
| 23 | | | 240 | 7,005 |
| 24 | | | 270 | 7,035 |
| 25 | | | 300 | 7,06 |
| 26 | | | 330 | 7,07 |
| 27 | | | 360 | 7,095 |
| 28 | | | 390 | 7,105 |
| 29 | | | 420 | 7,118 |
| 30 | | | 450 | 7,128 |
| 31 | | | 480 | 7,135 |
| 32 | | | 510 | 7,142 |
| 33 | | | 540 | 7,15 |
| 34 | | | 570 | 7,155 |
| 35 | | | 600 | 7,161 |
| 36 | | | 660 | 7,169 |
| 37 | | | 720 | 7,171 |
| 38 | | | 780 | 7,179 |
| 39 | | | 840 | 7,186 |
| 40 | | | 900 | 7,191 |
| 41 | | | 960 | 7,2 |
| 42 | | | 1020 | 7,204 |
| 43 | | | 1080 | 7,21 |
| 44 | | | 1140 | 7,212 |
| 45 | | | 1200 | 7,217 |
| 46 | | | 1260 | 7,22 |
| 47 | | | 1320 | 7,223 |
| 48 | | | 1440 | 7,23 |
| 49 | | | 1560 | 7,237 |
| 50 | | | 1680 | 7,241 |
| 51 | | | 1800 | 7,245 |
| 52 | | | 1920 | 7,249 |
| 53 | | | 2040 | 7,252 |
| 54 | | | 2160 | 7,257 |
| 55 | | | 2280 | 7,26 |
| 56 | | | 2400 | 7,262 |
| 57 | | | 2520 | 7,264 |
| 58 | | | 2640 | 7,267 |
| 59 | | | 2760 | 7,269 |
| 60 | | | 2880 | 7,272 |
| 61 | | | 3000 | 7,273 |
| 62 | | | 3120 | 7,276 |

Abbildung 3.49: Messwerte eines Pumpversuches

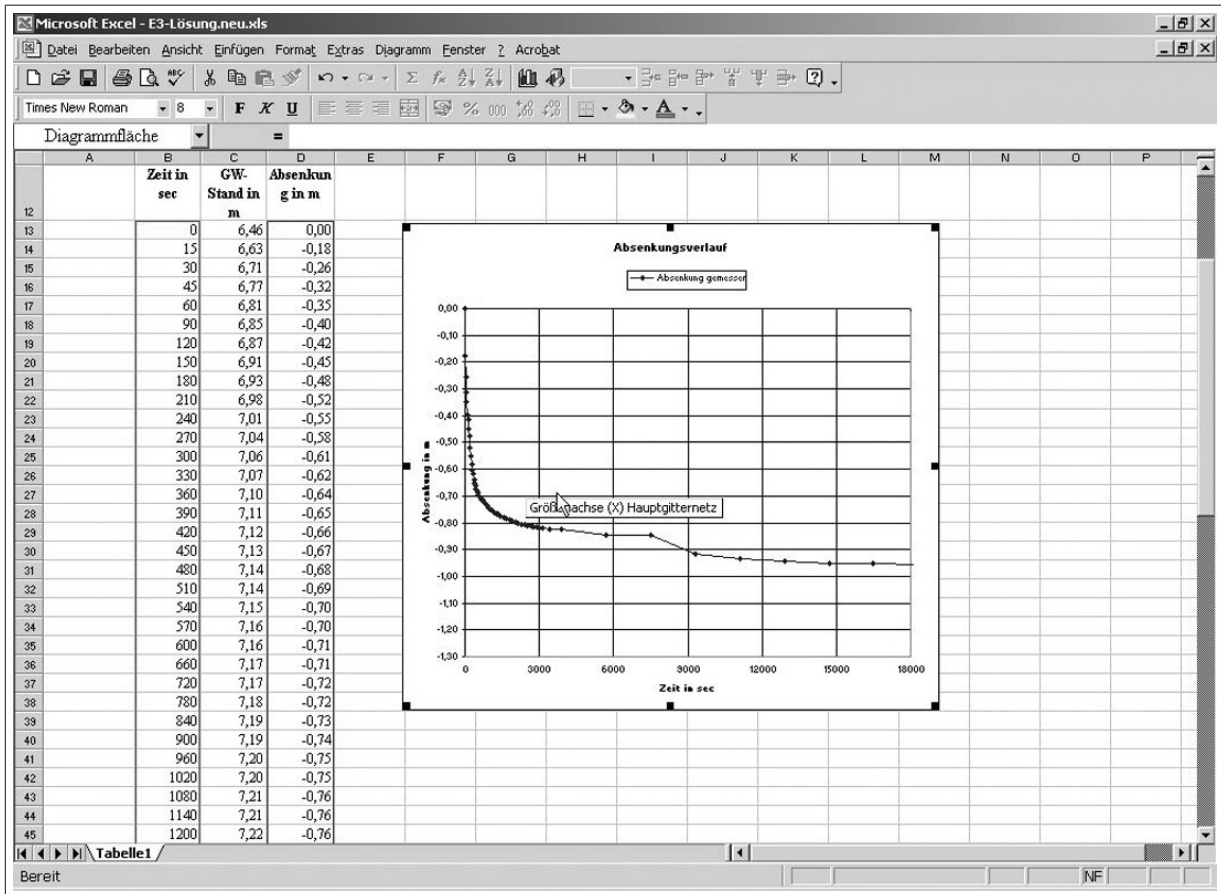
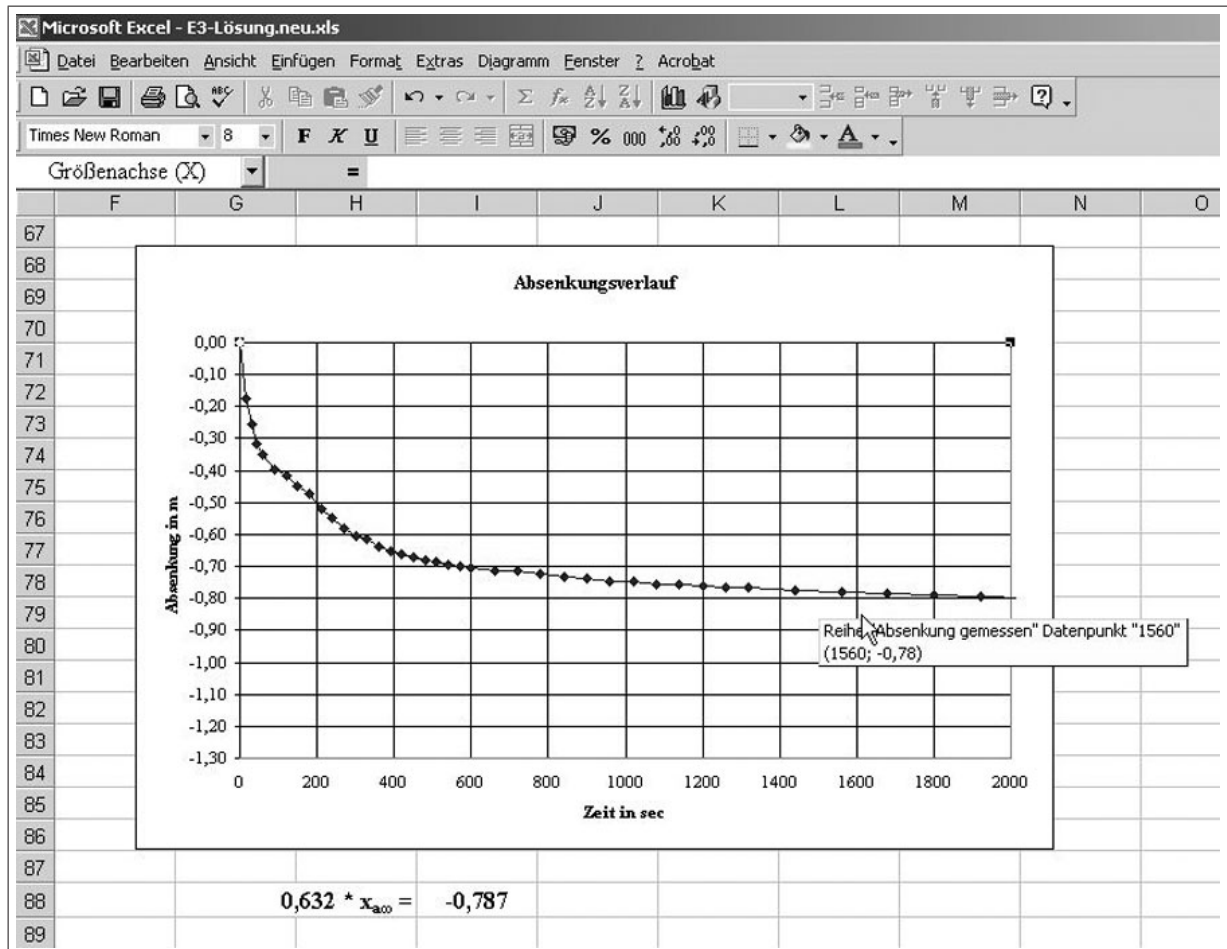


Abbildung 3.50: Darstellung der Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit



Abbildung 3.51: Skalierung der x-Achse

Abbildung 3.52: Bestimmen der Zeitkonstanten τ

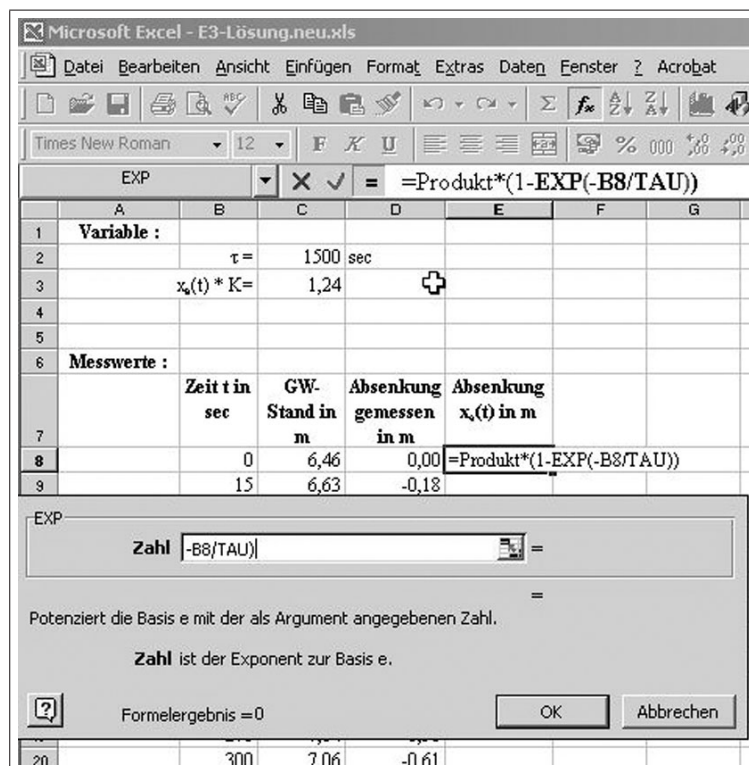


Abbildung 3.53: Erstellen der Formel zur Berechnung der e -Funktion

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet titled "E3-Lösung.neu.xls". The spreadsheet contains the following data:

| Variable : | | | | | | | |
|-------------|----------------|----------------|-------------------------|-------------------------|------------------|--|--|
| | $\tau =$ | 1500 | sec | | | | |
| | $x_0(t) * K =$ | 1,24 | | | | | |
| Messwerte : | | | | | | | |
| | Zeit t in sec | GW- Stand in m | Absenkung gemessen in m | Absenkung $x_0(t)$ in m | Quadrat Abw. | | |
| 8 | 0 | 6,46 | 0,00 | 0,00 | =POTENZ(E8-D8;2) | | |
| 9 | 15 | 6,63 | -0,18 | -0,01 | | | |
| 10 | 20 | 6,71 | 0,26 | 0,07 | | | |
| 22 | 360 | 7,10 | -0,64 | -0,26 | | | |
| 23 | 390 | 7,11 | -0,65 | -0,28 | | | |

The 'POTENZ' dialog box is open, showing the following fields:

- Zahl: E8-D8 = 0
- Potenz: 2 = 2
- Result: = 0
- Text: "Liefert als Ergebnis eine potenzierte Zahl. Potenz ist der Exponent, mit dem Sie die Zahl potenzieren möchten."
- Formelergbnis: =0
- Buttons: OK, Abbrechen

Abbildung 3.54: Erstellen der Formel zur Berechnung von Potenzen

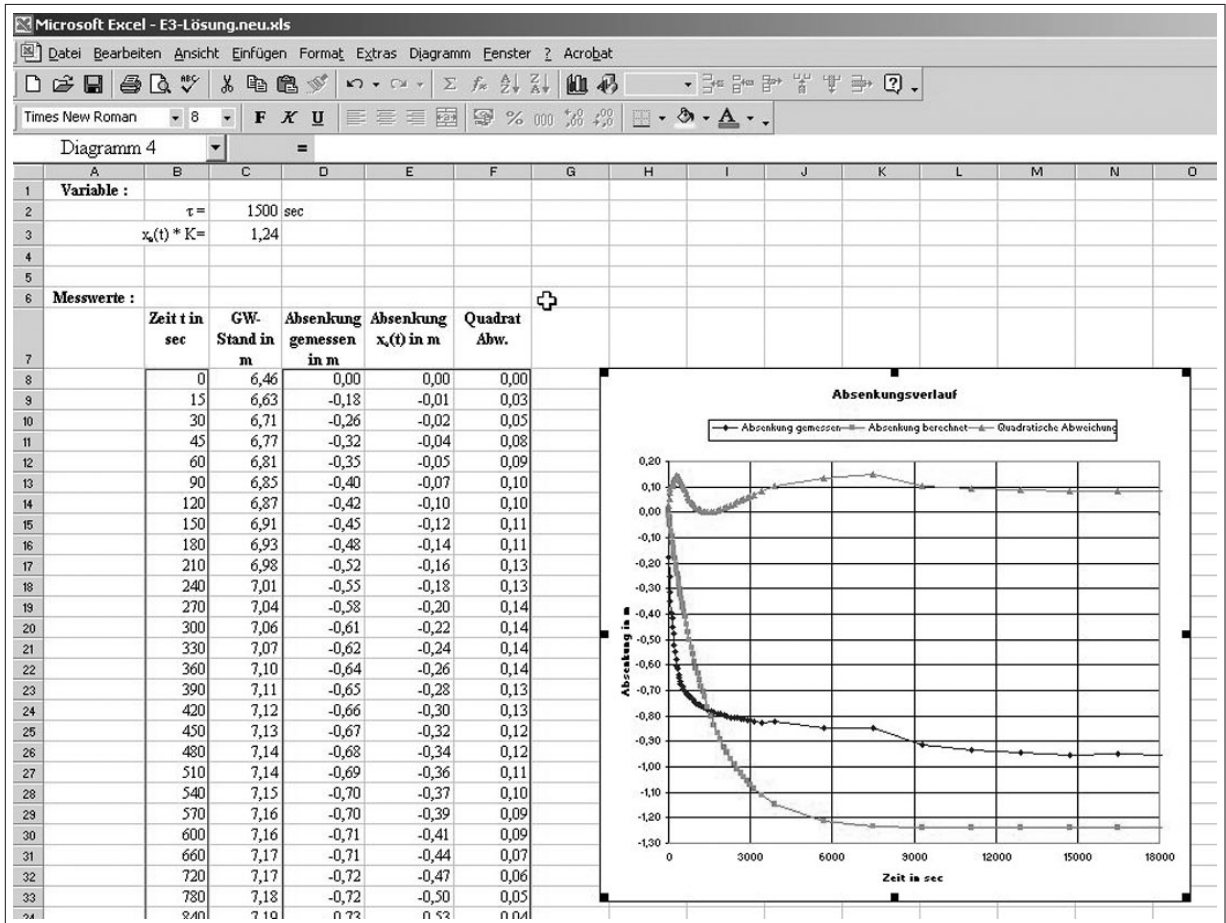


Abbildung 3.55: Darstellung der Messwerte und der Regressionsfunktion, für das Verzögerungsverhalten 1. Ordnung

| Microsoft Excel | | | | | |
|-------------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------|
| Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster ? Acrobat | | | | | |
| Times New Roman 12 F X U | | | | | |
| FAKULTÄT X ✓ = =POTENZ(r,2)*SSSS/4/T/B13 | | | | | |
| E3-Lösung.neu.xls | | | | | |
| | A | B | C | D | H |
| 1 | | | Berechnung mit Theiss-Funktion | | |
| 2 | Variable : | | | | |
| 3 | | | tau= | 1500 | |
| 4 | | | r = | 5,0000 | |
| 5 | | | S= | 0,0050 | |
| 6 | | | k = | 0,0002 | |
| 7 | | | hn = | 15,0000 | |
| 8 | | | V-Punkt= | 0,0050 | |
| 9 | | | T=k*hn= | 0,0030 | |
| 10 | Messwerte : | | | | |
| | | Zeit t in sec | GW-Stand in m | Absenkung gemessen in m | σ |
| 11 | | | | | |
| 12 | | 0 | 6,46 | 0,00 | 0 |
| 13 | | 15 | 6,63 | -0,18 | $ Z(r,2)*SSSS$ |
| 14 | | 30 | 6,71 | -0,26 | 0,347 |
| 15 | | 45 | 6,77 | -0,32 | 0,231 |
| 16 | | 60 | 6,81 | -0,35 | 0,174 |
| 17 | | 90 | 6,85 | -0,40 | 0,116 |
| 18 | | 120 | 6,87 | -0,42 | 0,087 |
| 19 | | 150 | 6,91 | -0,45 | 0,069 |
| 20 | | 180 | 6,93 | -0,48 | 0,058 |
| 21 | | 210 | 6,98 | -0,52 | 0,050 |
| 22 | | 240 | 7,01 | -0,55 | 0,043 |
| 23 | | 270 | 7,04 | -0,58 | 0,039 |
| 24 | | 300 | 7,06 | -0,61 | 0,035 |

Abbildung 3.56: Berechnung der σ -Werte für die THEIS-Funktion

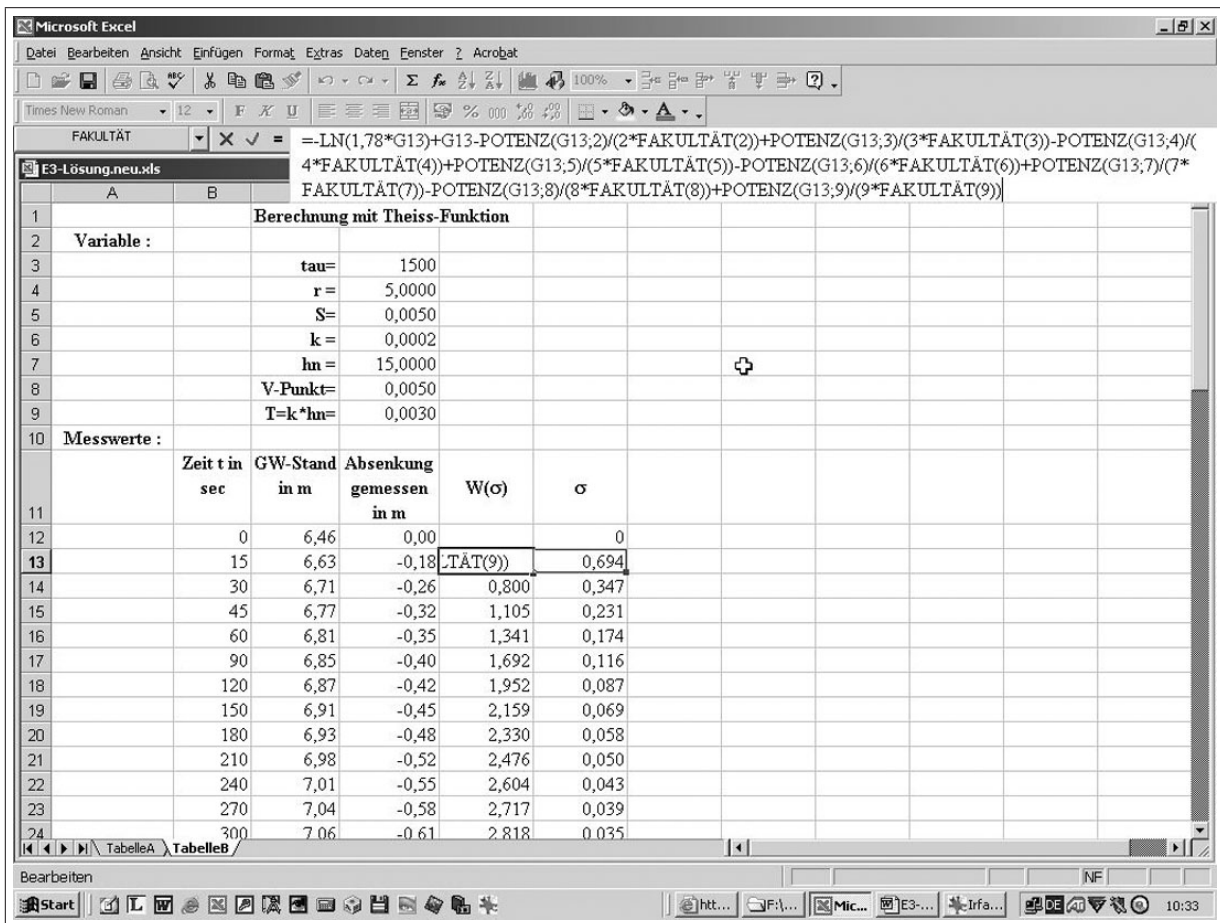


Abbildung 3.57: Berechnung der THEIS-Funktion

Microsoft Excel

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster ? Acrobat

Times New Roman 12 F K U

FAKULTÄT X ✓ = =-(h-WURZEL(POTENZ(h;2)-V/2/PI()/k*F13))

E3-Lösung.neu.xls

| | A | B | C | D | E | F | G | |
|----|--------------------|----------------------|---------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------|----------|--|
| 1 | | | Berechnung mit Theiss-Funktion | | | | | |
| 2 | Variable : | | | | | | | |
| 3 | | | tau= | 1500 | | | | |
| 4 | | | r = | 5,0000 | | | | |
| 5 | | | S= | 0,0050 | | | | |
| 6 | | | k = | 0,0002 | | | | |
| 7 | | | hn = | 15,0000 | | | | |
| 8 | | | V-Punkt= | 0,0050 | | | | |
| 9 | | | T=k*hn= | 0,0030 | | | | |
| 10 | Messwerte : | | | | | | | |
| | | Zeit t in sec | GW-Stand in m | Absenkung gemessen in m | Absenkung s nach Theiss | W(σ) | σ | |
| 11 | | | | | | | | |
| 12 | | 0 | 6,46 | 0,00 | | | 0 | |
| 13 | | 15 | 6,63 | -0,18 | =(0/k*F13)) | 0,378 | 0,694 | |
| 14 | | 30 | 6,71 | -0,26 | -0,107 | 0,800 | 0,347 | |
| 15 | | 45 | 6,77 | -0,32 | -0,147 | 1,105 | 0,231 | |
| 16 | | 60 | 6,81 | -0,35 | -0,179 | 1,341 | 0,174 | |
| 17 | | 90 | 6,85 | -0,40 | -0,226 | 1,692 | 0,116 | |
| 18 | | 120 | 6,87 | -0,42 | -0,261 | 1,952 | 0,087 | |
| 19 | | 150 | 6,91 | -0,45 | -0,289 | 2,159 | 0,069 | |
| 20 | | 180 | 6,93 | -0,48 | -0,312 | 2,330 | 0,058 | |
| 21 | | 210 | 6,98 | -0,52 | -0,332 | 2,476 | 0,050 | |
| 22 | | 240 | 7,01 | -0,55 | -0,349 | 2,604 | 0,043 | |
| 23 | | 270 | 7,04 | -0,58 | -0,365 | 2,717 | 0,039 | |
| 24 | | 300 | 7,06 | -0,61 | -0,379 | 2,818 | 0,035 | |

Abbildung 3.58: Berechnung der Absenkung nach der THEIS-Funktion

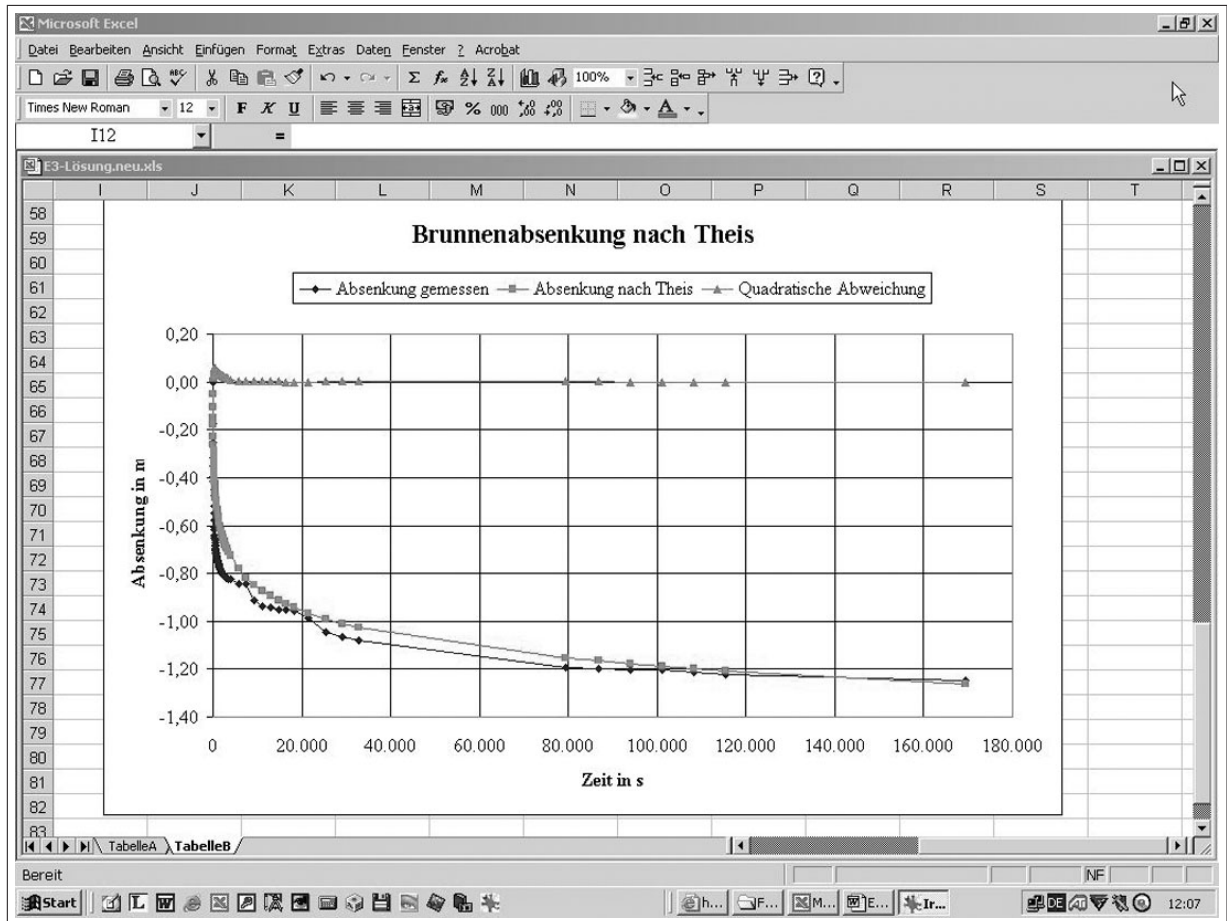


Abbildung 3.59: Darstellung der Messwerte, der Absenkung nach THEIS und der quadratischen Abweichung

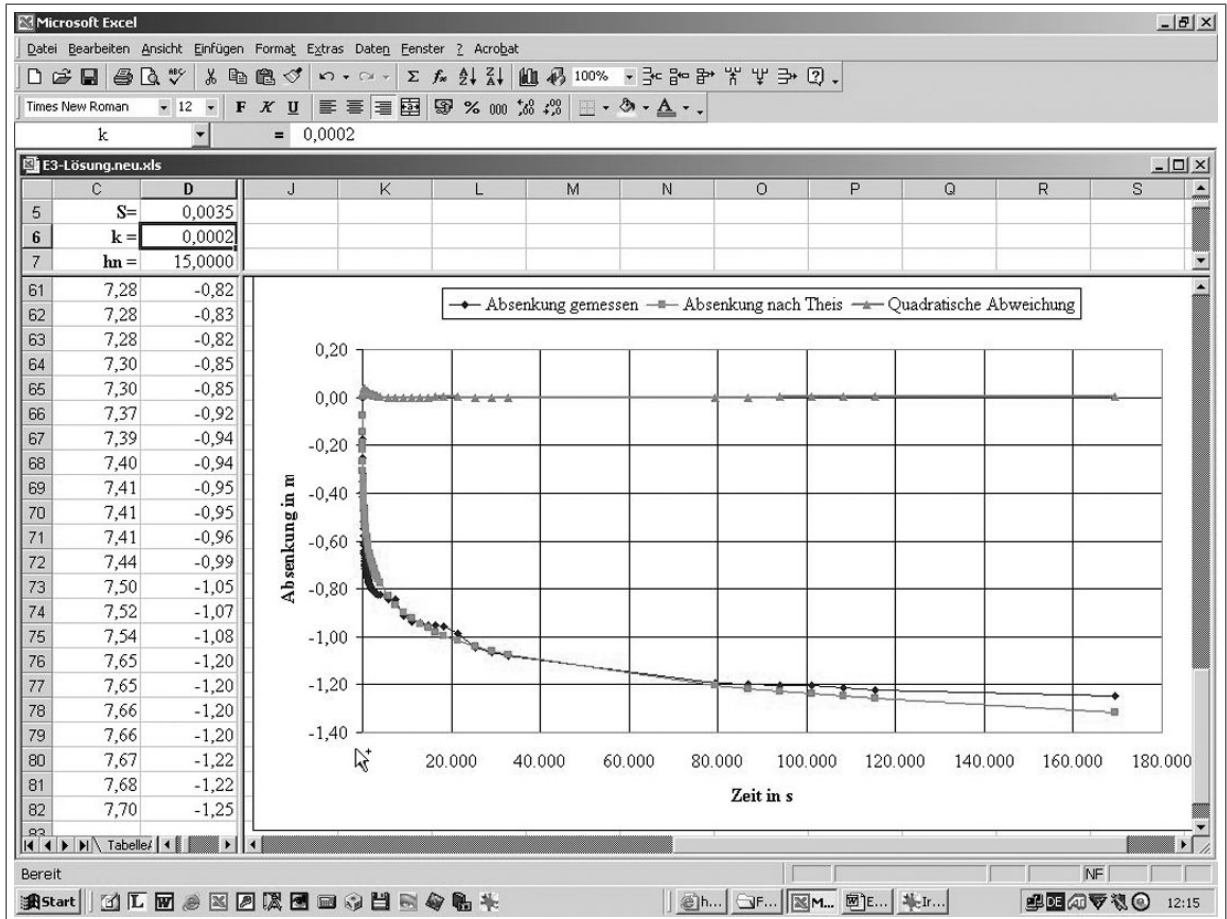


Abbildung 3.60: Minimierung der quadratischen Abweichung durch Variation der Variablen (S bzw. k)