

3.3 Absenkungsverlauf

3.3.1 Aufgabe

3.3.1.1 Verzögerungsfunktion

Der Absenkungsverlauf des Grundwassers auf Grund einer Entnahme aus einem Brunnen (z.B. durch einen so genannten Pumpversuch) kann in erster Näherung durch ein Übertragungsverhalten für Verzögerungssysteme 1. Ordnung approximiert werden.

Derartige Verzögerungssysteme 1. Ordnung können durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$x_a(t) = x_e(t) \cdot K \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$x_{a(t=\infty)} = x_e(t) \cdot K$$

Für das Produkt $x_{a(t=\infty)} = x_e(t) \cdot K$ soll der Wert 1,24 eingesetzt werden. Die Zeit, bei der die Absenkung den Wert von $0,632 \cdot x_{a(t=\infty)}$ erreicht hat, wird mit τ bezeichnet. Dabei bezeichnet $x_{a(t=\infty)}$ die maximale Absenkung.

1. Stellen Sie den Absenkungsverlauf aus den Werten des Pumpversuches (siehe Abb. 3.49) in einem Diagramm dar.
2. Bestimmen Sie aus dem Diagramm die Werte für $x_{a(t=\infty)}$ und τ .
3. Berechnen Sie die Absenkungskurve nach der oben genannten Übertragungsfunktion.
4. Berechnen Sie die quadratische Abweichung (Q) zwischen den gemessenen (x_{Mtn}) und den berechneten ($x_a(tn)$) Werten ($Q = (x_M(tn) - x_a(tn))^2$) und stellen Sie diese drei Funktionen (gemessene, approximierte Absenkung und die quadratische Abweichung) grafisch dar.

3.3.1.2 THEIS-Funktion

Exakterweise kann die Absenkung $s = x_{at=0} - x_{at}$ eines Brunnens mittels der THEIS-Funktion berechnet werden. $W(\sigma)$ bezeichnet dabei die so genannte Brunnenfunktion.

$$s = h_n - \sqrt{h_n^2 - \frac{V}{2 \cdot \pi \cdot k} W(\sigma)}$$

mit

$$W(\sigma) = -\ln(1,78 \cdot \sigma) + \sigma - \frac{\sigma^2}{2 \cdot 2!} + \frac{\sigma^3}{3 \cdot 3!} - \frac{\sigma^4}{4 \cdot 4!} + \dots$$

und

$$\sigma = \frac{r^2 \cdot S}{4 \cdot T \cdot t}$$

5. Berechnen Sie die Absenkung s mittels der THEIS-Funktion!

6. Benutzen Sie für die Werte S und k bzw. T geschätzte Werte! (z. B. $S = 0,20$; $k = 0,0001m/s$; $T = 0,001m^2/s$) Diese können Sie nach Belieben ändern, um eine optimale Anpassung der berechneten Werte an die Messwerte (quadratische Abweichung minimieren) zu erreichen. Als Radius kann $r = 5m$ angesetzt werden.

3.3.2 Arbeitsschritte

3.3.2.1 Verzögerungsfunktion

zu 1. Die Absenkungen werden durch Subtraktion des gemessenen GWST vom GWST zum Zeitpunkt Null (Namenfeld = Ruhewasser) ermittelt.

⇒ Diagramm (Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit) erstellen und beschriften (⇒ Abb. 3.50)

zu 2. Zur genaueren Bestimmung von τ aus dem Diagramm wird die x-Achse gestreckt und das darzustellende Zeitmaximum auf 2000s gesetzt ⇒ **Achse formatieren** ⇒ **Skalierung** ⇒ **Maximum** = 2000 (⇒ Abb. 3.51).

τ lässt sich aus dem Diagramm ablesen (⇒ Abb. 3.52).

zu 3. Die Absenkung wird gemäß vorgegebener Formel und mit Hilfe des Funktionsassistenten für alle Werte der Tabelle berechnet. Das Produkt $xe(t) \cdot K = 1,24$ wird als Namenfeld definiert.

Für die Eingabe der Exponentialfunktion: ⇒ **Einfügen** ⇒ **Funktion** ⇒ **Math.& Trigon.** ⇒ **EXP** ⇒ minus t (Variable) / τ (Namenfeld) (⇒ Abb. 3.53)

zu 4. Die quadratische Abweichung zwischen den gemessenen Werten und den berechneten wird mit Hilfe des Funktionsassistenten durch Potenzierung der Differenz berechnet.

⇒ **Einfügen** ⇒ **Funktion** ⇒ **Math.& Trigon.** ⇒ **POTENZ** ⇒ (F13-G13;2) (⇒ Abb. 3.54).

Die Potenzierung kann auch über den Potenzoperator " ^ " erfolgen ⇒ (F13-G13)^2

Beide Messwertreihen werden in die Diagrammdarstellung mit aufgenommen. (⇒ Abb. 3.55).

3.3.2.2 THEIS-Funktion

zu 5. Zur Ermittlung der Absenkung mittels THEIS-Funktion ist zuerst

⇒ σ **zu berechnen**; t ist Variable, T , S und r sind als Namenfelder zu definieren. Unter Benutzung des Funktionsassistenten für die Berechnung der Potenz oder dem Potenzoperator "^^" ist die Formel in die Tabelle einzugeben (⇒ Abb. 3.56)

⇒ In die Brunnenfunktion $\mathbf{W}(\sigma)$ sind die Werte für σ zu übernehmen.

Für eine ausreichende Genauigkeit ist die Formel für 10 Glieder zu berechnen.

Die Funktionen für **ln**, **Potenz** und **Fakultät** sind mittels Funktionsassistenten einzufügen (⇒ Abb. 3.57)

⇒ In einer dritten Spalte ist die Absenkung s mittels vorgegebener THEIS-Funktion unter Übernahme der jeweiligen Werte für $W(\sigma)$ zu berechnen (⇒ Abb. 3.58).

zu 6. Die quadratische Abweichung wird wie unter 4. berechnet und in das Diagramm übertragen (⇒ Abb. 3.59).

Durch Variation der Werte für S bzw. k ist die Kurve der quadratischen Abweichung dem Wert Null möglichst stark anzunähern, zu minimieren (⇒ Abb. 3.60 - S ist von 0,0040 auf 0,0035 gesetzt worden).

	A	B	C	D
1	Variablen :			
2		tau=	1000	s
3		r =	5	m
4		S =	0,005	
5		k =	0,0002	m/s
6		hn =	15	m
7		V-Punkt=	0,005	m ³ /s
8		m=GW-St(t=0 sec)=	0	m
9		T= S*m=	0,003	m ² /s
10				
11	Messwerte :			
12		Zeit in sec.	GW-St.	
13			0	6,455
14			15	6,63
15			30	6,71
16			45	6,77
17			60	6,805
18			90	6,85
19			120	6,87
20			150	6,905
21			180	6,93
22			210	6,975
23			240	7,005
24			270	7,035
25			300	7,06
26			330	7,07
27			360	7,095
28			390	7,105
29			420	7,118
30			450	7,128
31			480	7,135
32			510	7,142
33			540	7,15
34			570	7,155
35			600	7,161
36			660	7,169
37			720	7,171
38			780	7,179
39			840	7,186
40			900	7,191
41			960	7,2
42			1020	7,204
43			1080	7,21
44			1140	7,212
45			1200	7,217
46			1260	7,22
47			1320	7,223
48			1440	7,23
49			1560	7,237
50			1680	7,241
51			1800	7,245
52			1920	7,249
53			2040	7,252
54			2160	7,257
55			2280	7,26
56			2400	7,262
57			2520	7,264
58			2640	7,267
59			2760	7,269
60			2880	7,272
61			3000	7,273
62			3120	7,276

Abbildung 3.49: Messwerte eines Pumpversuches

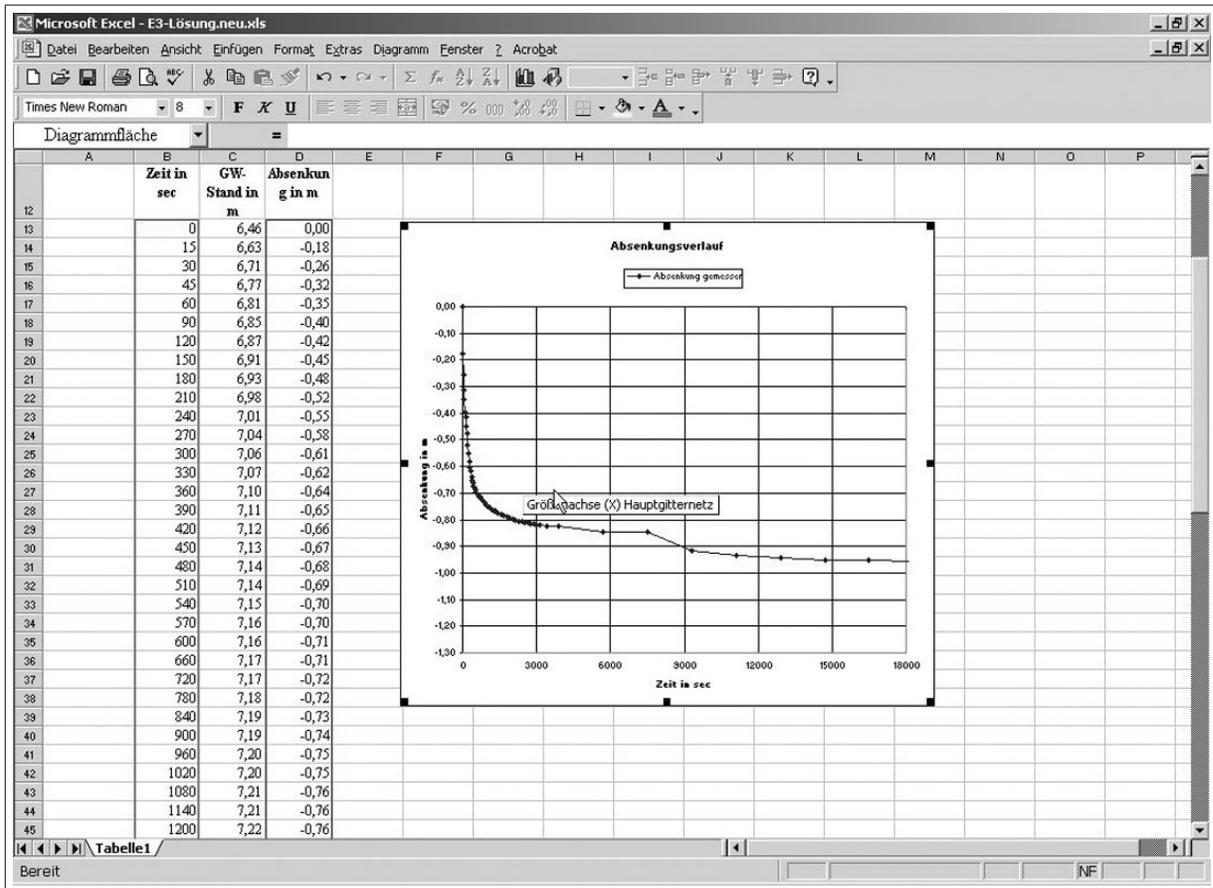


Abbildung 3.50: Darstellung der Absenkung in Abhängigkeit von der Zeit

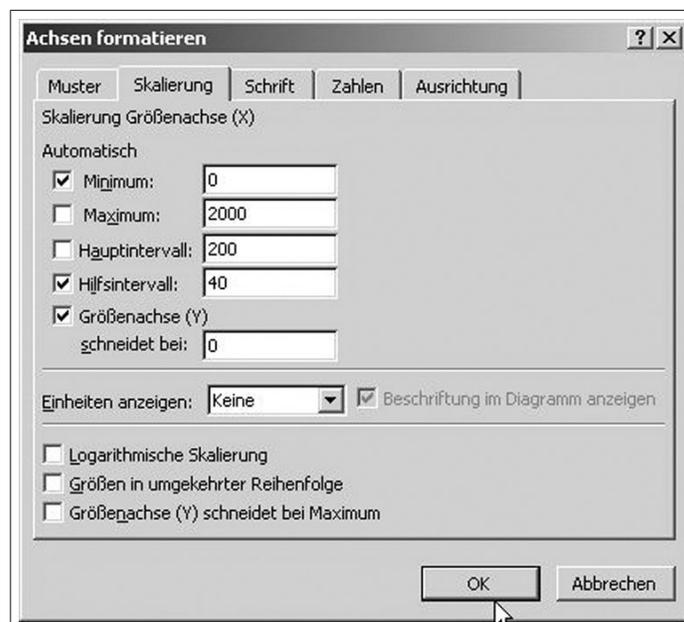
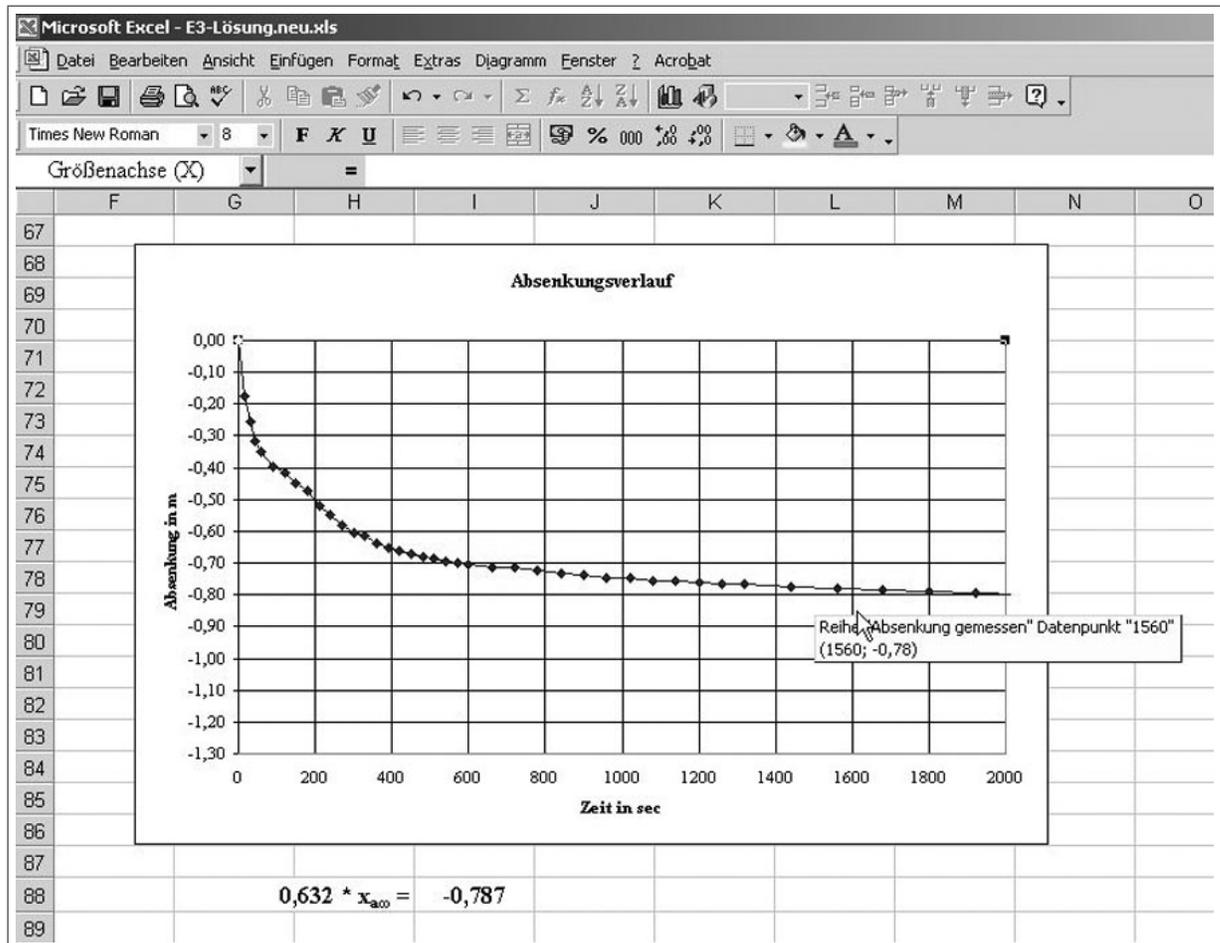


Abbildung 3.51: Skalierung der x-Achse

Abbildung 3.52: Bestimmen der Zeitkonstanten τ

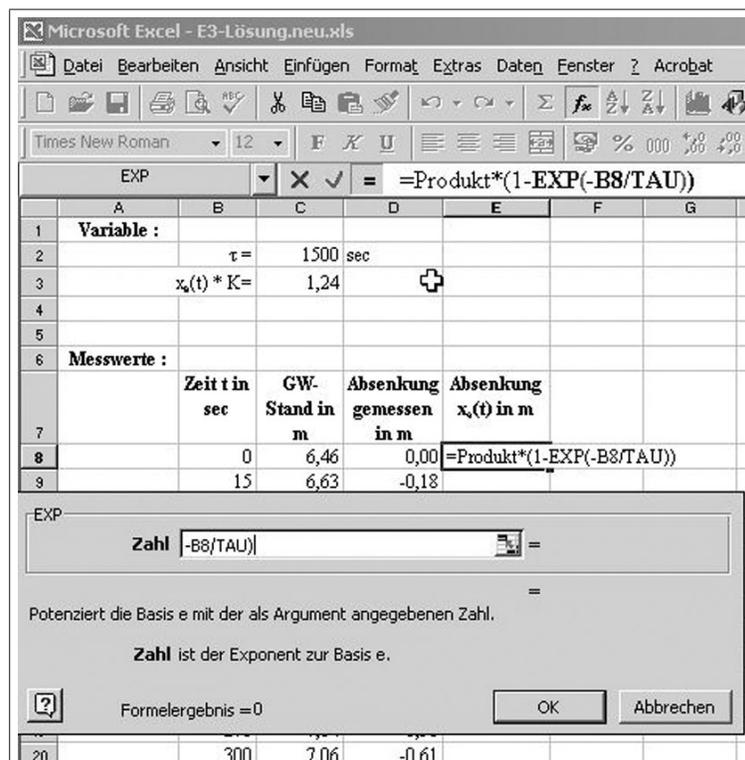


Abbildung 3.53: Erstellen der Formel zur Berechnung der e -Funktion

The screenshot shows a Microsoft Excel spreadsheet with the following data:

Variable :							
	$\tau =$	1500	sec				
	$x_0(t) * K =$	1,24					
Messwerte :							
	Zeit t in sec	GW- Stand in m	Absenkung gemessen in m	Absenkung $x_0(t)$ in m	Quadrat Abw.		
	0	6,46	0,00	0,00	=POTENZ(E8-D8;2)		
	15	6,63	-0,18	-0,01			
	20	6,71	0,26	0,07			
	360	7,10	-0,64	-0,26			
	390	7,11	-0,65	-0,28			

The 'POTENZ' dialog box is open, showing the following fields:

- Zahl: E8-D8
- Potenz: 2
- Formelergbnis: =0

The dialog box also contains the text: "Liefert als Ergebnis eine potenzierte Zahl. Potenz ist der Exponent, mit dem Sie die Zahl potenzieren möchten." and buttons for "OK" and "Abbrechen".

Abbildung 3.54: Erstellen der Formel zur Berechnung von Potenzen

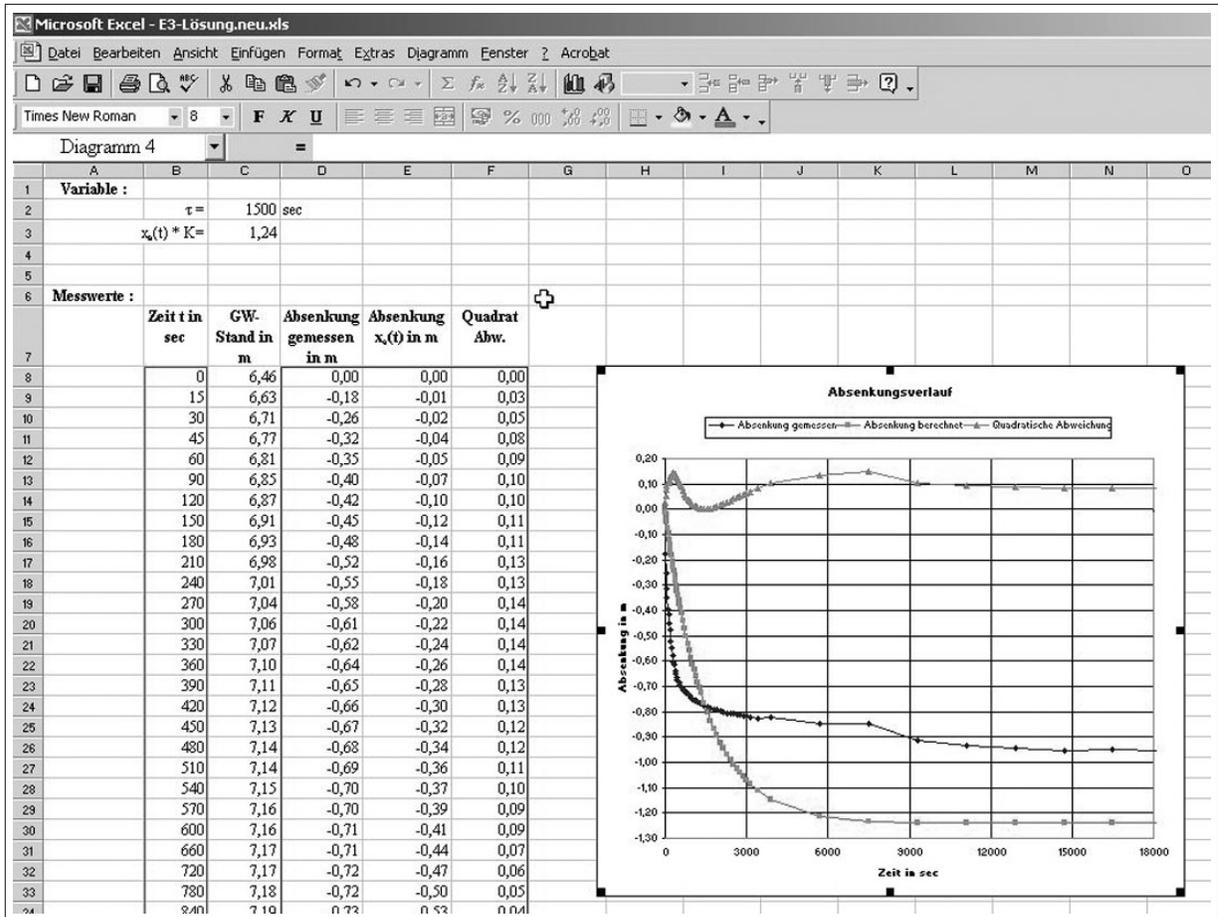


Abbildung 3.55: Darstellung der Messwerte und der Regressionsfunktion, für das Verzögerungsverhalten 1. Ordnung

Microsoft Excel

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster ? Acrobat

Times New Roman 12 F X U % 000 +00 +00

FAKULTÄT X ✓ = =POTENZ(r,2)*SSSS/4/T/B13

E3-Lösung.neu.xls

	A	B	C	D	H
1			Berechnung mit Theiss-Funktion		
2	Variable :				
3			tau=	1500	
4			r =	5,0000	
5			S=	0,0050	
6			k =	0,0002	
7			hn =	15,0000	
8			V-Punkt=	0,0050	
9			T=k*hn=	0,0030	
10	Messwerte :				
		Zeit t in sec	GW-Stand in m	Absenkung gemessen in m	σ
11					
12		0	6,46	0,00	0
13		15	6,63	-0,18	$ Z(r,2)*SSSS$
14		30	6,71	-0,26	0,347
15		45	6,77	-0,32	0,231
16		60	6,81	-0,35	0,174
17		90	6,85	-0,40	0,116
18		120	6,87	-0,42	0,087
19		150	6,91	-0,45	0,069
20		180	6,93	-0,48	0,058
21		210	6,98	-0,52	0,050
22		240	7,01	-0,55	0,043
23		270	7,04	-0,58	0,039
24		300	7,06	-0,61	0,035

Abbildung 3.56: Berechnung der σ -Werte für die THEIS-Funktion

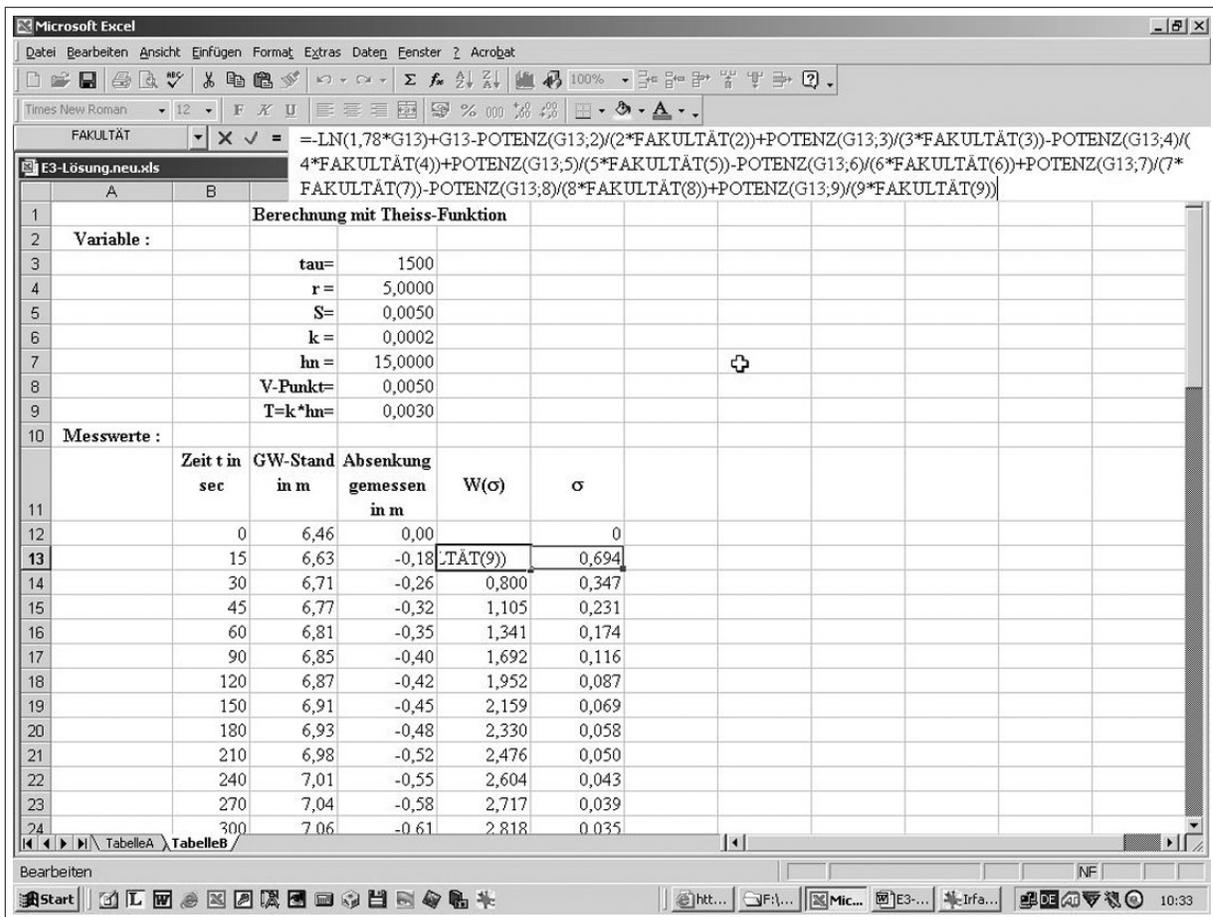


Abbildung 3.57: Berechnung der THEIS-Funktion

Microsoft Excel

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster ? Acrobat

Times New Roman 12 F K U

FAKULTÄT X ✓ = =-(h-WURZEL(POTENZ(h;2)-V/2/PI()/k*F13))

E3-Lösung.neu.xls

	A	B	C	D	E	F	G	
1			Berechnung mit Theiss-Funktion					
2	Variable :							
3			tau=	1500				
4			r =	5,0000				
5			S=	0,0050				
6			k =	0,0002				
7			hn =	15,0000				
8			V-Punkt=	0,0050				
9			T=k*hn=	0,0030				
10	Messwerte :							
		Zeit t in sec	GW-Stand in m	Absenkung gemessen in m	Absenkung s nach Theiss	W(σ)	σ	
11								
12		0	6,46	0,00			0	
13		15	6,63	-0,18	=(0/k*F13))	0,378	0,694	
14		30	6,71	-0,26	-0,107	0,800	0,347	
15		45	6,77	-0,32	-0,147	1,105	0,231	
16		60	6,81	-0,35	-0,179	1,341	0,174	
17		90	6,85	-0,40	-0,226	1,692	0,116	
18		120	6,87	-0,42	-0,261	1,952	0,087	
19		150	6,91	-0,45	-0,289	2,159	0,069	
20		180	6,93	-0,48	-0,312	2,330	0,058	
21		210	6,98	-0,52	-0,332	2,476	0,050	
22		240	7,01	-0,55	-0,349	2,604	0,043	
23		270	7,04	-0,58	-0,365	2,717	0,039	
24		300	7,06	-0,61	-0,379	2,818	0,035	

Abbildung 3.58: Berechnung der Absenkung nach der THEIS-Funktion

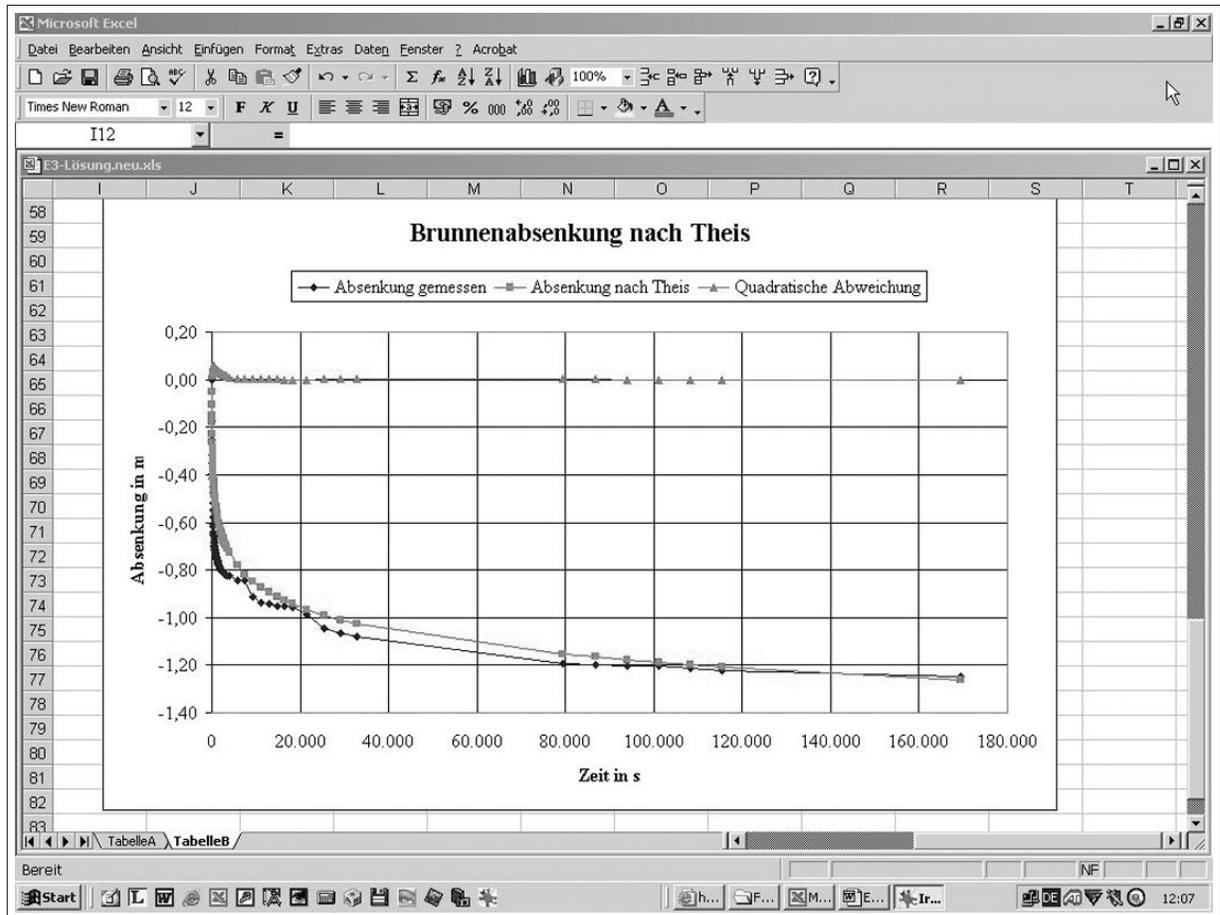


Abbildung 3.59: Darstellung der Messwerte, der Absenkung nach THEIS und der quadratischen Abweichung

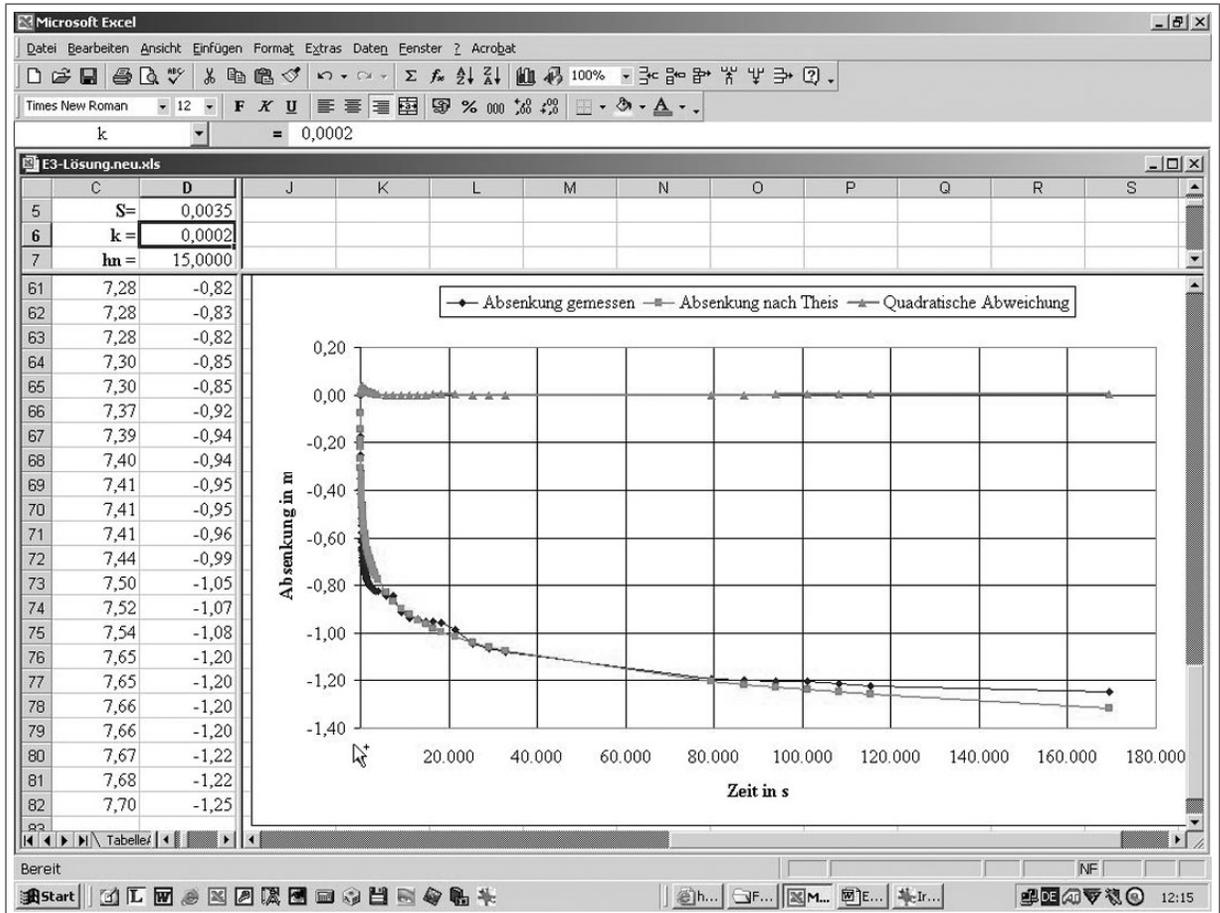


Abbildung 3.60: Minimierung der quadratischen Abweichung durch Variation der Variablen (S bzw. k)