

3.5 Gleichungssysteme und numerische Integration

3.5.1 Aufgaben

1. Stellen Sie das folgende Gleichungssystem

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$$

$$x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1$$

als Matrixgleichung

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

in einer MS-Excel-Arbeitsmappe als Koeffizientenmatrix und Vektor der rechten Seite dar!

Lösen Sie das Gleichungssystem mittels der CRAMERSchen Regel (Determinantenberechnung) und der Matrizenmultiplikation der inversen Koeffizientenmatrix und des Vektors der rechten Seite. Die Bildung der inversen Matrix führen Sie mittels Einzelschritten und unter Verwendung von MS-Excel-Funktionen durch.

2. Berechnen Sie das folgende Integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

mit Hilfe der numerischen Integrationsmethoden Rechteck- und Trapezregel für die Schrittweiten $\Delta x = 0,1$ und $0,01$.

Stellen Sie die Funktion $f(x) = 1/(1+x)$ sowie die Summen der Teilflächen der o.g. Integrationsmethoden in einem Diagramm grafisch dar. Die grafische Darstellung soll im Wertebereich von $x = 0$ bis 1 erfolgen.

3.5.2 Arbeitsschritte

1. Gleichungen als Matrix schreiben und die CRAMERSchen Determinanten D_{x_1} , D_{x_2} sowie D_{x_3} formulieren (\implies Abb. 3.81)

Determinante der Matrix berechnen:

\implies Funktionsassistent \implies **MDET** (\implies Abb. 3.82) \implies Wert der Determinante $|\mathbf{A}| = DET$ berechnen (\implies Abb. 3.83)

⇒ Wert der CRAMERSchen Determinante D_{x_1} und Lösung x_1, x_2 sowie x_3 bestimmen (⇒ Abb. 3.84)

Inverse Matrix berechnen:

Lösung in Einzelschritten

⇒ Berechnen der Elemente für eine inverse Matrix gemäß mathematischen Regeln (⇒ Abb. 3.85)

⇒ Lösung x_1, x_2 sowie x_3 durch Multiplikation der inversen Matrix mit Vektor der rechten Seite (Zeile mal Spalte) bestimmen (⇒ Abb. 3.86)

interner MS-Excel-Funktion:

⇒ Funktionsassistent ⇒ **MINV** (⇒ Abb. 3.87) Inverse Matrix bestimmen (⇒ Abb. 3.88)

⇒ Funktionsassistent ⇒ **MMULT** (⇒ Abb. 3.89) Matrizenmultiplikation (⇒ Abb. 3.90)

2. Numerische Integration

⇒ Erstellen von je einer Tabelle für den Wertebereich $x = 0$ bis 1 mit Schrittweiten von $\Delta x = 0,1$ und $0,01$

⇒ Berechnung der Funktion $y = f(x) = 1/(1+x)$ für alle Schritte

⇒ Berechnung der Integrale mittels Rechteckregel $F_{nRecht} = \Delta x \cdot y_n$ und Trapezregel $F_{nTrap} = \Delta x \cdot (y_n + y_{n+1})/2$ und Aufsummieren der Ergebnisse (⇒ Abb. 3.91)

⇒ Darstellung der Ergebnisse in einem Diagramm (⇒ Abb. 3.92)

⇒ Lösungsschritte sind aus MS-Excel-Tabelle (Lösung) ablesbar.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
	Matrizenschreibweise der Gleichungen:									
1										
2		x_1	x_2	x_3	R	D_{d1}	R	x_2	x_3	
3	Matrix A=	3	1	-1	2		2	1	-1	
4		2	-1	4	0		0	-1	4	
5		1	5	-2	1		1	5	-2	
6										
7						D_{d2}	x_1	R	x_3	
8							3	2	-1	
9							2	0	4	
10							1	1	-2	
11										
12						D_{d3}	x_1	x_2	R	
13							3	1	2	
14							2	-1	0	
15							1	5	1	
16										

Abbildung 3.81: Eintragen der Koeffizienten und der rechten Seite des Gleichungssystems, Vorbereitung der CRAMER-Regel

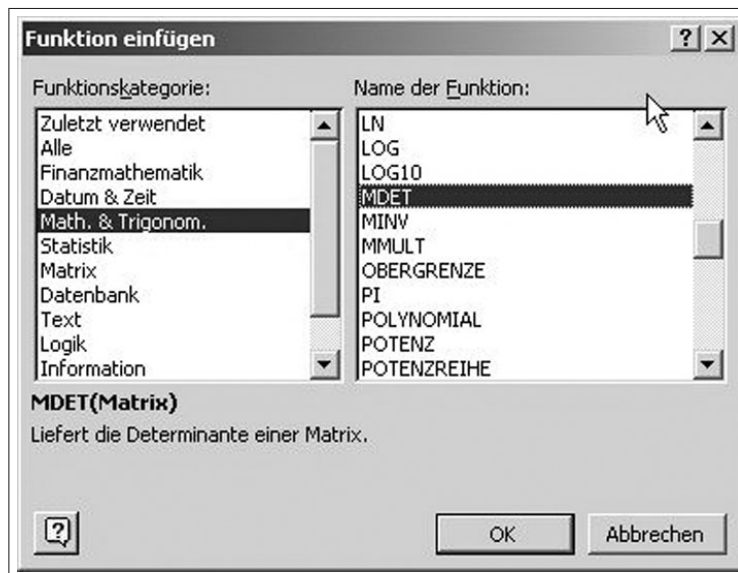


Abbildung 3.82: Aufruf der MS-Excel-Funktion MDET zur Determinatenberechnung

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2		x_1	x_2	x_3	R		D_{x1}	R	x_2	x_3	
3	Matrix A=	3	1	-1	2			2	1	-1	
4		2	-1	4	0			0	-1	4	
5		1	5	-2	1			1	5	-2	
6											
7							D_{x2}	x_1	R	x_3	
8	Determinante Det A=			=MDETERM(B3:D5)				3	2	-1	
9		x_1	x_2	x_3				2	0	4	
10		0,5789	-0,0351	-0,2982				1	1	-2	
11											
12							D_{x3}	x_1	x_2	R	
13								3	1	2	
14								2	-1	0	
15								1	5	1	
16											

Abbildung 3.83: Argumentenliste (Koeffizientenmatrix) der Funktion MDETERM

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2		x_1	x_2	x_3	R		D_{x1}	R	x_2	x_3	
3	Matrix A=	3	1	-1	2			2	1	-1	
4		2	-1	4	0			0	-1	4	
5		1	5	-2	1			1	5	-2	
6											
7							D_{x2}	x_1	R	x_3	
8	Determinante Det A=			-57				3	2	-1	
9		x_1	x_2	x_3				2	0	4	
10		=MDETERM(H3:J5)/DET	-0,0351	-0,2982				1	1	-2	
11											
12							D_{x3}	x_1	x_2	R	
13								3	1	2	
14								2	-1	0	
15								1	5	1	
16											

Abbildung 3.84: Lösung des Gleichungssystems nach der Cramer-Regel für x_1

	A	B	C	D
14				
15				
16	Determinate Det A=			-57
17		x_1	x_2	x_3
18	Lösung	0,5789	-0,0351	-0,2982
19				
20				
21	Inverse Matrix A^{-1} =	0,3158	0,0526	-0,0526
22	Lösung in Einzelschritten	-0,1404	0,0877	0,2456
23		-0,1930	0,2456	0,0877
24				
25		x_1	x_2	x_3
26	Lösung	0,5789	-0,0351	-0,2982
27				

Abbildung 3.85: Bildung des Elementes a_{11} der inversen Matrix

	A	B	C	D	E	F	G
14							
15							
16	Determinate Det A=						-57
17		x_1	x_2	x_3			
18	Lösung	0,5789	-0,0351	-0,2982			
19							
20							
21	Inverse Matrix A^{-1} =	0,3158	0,0526	-0,0526			
22	Lösung in Einzelschritten	-0,1404	0,0877	0,2456			
23		-0,1930	0,2456	0,0877			
24							
25		x_1	x_2	x_3			
26	Lösung	0,5789	-0,0351	-0,2982			
27							

Abbildung 3.86: Lösung des Gleichungssystems durch Multiplikation der inversen Matrix mit der rechten Seite für x_1

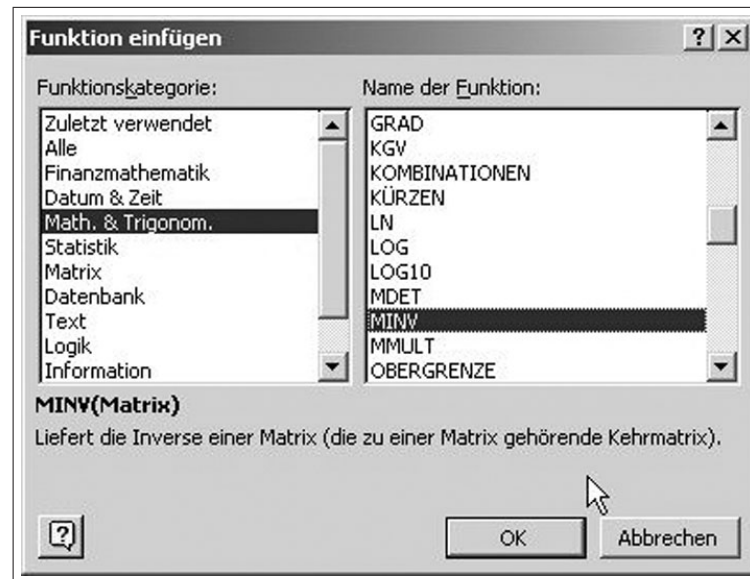


Abbildung 3.87: Aufruf der MS-Excel Funktion MINV zur Berechnung der inversen Matrix

	A	B	C	D	E
1	Matrizenschreibweise der Gleichungen:				
2		x₁	x₂	x₃	R
3	Matrix A=	3	1	-1	2
4		2	-1	4	0
5		1	5	-2	1
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16	Determinante Det A=			-57	
17		x₁	x₂	x₃	
18	Lösung	0,5789	-0,0351	-0,2982	
19					
20					R
21	Inverse Matrix A⁻¹ =	0,3158	0,0526	-0,0526	2
22	Lösung in Einzelschritten	-0,1404	0,0877	0,2456	0
23		-0,1930	0,2456	0,0877	1
24					
25		x₁	x₂	x₃	
26	Lösung	0,5789	-0,0351	-0,2982	
27					
33					R
34	Inverse Matrix A⁻¹ =	0,3158	0,0526	-0,0526	2
35	Lösung mittels	-0,1404	0,0877	0,2456	0
36	MS-Excel-Funktionen	-0,1930	0,2456	0,0877	1
37					
38		x₁	x₂	x₃	
39	Lösung	0,5789	-0,0351	-0,2982	
40					

Abbildung 3.88: Argumentenliste (Koeffizientenmatrix) für MINV

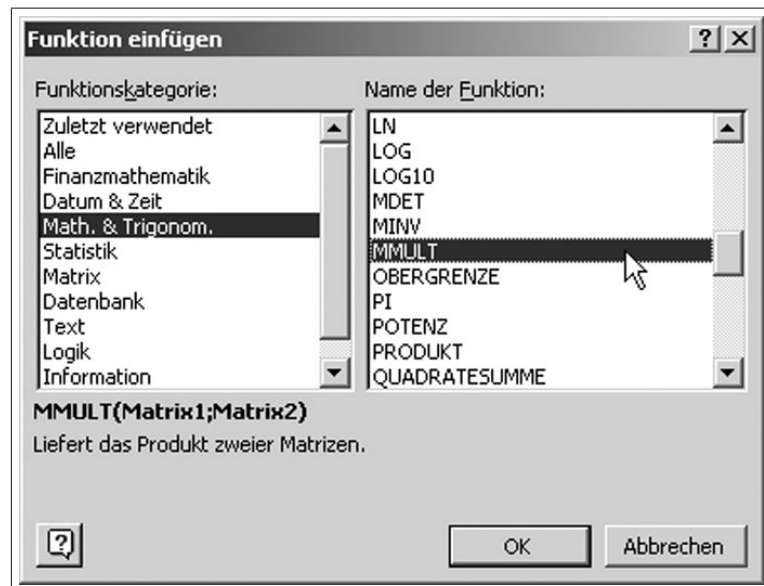


Abbildung 3.89: Aufruf der Funktion MMULT zur Matrizenmultiplikation

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster ? Acrob					
Times New Roman 14 F K U					
B40 = =MMULT(B35:D35;E35:E37)					
	A	B	C	D	E
1	Matrizenschreibweise				
2	der Gleichungen:	x₁	x₂	x₃	R
3	Matrix A=	3	1	-1	2
4		2	-1	4	0
5		1	5	-2	1
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16	Determinante Det A=			-57	
17		x₁	x₂	x₃	
18	Lösung	0,5789	-0,0351	-0,2982	
19					
20					R
21	Inverse Matrix A⁻¹ =	0,3158	0,0526	-0,0526	2
22	Lösung in Einzelschritten	-0,1404	0,0877	0,2456	0
23		-0,1930	0,2456	0,0877	1
24					
25		x₁	x₂	x₃	
26	Lösung	0,5789	-0,0351	-0,2982	
27					
33					
34					R
35	Inverse Matrix A⁻¹ =	0,3158	0,0526	-0,0526	2
36	Lösung mittels	-0,1404	0,0877	0,2456	0
37	MS-Excel-Funktionen	-0,1930	0,2456	0,0877	1
38					
39		x₁	x₂	x₃	
40	Lösung	0,5789	-0,0351	-0,2982	
41					

Abbildung 3.90: Argumentenliste für MMULT zur Berechnung von x_1

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster ? Acrobat							
Times New Roman 12 F X U							
H35 =							
	A	B	C		D	E	F
2	Schrittweite 0,1						
3							
4	Schritte	Funktion: $f(1/(1+x))$	Rechteckregel Schrittweite = 0,1		Trapezregel Schrittweite = 0,1		
5			Numer. Integration	kum. Summe	Numer. Integration	kum. Summe	
6	0,00	1,00	0,1000	0,1000	0,0955	0,0955	
7	0,10	0,91	0,0909	0,1909	0,0871	0,1826	
8	0,20	0,83	0,0833	0,2742	0,0801	0,2627	
9	0,30	0,77	0,0769	0,3512	0,0742	0,3369	
10	0,40	0,71	0,0714	0,4226	0,0690	0,4059	
11	0,50	0,67	0,0667	0,4893	0,0646	0,4705	
12	0,60	0,63	0,0625	0,5518	0,0607	0,5312	
13	0,70	0,59	0,0588	0,6106	0,0572	0,5884	
14	0,80	0,56	0,0556	0,6661	0,0541	0,6425	
15	0,90	0,53	0,0526	0,7188	0,0513	0,6938	
16	1,00	0,50					
17		Summe =	0,7188		0,6938		
18							
19	Schrittweite 0,01						
20							
21		Funktion: $f(1/(1+x))$	Rechteckregel Schrittweite = 0,1		Trapezregel Schrittweite = 0,1		
22			Numer. Integration	kum. Summe	Numer. Integration	kum. Summe	
23	0,00	1,00	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100	
24	0,01	0,99	0,0099	0,0199	0,0099	0,0198	
25	0,02	0,98	0,0098	0,0297	0,0098	0,0296	
26	0,03	0,97	0,0097	0,0394	0,0097	0,0392	
27	0,04	0,96	0,0096	0,0490	0,0096	0,0488	
28	0,05	0,95	0,0095	0,0586	0,0095	0,0583	
29	0,06	0,94	0,0094	0,0680	0,0094	0,0677	
30	0,07	0,93	0,0093	0,0773	0,0093	0,0770	
31	0,08	0,93	0,0093	0,0866	0,0092	0,0862	
32	0,09	0,92	0,0092	0,0958	0,0091	0,0953	
33	0,10	0,91	0,0091	0,1049	0,0090	0,1044	
34	0,11	0,90	0,0090	0,1139	0,0090	0,1133	
35	0,12	0,89	0,0089	0,1228	0,0089	0,1222	

Abbildung 3.91: Berechnung der Funktionswerte und Teilflächen für Rechteck- und Trapezregel

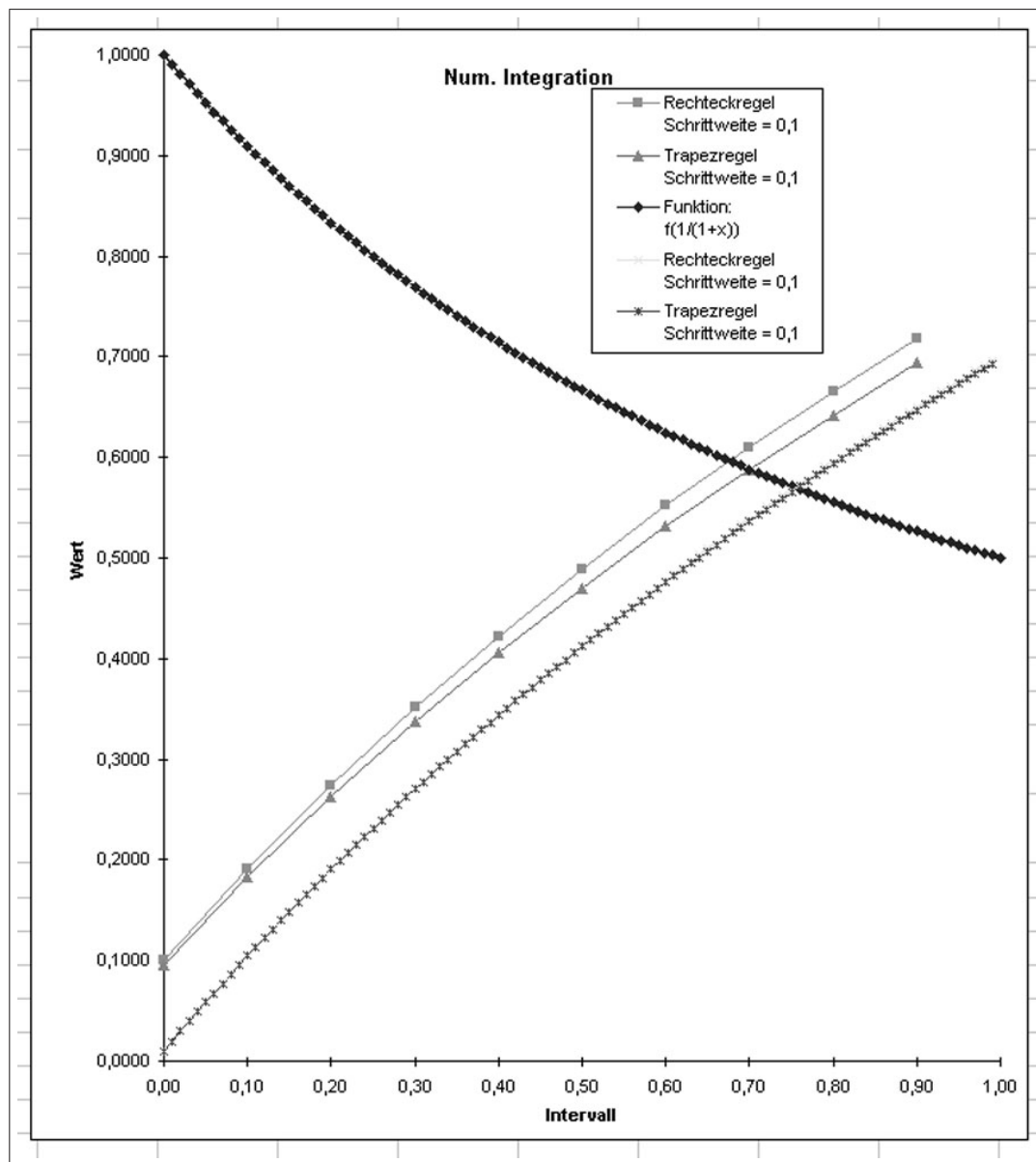


Abbildung 3.92: Darstellung der Funktionswerte und der Teilflächen der Rechteck- und Trapezregel