

## 3.5 Gleichungssysteme und numerische Integration

### 3.5.1 Aufgaben

1. Stellen Sie das folgende Gleichungssystem

$$3x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0$$

$$x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1$$

als Matrizengleichung

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

in einer MS-Excel-Arbeitsmappe als Koeffizientenmatrix und Vektor der rechten Seite dar!

Lösen Sie das Gleichungssystem mittels der CRAMERSchen Regel (Determinantenberechnung) und der Matrizenmultiplikation der inversen Koeffizientenmatrix und des Vektors der rechten Seite. Die Bildung der inversen Matrix führen Sie mittels Einzelschritten und unter Verwendung von MS-Excel-Funktionen durch.

2. Berechnen Sie das folgende Integral

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

mit Hilfe der numerischen Integrationsmethoden Rechteck- und Trapezregel für die Schrittweiten  $\Delta x = 0,1$  und  $0,01$ .

Stellen Sie die Funktion  $f(x) = 1/(1+x)$  sowie die Summen der Teilflächen der o.g. Integrationsmethoden in einem Diagramm grafisch dar. Die grafische Darstellung soll im Wertebereich von  $x = 0$  bis  $1$  erfolgen.

### 3.5.2 Arbeitsschritte

1. Gleichungen als Matrix schreiben und die CRAMERSchen Determinanten  $D_{x_1}$ ,  $D_{x_2}$  sowie  $D_{x_3}$  formulieren ( $\implies$  Abb. 3.81)

**Determinante der Matrix berechnen:**

$\implies$  Funktionsassistent  $\implies$  **MDET** ( $\implies$  Abb. 3.82)  $\implies$  Wert der Determinante  $|\mathbf{A}| = DET$  berechnen ( $\implies$  Abb. 3.83)

⇒ Wert der CRAMERSchen Determinante  $D_{x_1}$  und Lösung  $x_1, x_2$  sowie  $x_3$  bestimmen (⇒ Abb. 3.84)

**Inverse Matrix berechnen:**

**Lösung in Einzelschritten**

⇒ Berechnen der Elemente für eine inverse Matrix gemäß mathematischen Regeln (⇒ Abb. 3.85)

⇒ Lösung  $x_1, x_2$  sowie  $x_3$  durch Multiplikation der inversen Matrix mit Vektor der rechten Seite (Zeile mal Spalte) bestimmen (⇒ Abb. 3.86)

**interner MS-Excel-Funktion:**

⇒ Funktionsassistent ⇒ **MINV** (⇒ Abb. 3.87) Inverse Matrix bestimmen (⇒ Abb. 3.88)

⇒ Funktionsassistent ⇒ **MMULT** (⇒ Abb. 3.89) Matrizenmultiplikation (⇒ Abb. 3.90)

2. Numerische Integration

⇒ Erstellen von je einer Tabelle für den Wertebereich  $x = 0$  bis  $1$  mit Schrittweiten von  $\Delta x = 0,1$  und  $0,01$

⇒ Berechnung der Funktion  $y = f(x) = 1/(1+x)$  für alle Schritte

⇒ Berechnung der Integrale mittels Rechteckregel  $F_{nRecht} = \Delta x \cdot y_n$  und Trapezregel  $F_{nTrap} = \Delta x \cdot (y_n + y_{n+1})/2$  und Aufsummieren der Ergebnisse (⇒ Abb. 3.91)

⇒ Darstellung der Ergebnisse in einem Diagramm (⇒ Abb. 3.92)

⇒ Lösungsschritte sind aus MS-Excel-Tabelle (Lösung) ablesbar.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
	DET =										
	Matrizenschreibweise der Gleichungen:										
1											
2		x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	R		D <sub>1</sub>	R	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	
3	Matrix A=	3	1	-1	2			2	1	-1	
4		2	-1	4	0			0	-1	4	
5		1	5	-2	1			1	5	-2	
6											
7							D <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	R	x <sub>3</sub>	
8								3	2	-1	
9								2	0	4	
10								1	1	-2	
11											
12							D <sub>3</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	R	
13								3	1	2	
14								2	-1	0	
15								1	5	1	
16											

Abbildung 3.81: Eintragen der Koeffizienten und der rechten Seite des Gleichungssystems, Vorbereitung der CRAMER-Regel

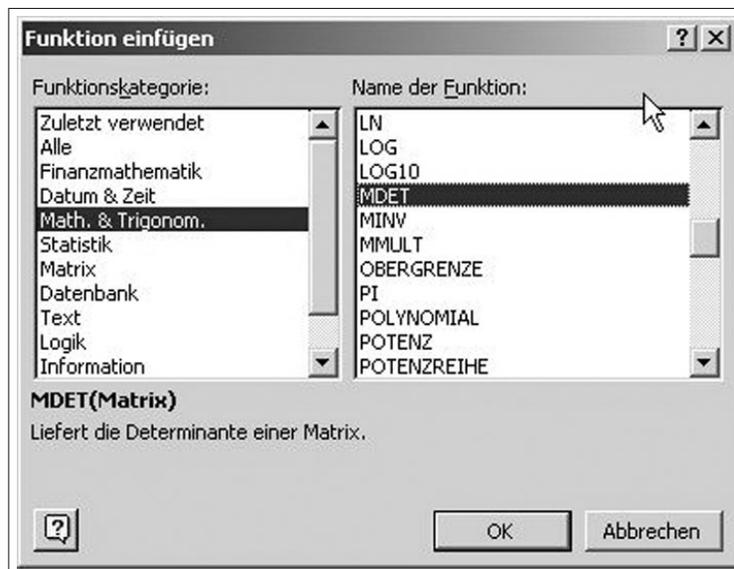


Abbildung 3.82: Aufruf der MS-Excel-Funktion MDET zur Determinatenberechnung

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2		$x_1$	$x_2$	$x_3$	R		$D_{x1}$	R	$x_2$	$x_3$	
3	Matrix A=	3	1	-1	2			2	1	-1	
4		2	-1	4	0			0	-1	4	
5		1	5	-2	1			1	5	-2	
6											
7							$D_{x2}$	$x_1$	R	$x_3$	
8	Determinante Det A=			=MDETERM(B3:D5)				3	2	-1	
9		$x_1$	$x_2$	$x_3$				2	0	4	
10		0,5789	-0,0351	-0,2982				1	1	-2	
11											
12							$D_{x3}$	$x_1$	$x_2$	R	
13								3	1	2	
14								2	-1	0	
15								1	5	1	
16											

Abbildung 3.83: Argumentenliste (Koeffizientenmatrix) der Funktion MDETERM

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
2		$x_1$	$x_2$	$x_3$	R		$D_{x1}$	R	$x_2$	$x_3$	
3	Matrix A=	3	1	-1	2			2	1	-1	
4		2	-1	4	0			0	-1	4	
5		1	5	-2	1			1	5	-2	
6											
7							$D_{x2}$	$x_1$	R	$x_3$	
8	Determinante Det A=			-57				3	2	-1	
9		$x_1$	$x_2$	$x_3$				2	0	4	
10		=MDETERM(H3:J5)/DET	-0,0351	-0,2982				1	1	-2	
11											
12							$D_{x3}$	$x_1$	$x_2$	R	
13								3	1	2	
14								2	-1	0	
15								1	5	1	
16											

Abbildung 3.84: Lösung des Gleichungssystems nach der Cramer-Regel für  $x_1$

	A	B	C	D
14				
15				
16	<b>Determinante Det A=</b>			<b>-57</b>
17		<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>
18	Lösung	<b>0,5789</b>	<b>-0,0351</b>	<b>-0,2982</b>
19				
20				
21	<b>Inverse Matrix A<sup>-1</sup> =</b>	0,3158	0,0526	-0,0526
22	Lösung in Einzelschritten	-0,1404	0,0877	0,2456
23		-0,1930	0,2456	0,0877
24				
25		<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>
26	Lösung	<b>0,5789</b>	<b>-0,0351</b>	<b>-0,2982</b>
27				

Abbildung 3.85: Bildung des Elementes  $a_{11}$  der inversen Matrix

	A	B	C	D	E	F	G
14							
15							
16	<b>Determinante Det A=</b>				<b>-57</b>		
17		<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>			
18	Lösung	<b>0,5789</b>	<b>-0,0351</b>	<b>-0,2982</b>			
19							
20							
21	<b>Inverse Matrix A<sup>-1</sup> =</b>	0,3158	0,0526	-0,0526			
22	Lösung in Einzelschritten	-0,1404	0,0877	0,2456			
23		-0,1930	0,2456	0,0877			
24							
25		<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>			
26	Lösung	<b>0,5789</b>	<b>-0,0351</b>	<b>-0,2982</b>			
27							

Abbildung 3.86: Lösung des Gleichungssystems durch Multiplikation der inversen Matrix mit der rechten Seite für  $x_1$

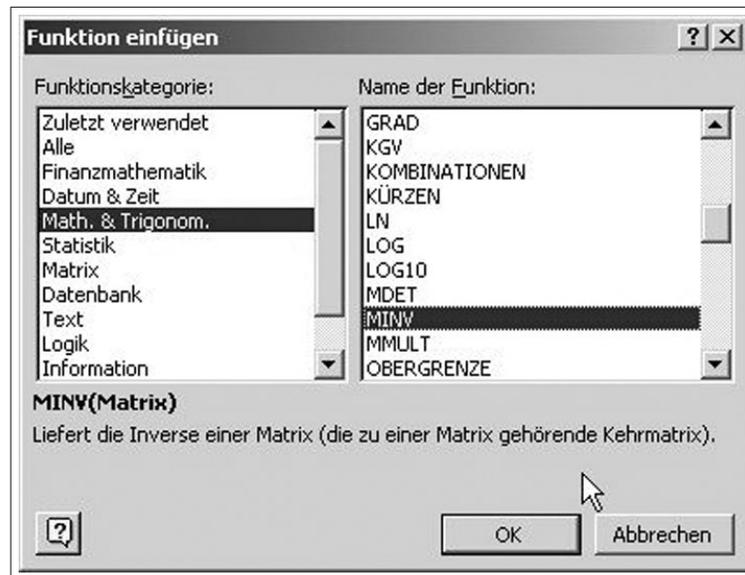


Abbildung 3.87: Aufruf der MS-Excel Funktion MINV zur Berechnung der inversen Matrix

	A	B	C	D	E
1	<b>Matrizenschreibweise der Gleichungen:</b>				
2		<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	<b>R</b>
3	<b>Matrix A=</b>	3	1	-1	2
4		2	-1	4	0
5		1	5	-2	1
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16	<b>Determinante Det A=</b>			-57	
17		<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	
18	Lösung	<b>0,5789</b>	<b>-0,0351</b>	<b>-0,2982</b>	
19					
20					<b>R</b>
21	<b>Inverse Matrix A<sup>-1</sup> =</b>	0,3158	0,0526	-0,0526	2
22	Lösung in Einzelschritten	-0,1404	0,0877	0,2456	0
23		-0,1930	0,2456	0,0877	1
24					
25		<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	
26	Lösung	<b>0,5789</b>	<b>-0,0351</b>	<b>-0,2982</b>	
27					
33					<b>R</b>
34	<b>Inverse Matrix A<sup>-1</sup> =</b>	0,3158	0,0526	-0,0526	2
35	Lösung mittels	-0,1404	0,0877	0,2456	0
36	MS-Excel-Funktionen	-0,1930	0,2456	0,0877	1
37					
38		<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	
39	Lösung	<b>0,5789</b>	<b>-0,0351</b>	<b>-0,2982</b>	
40					

Abbildung 3.88: Argumentenliste (Koeffizientenmatrix) für MINV

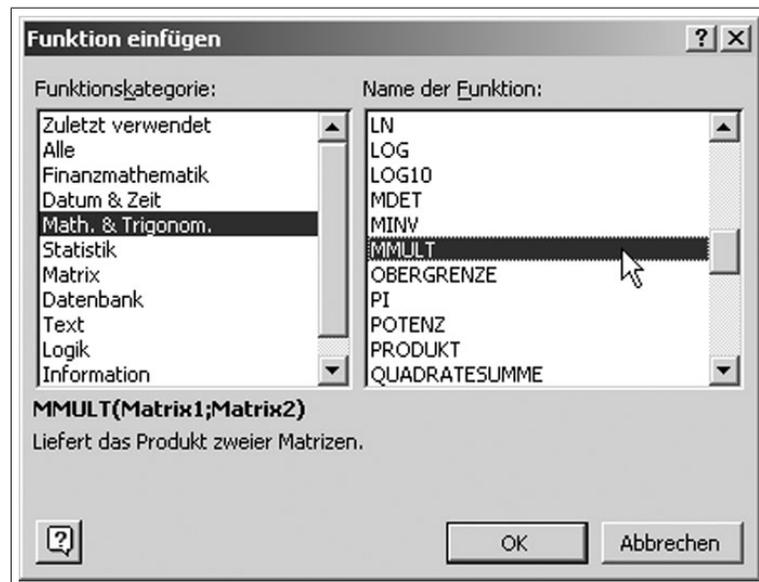


Abbildung 3.89: Aufruf der Funktion MMULT zur Matrizenmultiplikation

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster ? Acrob					
Times New Roman 14 F K U					
B40 = =MMULT(B35:D35;E35:E37)					
	A	B	C	D	E
1	<b>Matrizenschreibweise</b>				
	<b>der Gleichungen:</b>				
2		<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	<b>R</b>
3	<b>Matrix A=</b>	3	1	-1	2
4		2	-1	4	0
5		1	5	-2	1
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16	<b>Determinante Det A=</b>			-57	
17		<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	
18	Lösung	<b>0,5789</b>	<b>-0,0351</b>	<b>-0,2982</b>	
19					
20					<b>R</b>
21	<b>Inverse Matrix A<sup>-1</sup> =</b>	0,3158	0,0526	-0,0526	2
22	Lösung in Einzelschritten	-0,1404	0,0877	0,2456	0
23		-0,1930	0,2456	0,0877	1
24					
25		<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	
26	Lösung	<b>0,5789</b>	<b>-0,0351</b>	<b>-0,2982</b>	
27					
33					
34					<b>R</b>
35	<b>Inverse Matrix A<sup>-1</sup> =</b>	0,3158	0,0526	-0,0526	2
36	Lösung mittels	-0,1404	0,0877	0,2456	0
37	MS-Excel-Funktionen	-0,1930	0,2456	0,0877	1
38					
39		<b>x<sub>1</sub></b>	<b>x<sub>2</sub></b>	<b>x<sub>3</sub></b>	
40	Lösung	<b>0,5789</b>	<b>-0,0351</b>	<b>-0,2982</b>	
41					

Abbildung 3.90: Argumentenliste für MMULT zur Berechnung von  $x_1$

Datei Bearbeiten Ansicht Einfügen Format Extras Daten Fenster ? Acrobat						
Times New Roman 12 F X U % 000 ‰ ‰						
H35 =						
	A	B	C	D	E	F
2	<b>Schrittweite 0,1</b>					
3						
4	Schritte	Funktion: $f(1/(1+x))$	Rechteckregel Schrittweite = 0,1		Trapezregel Schrittweite = 0,1	
5			Numer. Integration	kum. Summe	Numer. Integration	kum. Summe
6	0,00	1,00	0,1000	0,1000	0,0955	0,0955
7	0,10	0,91	0,0909	0,1909	0,0871	0,1826
8	0,20	0,83	0,0833	0,2742	0,0801	0,2627
9	0,30	0,77	0,0769	0,3512	0,0742	0,3369
10	0,40	0,71	0,0714	0,4226	0,0690	0,4059
11	0,50	0,67	0,0667	0,4893	0,0646	0,4705
12	0,60	0,63	0,0625	0,5518	0,0607	0,5312
13	0,70	0,59	0,0588	0,6106	0,0572	0,5884
14	0,80	0,56	0,0556	0,6661	0,0541	0,6425
15	0,90	0,53	0,0526	0,7188	0,0513	0,6938
16	1,00	0,50				
17		Summe =	<b>0,7188</b>		<b>0,6938</b>	
18						
19	<b>Schrittweite 0,01</b>					
20						
21		Funktion: $f(1/(1+x))$	Rechteckregel Schrittweite = 0,1		Trapezregel Schrittweite = 0,1	
22			Numer. Integration	kum. Summe	Numer. Integration	kum. Summe
23	0,00	1,00	0,0100	0,0100	0,0100	0,0100
24	0,01	0,99	0,0099	0,0199	0,0099	0,0198
25	0,02	0,98	0,0098	0,0297	0,0098	0,0296
26	0,03	0,97	0,0097	0,0394	0,0097	0,0392
27	0,04	0,96	0,0096	0,0490	0,0096	0,0488
28	0,05	0,95	0,0095	0,0586	0,0095	0,0583
29	0,06	0,94	0,0094	0,0680	0,0094	0,0677
30	0,07	0,93	0,0093	0,0773	0,0093	0,0770
31	0,08	0,93	0,0093	0,0866	0,0092	0,0862
32	0,09	0,92	0,0092	0,0958	0,0091	0,0953
33	0,10	0,91	0,0091	0,1049	0,0090	0,1044
34	0,11	0,90	0,0090	0,1139	0,0090	0,1133
35	0,12	0,89	0,0089	0,1228	0,0089	0,1222

Abbildung 3.91: Berechnung der Funktionswerte und Teilflächen für Rechteck- und Trapezregel

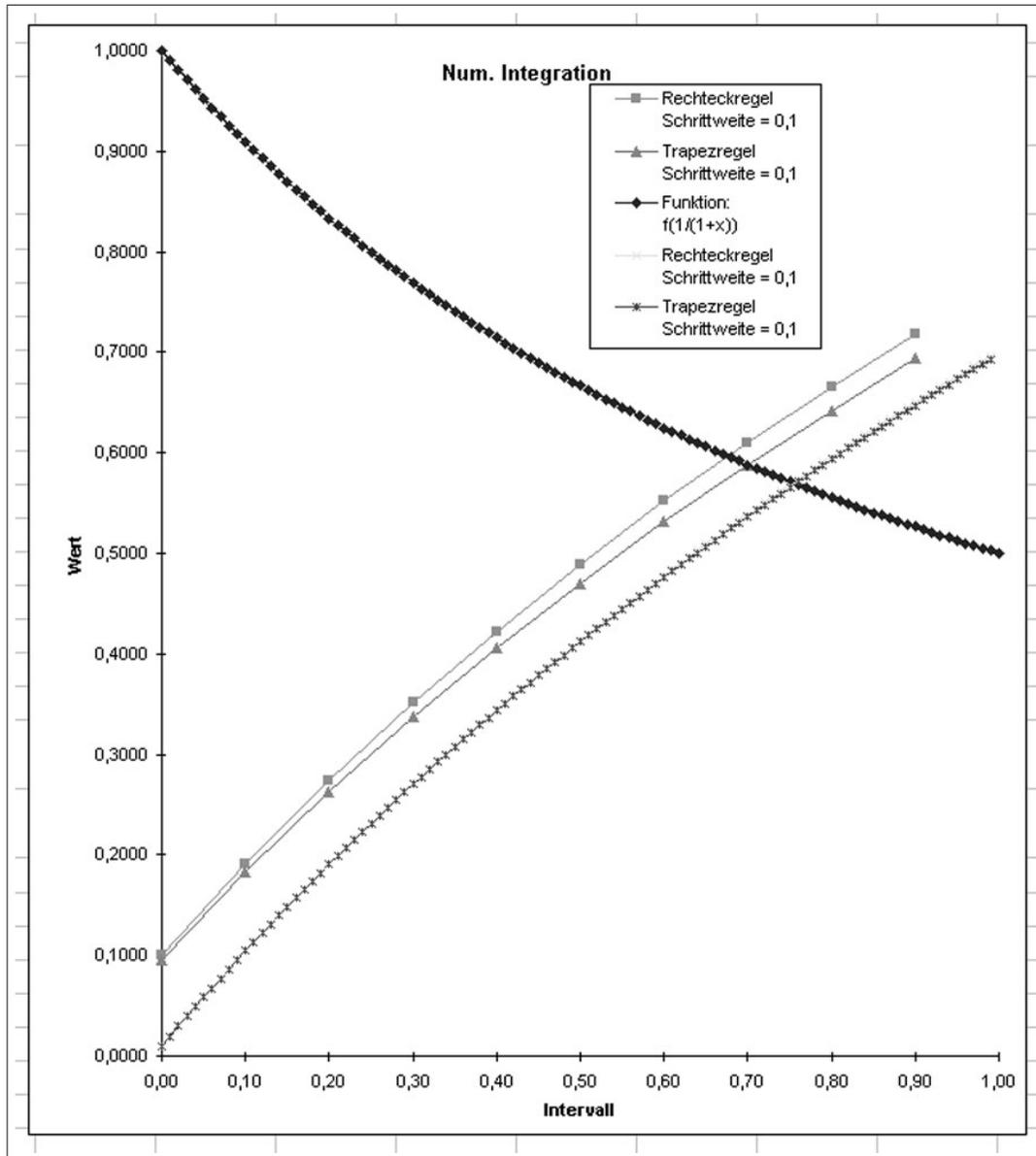


Abbildung 3.92: Darstellung der Funktionswerte und der Teilflächen der Rechteck- und Trapezregel