Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. einiger Lösungen)

7. Woche – Funktionen komplexer Variablen

A1 Bestimmen Sie den Konverganzradius der komplexen Exponentialfunktion und kennzeichnen Sie das Konvergenzgebiet in der komplexen Ebene ;-).

Lösung: QK: $\varrho = \dots$

A2 Machen Sie sich klar, dass die Definitionen der komplexen Winkelfunktionen $\sin(z), \cos(z)$ wie auch der komplexen hyperbolischen Funktionen $\sinh(z), \cosh(z)$, s. VL 13.17 **abwärts kompatibel** sind, in dem Sinne, dass sie auf der reellen Achse mit den bekannten reellen Funktionen $\sin(x), \cos(x)$ und $\sinh(x), \cosh(x)$ übereinstimmen.

Lösung: Für $z = x \in \mathbb{R} \dots$

A3 Alle Beziehungen in VL 13.17 sind aus einem minimalen Set von Gleichungen herleitbar (nur die merkt man sich), die jeweils durch ein Upgrade von reellem zu komplexem Argument aus Bekanntem hervorgehen:

$$\begin{array}{r|rcl}
(i) & \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x) & \to & \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z) \\
(ii) & \cos(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) & \to & \cos(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \\
(iii) & \sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) & \to & \sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \\
(iv) & \cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}) & \to & \cosh(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}) \\
(v) & \sinh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}) & \to & \sinh(z) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z})
\end{array}$$

Leiten Sie die Beziehung zwischen komplexer Sinusfunktion und reellen Winkel- und Hyperbel-Funktionen mit $z = x + \mathrm{i}y$

$$\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + \mathrm{i}\cos(x)\sinh(y)$$

her, indem Sie obige Gleichungen und das Potenzgesetz $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ nutzen.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} &= \mathrm{e}^{-y} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{-y}(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)) \\
\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} &= \dots \\
\sin(z) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \\
&= \sin(x)(\dots) + \cos(x)(\dots)
\end{aligned}$$

Zusatz: Vollziehen Sie die Umkehrfunktion des komplexen Sinus nach, s. VL nach 13.21

Lösung:

$$\begin{aligned} w = \sin(z) \Rightarrow \cos(z) &= \pm\sqrt{1-w^2} \quad \text{wegen } \sin^2(z)+\cos^2(z)=1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}z} &= \cos(z)+\mathrm{i}\sin(z) = \ldots \quad | \operatorname{Log}(.) \\ \mathrm{i}z &= \ldots \\ z &= \ldots \end{aligned}$$