

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 6. Woche – Laplace-Transformation, Partialbruchzerlegung

Laplace-Transformation

7.VI.3 a,c s. [Übungsheft Funktionentheorie, S. 33](#)

A1 Ermitteln Sie die Lösung der folgenden DGL mit Hilfe der Laplace-Transformation

$$\dot{x}(t) + 5x(t) = \mathbf{1}(t) \quad \text{mit } x(0) = 0.$$

Gehen Sie dabei analog [VL Bsp. 13.11](#) vor:

- (a) Geben Sie die Laplace-Transformierte der DGL an.
- (b) Lösen Sie (a) nach $X(s)$ auf.
- (c) Ermitteln Sie die Partialbruchzerlegung von (b) und
- (d) Rücktransformieren Sie (c).

A2 Überprüfen Sie den [Faltungssatz, VL Satz 13.12](#) für die in der Tabelle gegebenen Signale $f(t), g(t)$, indem Sie

- i Faltung $(f * g)(t)$ berechnen,
- ii die Laplace-Transformierten der drei Signale $f(t), g(t)$ und $(f * g)(t)$ ermitteln (ggf. Tabellen nutzen) und
- iii überprüfen, ob das Produkt der ersten beiden Laplace-Transformierten $\mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s)$ gleich der dritten $\mathcal{L}(f * g)(s)$ ist.

	$f(t)$	$g(t)$
(a)	$\mathbf{1}(t)$	$\mathbf{1}(t)$
(b)	$\mathbf{1}(t)$	$t \mathbf{1}(t)$
(c)	$\mathbf{1}(t)$	$g(t)$
(d)	$\delta(t)$	$g(t)$

Hinweise: Für (c,d) ist $g(t)$ ein beliebiges Signal mit $g(t) \circ \bullet G(s)$.
 $\delta(t)$ ist der [Dirac-Impuls](#).

Merke: Faltung im Zeitbereich $\circ \bullet$ Produkt im Bildbereich.

Partialbruchzerlegung (PBZ)

A3 PBZ für einfache Pole

Man zerlege $f(z)$ in Partialbrüche.

$$f(z) = \frac{(3-i)z - 5}{(z+i)(z-2)}$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Wert, den Sie erhalten, wenn Sie einen Pol von $f(z)$ streichen und in den 'Rest' die Polstelle einsetzen.

Zusatz: A ist das später so gefragte **Residuum**

Die Funktion $f(z)$ soll in Partialbrüche zerlegt werden.

(a)

$$f(z) = \frac{\text{Zähler}}{(z - z_{\text{Pol}})(\text{Nenner-Rest})} = \frac{A}{(z - z_{\text{Pol}})} + \dots$$

(b)

$$f(z) = \frac{\text{Zähler}}{(z - z_{\text{Pol}})^2(\text{Nenner-Rest})} = \frac{A}{(z - z_{\text{Pol}})} + \frac{B}{(z - z_{\text{Pol}})^2} + \dots$$

Geben Sie für (a) und (b) ein Verfahren (eine allgemeine Formel) zur Berechnung von A an. Sie dürfen

- $f(z)$ mit geeigneten Termen multiplizieren,
- ggf. nach einer geeigneten Variablen ableiten und
- einen geeigneten Wert für z einsetzen.

Kurven in der komplexen Ebene

A4 Ortskurven

In der VL Dynamische Netzwerke lernen Sie Ortskurven kennen - das sind Kurven, die Orte in der komplexen Ebene verbinden, die von einer reellen Variablen, z.B. von $t \in \mathbb{R}$ in der Geradengleichung $z = z_0 + tz_1$ abhängen.

- Zeichnen Sie die Ortskurve von $z = z_0 + tz_1$ für zwei selbst gewählte komplexe Zahlen z_0, z_1 für $t \geq 0$.
- Zeichnen Sie die Ortskurve von $z = R + i\omega L$ für (konstante) reelle $R, L > 0$ mit (variablem) $\omega \geq 0$.
- Zeichnen Sie die Ortskurve von $z = R + i\omega L$ für (konstante) reelle $\omega, L > 0$ mit (variablem) $R \geq 0$.

7.1.24 a) α, β , **Zusatz:** γ, δ s. [Übungsheft Funktionentheorie, S. 5](#)