Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. einiger Lösungen)
5. Woche – Fourier-Reihe, Fourier- und Laplace-Transformation

Fourier-Reihe

A1 Gerade/ungerade Fortsetzung

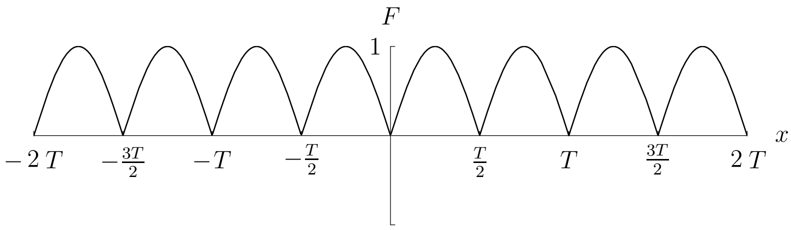
Bilden Sie für folgende Funktionen die angegebene periodische Fortsetzung, skizzieren Sie diese und geben Sie **nur den Ansatz** zur Berechnung der Koeffizienten deren Fourier-Reihe an.

(a) $f(x) = \sin(\frac{2\pi x}{T})$ für $0 < x < \frac{T}{2}$; gerade Fortsetzung zu T-periodischer Funktion; $x_0 = 0$.

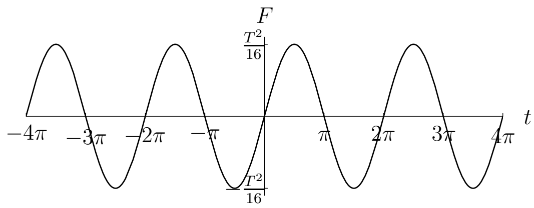
(b) $f(x) = x(\frac{T}{2} - x)$ für $0 < x < \frac{T}{2}$; ungerade Fortsetzung zu T-periodischer Funktion; $x_0 = \frac{T}{4}$.

Kurzlösung

(a) Skizze:



(b) Skizze:



Fourier-Transformation

A2 Hin- und Rück-Transformation für gerade Signale

Berechnen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation das Spektrum des Signals $f(t)$ und mit Hilfe der **inversen Fourier-Transformation** das zum Spektrum $G(\omega)$ gehörige Zeitsignal.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad G(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Reflektieren Sie den Unterschied zwischen Hin- und Rück-Transformation für gerade Funktionen.

Kurzlösung

$$F(\omega) = 2\frac{\sin\omega}{\omega}, \qquad g(t) = \frac{2}{2\pi}\frac{\sin t}{t}$$

Zusatz1: Differentiation im Frequenzbereich

Leiten Sie die Regel Differentiation, Ma3, Bem. 13.6 der Fourier-Transformation für $n = 1$ her, in dem Sie von einem Signal und seiner Fourier-Transformierten $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; G(\omega)$ ausgehen und die inverse Fourier-Transformation von $G'(\omega)$ durch partielle Integration ermitteln (analog der Herleitung der 1. Differentiationsregel in der VL).

Kurzlösung

$$g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; G(\omega) \;\Leftrightarrow g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega \text{ (inverse Fourier-Transformation)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{G'(\omega)}_{u'}\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}_{v}\,\mathrm{d}\,\omega = \dots \qquad\qquad = \underset{(*)}{0} - \mathrm{i}tg(t) \quad \text{q.e.d.}$$

(*) Wegen Satz von Plancherel hat mit $g(t)$ auch $G(\omega)$ eine endliche L_2-Norm, woraus folgt, dass $\lim\limits_{\omega\to\pm\infty} G(\omega) = 0$.

Zusatz2: Anwendung Verschiebungs- und Differentiations-Regel

(a) Nutzen Sie das Spektrum des Signals $f(t)$ aus Aufgabe **A2** und die Verschiebungsregel, Ma3, Bem. 13.6, um die Fourier-Transformierte des Signals $g(t)$ zu ermitteln.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentiationsregel, s. **Zusatz1**, das Spektrum des Signals $h(t)$.

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad h(t) = t \cdot g(t)$$

Hinweis: Für (b) ist es praktisch, $\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}}{-\mathrm{i}\omega}$ anstatt $2\frac{\sin\omega}{\omega}$ zu nutzen.

Kurzlösung

(a) $F(\omega) = 2\frac{\sin\omega}{\omega}$, $g(t) = f(t-1)$ Verschiebung um $t_0 = 1 \rightsquigarrow G(\omega) = F(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}$

(b)

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{-\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\omega}G(\omega) \\ &= -\frac{1}{\omega^2} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega}\left(\frac{1}{\omega^2} + \frac{2\mathrm{i}}{\omega}\right) \end{aligned}$$

Laplace-Transformation

A3 Konvergenzgebiet, Fourier-Laplace

(a) Schraffieren Sie das Konvergenzgebiet der Laplace-Transformation der Funktionen in Ma3, Bsp. 13.9 in der komplexen s-Ebene.

(b) Angenommen die Laplace-Transformierte eines Signals $f(t)$ existiert (konvergiert) auch für $\mathrm{Re}(s) = 0$ also für $s = \mathrm{i}\omega$, was der Fourier-Transformierten des Signals entspricht. Kennzeichnen Sie in der komplexen s-Ebene die Kurve, auf der $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{F}(f)(\omega)$.

Kurzlösung

(a) Immer eine 'rechte' Halbebene.

(b) Die imaginäre Achse: die 'Frequenzachse' ist also bei der Laplace-Transformation senkrecht.

3.4 aus dem Übungsheft Systemtheorie

Die Laplace-Transformierte eines Signals $x(t)$ sei durch $X(s)$ gegeben. Man zeige die Gültigkeit folgender Regeln der Laplace-Transformation:

(a) $\mathcal{L}\left(x(at)\right)(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(x(t))(\frac{s}{a})$
bzw. in Systemtheorie-Notation $x(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$ $\qquad$ ($a > 0$, Ähnlichkeitssatz),

(b) $\mathcal{L}\left(x(t-\tau)\right)(s) = \mathrm{e}^{-s\tau}\,\mathcal{L}(x(t))(s)$
bzw. in Systemtheorie-Notation $x(t-\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathrm{e}^{-s\tau}\,X(s)$ $\qquad$ ($\tau > 0$, Verschiebungssatz)!

(c) Aus einer Korrespondenzentabelle der Laplace-Transformation liest man ab:

$$\cos t \; \mathbf{1}(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{s}{s^2+1}.$$

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierten von

$\alpha)$ $\cos(\omega_0 t)\; \mathbf{1}(t) \quad (\omega_0 > 0),\qquad$ $\beta)$ $\cos(\omega_0(t-\tau))\; \mathbf{1}(t-\tau) \quad (\tau > 0)\,!$

Kurzlösung

(a) $\mathfrak{L}(x(at)) = \int\limits_0^{\infty} x(at)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t \qquad$ Substitution $at = t'$, $t = \frac{t'}{a}$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t'}{a}$ $\quad\ldots$

(b) $\mathfrak{L}(x(t-\tau)\;\mathbf{1}(t-\tau)) = \int\limits_0^{\infty} x(t-\tau)\;\mathbf{1}(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = \int\limits_{\tau}^{\infty} x(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$

Substitution $t-\tau = t'$, $t = t'+\tau$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}t'$ $\quad\ldots$

(c) $\alpha)$ $\mathfrak{L}(\cos\omega_0 t) = \dfrac{s}{(s^2+{\omega_0}^2)}$

$\beta)$ $\mathfrak{L}\left(\cos\omega_0(t-\tau)\;\mathbf{1}(t-\tau)\right) = \mathrm{e}^{-s\tau}\dfrac{s}{(s^2+{\omega_0}^2)}$

A4 'Beidseitige' Laplace-Transformation

Angenommen, es gäbe ein Laplace-Transformation $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}$, die auch 'negative' Zeiten nutzt:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}\,t$$

Geben Sie diese 'beidseitige' Laplace-Transformierte folgender Signale UND deren Konvergenzgebiet in der komplexen s-Ebene an:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \mathrm{e}^{\alpha t}, & t \geq 0 \end{cases}, \qquad g(t) = \begin{cases} -\,\mathrm{e}^{\alpha t}, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Reflektieren Sie die segensreiche Einschränkung auf 'positive' Zeiten in der Definition der Laplace-Transformation Ma3, Def. 13.7 in Bezug auf die eindeutige Umkehrbarkeit der Laplace-Transformation.

Kurzlösung

$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}(f)(s) = \overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}(g)(s) = \frac{1}{s-\alpha}$ aber einmal ist das Konvergenzgebiet $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ und im zweiten Fall $\mathrm{Re}(s) < \alpha$.