Technische Universität Dresden, Institut für Wissenschaftliches Rechnen
PD Dr. S. Franz (WIL B207, HA 34259)
Dr. Ute Feldmann (WIL C202, HA 42378)

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1 (inkl. Kurzlösung)
5./6. Woche – Anwendung Fourier-/Laplace-Transformation und Umformtraining

Laplace/Fourier-Transformation von Strömen und Spannungen

A1 Gegeben sei das Spannungssignal an einem Kondensator $u(t)$ und somit dessen Fourier-Transformierte $U(\omega)$ mit $u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ U(\omega)$ bzw. dessen Laplace-Transformierte $U(s)$ mit $u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ U(s)$.

(a) Ermitteln Sie durch Anwendung der Differentiations-Regel der Fourier-Transformation VL Bsp. 13.4 die Fourier-Transformierte des Kondensator-Stromes
$i(t) = C\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ ?$
Geben Sie den Quotienten $\frac{U(\omega)}{I(\omega)}$ an und vergleichen Sie mit dem im Fach Dynamische Netzwerke genutzten komplexen Widerstand.

(b) Ermitteln Sie durch Anwendung der Differentiations-Regel der Laplace-Transformation VL Bsp. 13.9 die Laplace-Transformierte des Kondensator-Stromes
$i(t) = C\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ ?$
Geben Sie unter der Annahme, dass $u(0) = 0$, den Quotienten $\frac{U(s)}{I(s)}$ an und vergleichen Sie mit dem (bald) im Fach Systemtheorie genutzten 'symbolischen Widerstand'.

Kurzlösung:

(a) $I(\omega) = Ci\omega\, U(\omega) \quad \Rightarrow \frac{U(\omega)}{I(\omega)} = \frac{1}{i\omega C}.$

(b) $I(s) = C\,(s\,U(s) - u(0)) \quad \stackrel{u(0)=0}{\Rightarrow} \frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC}.$

Umform-Training

A2 Gegeben ist folgender Ausdruck einer komplexen Variablen s, dabei seien C_1, C_2, R_2, R_3 reelle Konstanten:

$$f(s) = \frac{\frac{1}{sC_2}}{R_3 + \frac{1}{sC_2}} \cdot \frac{R_2 \parallel \left(R_3 + \frac{1}{sC_2}\right)}{\frac{1}{sC_1} + \left[R_2 \parallel \left(R_3 + \frac{1}{sC_2}\right)\right]}$$

Dabei ist $a \parallel b$ eine Notation, die durch $\frac{ab}{a+b}$ aufgelöst wird bzw. durch $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

(a) Formen Sie den Ausdruck so um, dass Nenner und Zähler nur noch positive Potenzen von s enthalten (das ist für Systemtheorie und Regelungstechnik nützlich).

(b) Ersetzen Sie in (a) s durch $i\omega$ und geben für Zähler und Nenner Real- und Imaginärteil an $f(i\omega) = \frac{a+ib}{c+id}$.

(c) Wie würden Sie vorgehen, wenn Sie von (b) Betrag und Phase angeben sollen?

(d) Wie würden Sie vorgehen, wenn Sie von (b) Real- und Imaginär-Teil angeben sollen?

Kurzlösung:

(a)

$$f(s) = \frac{sC_1R_2}{s^2C_1R_2C_2R_3 + s(C_1R_2 + C_2(R_2 + R_3)) + 1}$$

(b)

$$f(i\omega) = \frac{\overbrace{0}^{a} + i\overbrace{\omega C_1 R_2}^{b}}{\underbrace{1 - \omega^2 C_1R_2C_2R_3}_{c} + i\underbrace{\omega(C_1R_2 + C_2(R_2 + R_3))}_{d}}$$

(c) Z.B. Betrag und Phase von Zähler und Nenner ermitteln, dann ...

(d) Konjugiert komplex erweitern ...

Hinweis: Man beachte die unterschiedliche Notation Ma vs. ET3:
Ma: komplexe Zahl f, Betrag $|f|$, ET3: komplexe Zahl $\underline{f}$, Betrag f.