

Übungen zur Vorlesung Mathematik II/1

5. Woche – Fourier-Reihe, Fourier- und Laplace-Transformation

Fourier-Reihe

A1 Gerade/ungerade Fortsetzung

Bilden Sie für folgende Funktionen die angegebene periodische Fortsetzung, skizzieren Sie diese und geben Sie **nur den Ansatz** zur Berechnung der Koeffizienten deren Fourier-Reihe an.

- (a) $f(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$ für $0 < x < \frac{T}{2}$; gerade Fortsetzung zu T -periodischer Funktion; $x_0 = 0$.
- (b) $f(x) = x\left(\frac{T}{2} - x\right)$ für $0 < x < \frac{T}{2}$; ungerade Fortsetzung zu T -periodischer Funktion; $x_0 = \frac{T}{4}$.

Fourier-Transformation

A2 Hin- und Rück-Transformation für gerade Signale

Berechnen Sie mit Hilfe der Fourier-Transformation das Spektrum des Signals $f(t)$ und mit Hilfe der **inversen Fourier-Transformation** das zum Spektrum $G(\omega)$ gehörige Zeitsignal.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad G(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Reflektieren Sie den Unterschied zwischen Hin- und Rück-Transformation für gerade Funktionen.

Zusatz1: Differentiation im Frequenzbereich

Leiten Sie die Regel [Differentiation, Ma3, Bem. 13.6](#) der Fourier-Transformation für $n = 1$ her, in dem Sie von einem Signal und seiner Fourier-Transformierten $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$ ausgehen und die inverse Fourier-Transformation von $G'(\omega)$ durch partielle Integration ermitteln (analog der Herleitung der 1. Differentiationsregel in der VL).

Zusatz2: Anwendung Verschiebungs- und Differentiations-Regel

- (a) Nutzen Sie das Spektrum des Signals $f(t)$ aus Aufgabe **A2** und die [Verschiebungsregel, Ma3, Bem. 13.6](#), um die Fourier-Transformierte des Signals $g(t)$ zu ermitteln.

- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentiationsregel, s. **Zusatz1**, das Spektrum des Signals $h(t)$.

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad h(t) = t \cdot g(t)$$

Hinweis: Für (b) ist es praktisch, $\frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega}$ anstatt $2\frac{\sin\omega}{\omega}$ zu nutzen.

Laplace-Transformation

A3 Konvergenzgebiet, Fourier-Laplace

- (a) Schraffieren Sie das Konvergenzgebiet der Laplace-Transformation der Funktionen in Ma3, Bsp. 13.9 in der komplexen s -Ebene.
- (b) Angenommen die Laplace-Transformierte eines Signals $f(t)$ existiert (konvergiert) auch für $\operatorname{Re}(s) = 0$ also für $s = i\omega$, was der Fourier-Transformierten des Signals entspricht. Kennzeichnen Sie in der komplexen s -Ebene die Kurve, auf der $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{F}(f)(\omega)$.

3.4 aus dem Übungsheft Systemtheorie

Die Laplace-Transformierte eines Signals $x(t)$ sei durch $X(s)$ gegeben. Man zeige die Gültigkeit folgender Regeln der Laplace-Transformation:

- (a) $\mathcal{L}(x(at))(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(x(t))\left(\frac{s}{a}\right)$
 bzw. in Systemtheorie-Notation $x(at) \circlearrowright \bullet \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$ ($a > 0$, Ähnlichkeitssatz),
- (b) $\mathcal{L}(x(t - \tau))(s) = e^{-s\tau}\mathcal{L}(x(t))(s)$
 bzw. in Systemtheorie-Notation $x(t - \tau) \circlearrowright \bullet e^{-s\tau}X(s)$ ($\tau > 0$, Verschiebungssatz)!
- (c) Aus einer Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation liest man ab:

$$\cos t \mathbf{1}(t) \circlearrowright \bullet \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Bestimmen Sie die Laplace-Transformierten von

$$\alpha) \cos(\omega_0 t) \mathbf{1}(t) \quad (\omega_0 > 0), \quad \beta) \cos(\omega_0(t - \tau)) \mathbf{1}(t - \tau) \quad (\tau > 0)!$$

A4 'Beidseitige' Laplace-Transformation

Angenommen, es gäbe ein Laplace-Transformation $\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}$, die auch 'negative' Zeiten nutzt:

$$\overset{\leftrightarrow}{\mathcal{L}}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Geben Sie diese 'beidseitige' Laplace-Transformierte folgender Signale UND deren Konvergenzgebiet in der komplexen s -Ebene an:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{\alpha t}, & t \geq 0 \end{cases}, \quad g(t) = \begin{cases} -e^{\alpha t}, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Reflektieren Sie die segensreiche Einschränkung auf 'positive' Zeiten in der Definition der Laplace-Transformation Ma3, Def. 13.7 in Bezug auf die eindeutige Umkehrbarkeit der Laplace-Transformation.